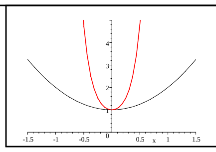
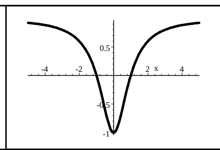
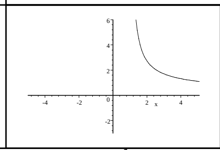
5. Oktober

Aufwärmübungen:

■ Was wissen Sie über $x \longmapsto \ln(x)$? Stellen Sie kurz die wichtigsten Eigenschaften zusammen.

■ Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen, dazu Skizze des Graphen:

$f_1(x) = (1+x^2)^7$ (KR)	$f_1'(x) = ...$	
$f_2(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = ..$ (QR)	$f_2'(x) = ..$	
$f_3(x) = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$	$f_3'(x) = ..$	
$f_4(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$	$f_4'(x) = (\ln(x)+1)x^x..$	$\ln'(x) = \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$
$$f_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\frac{x-1-2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{(x-1)^{\frac{5}{2}}\sqrt{x+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\frac{x-1-2\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$$

Themen (Wiederholung und neu★)

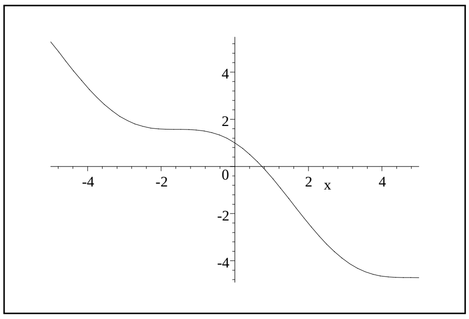
- Tangentenzerlegung
  - Tangentenapproximation: Newtonverfahren ★
  - Die beiden Denkfiguren
  - Umformungen, Interpretationen,
  - Verallgemeinerungen (andere Abbildungen, andere Ordnung, Krümmung)★
- Ableitungsregeln
  - Ableitung der Hauptfunktionen $f(x)=x^\alpha$, sinx, cosx, exp(x), atn(x),.....
  - Herleitung und Beweis der (rekursiven) Ableitungsregeln
  - Liste mit Nutzungsschema(.....)
- Kurvendiskussion★
  - Zusammenstellung der Inspektionspunkte★
  - Beispiele★
- Weitere Anwendungen
  - Monotonie?

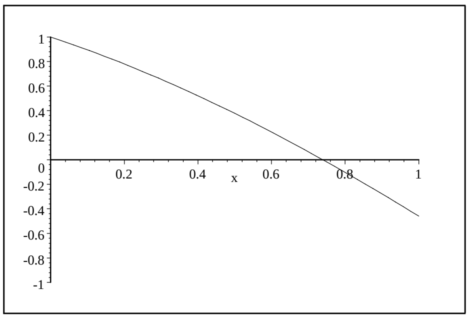
Newtonverfahren für $\boxed{\text{f(x)=cosx-x}}$ -sinx-1 Allgemeine Formel: $\Delta x = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

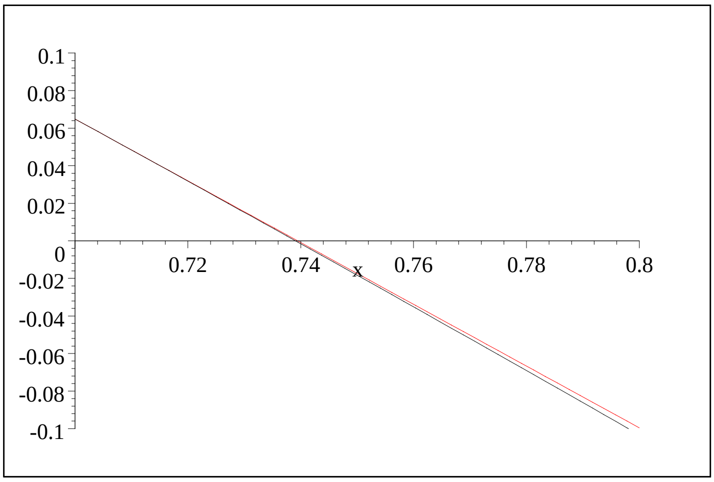
Start bei $x_1 = 0.7$

$$\Delta x = -\frac{\cos 0.7 - 0.7}{-\sin 0.7 - 1} = 3.9436 \times 10^{-2} = 0.039$$
$x_2 = 0.7 + \Delta x$ =0.739 und damit weiter!

$\cos x - x$ Unser Startwert war x=0.7. Im dritten Bild ist die Kurve (schwarz) und die Tangente (rot) gezeichnet. Der Unterschied ist bereits sehr gering!

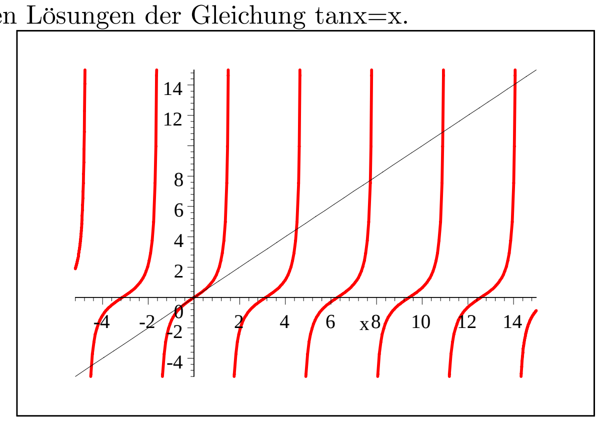






Die Tangente hat die Gleichung: y=(cos0.7-0.7)+(-sin(0.7)-1)(x-0.7)

Zu den Lösungen der Gleichung tanx=x.



★ Leseübung Kap. 9.3.3!

★ Kap. 10.2.1 zur Kurvendiskussion

Aufgaben zum Wochenende

Möglichst viele ansehen, Lösungsstrategie Überdenken, im Skript nachlesen!
Wählen Sie drei oder 4 aus, von denen Sie meinen, Sie "gerade noch" zu beherrschen oder zu denen Sie Übungsbedarf versüren und lösen Sie sie schriftlich.
Montag möglichst zur analyse abgeben.

Allgemein Funktionen, Graph ohen Ableitung. Z.T. bereits behandelt

■ 1) Vervollständigen Sie nachfolgende Gleichungen der Form y=f(x) zu einem jeweils naheliegenden Abbildungstripel. Was läßt sich jeweils (mit erträglichem Aufwand) über Bild und Graph sagen? Sofern nichts anderes gesagt ist, sind die Variablen reell.

y=1-x^2	y=$\frac{1}{1-x^2}$	y=sin($\frac{1}{x}$)	y(x)=$\sqrt{a^2-x^2}$	y(a)=$\sqrt{a^2-x^2}$
z$\mapsto$ $\bar{z}$ z$\in \mathbb{C}$	(x,y,z)$\mapsto (x,z)$	(x,y,z)$\mapsto (0,x,z)$	(x,y,z)$\mapsto (x,z,y)$	(x,y,z)$\mapsto (x^2,z^2,y^2)$
z(x,y)=x$^2-y^2$	r(x,y)=$\frac{xy}{x^2+y^2}$	s(x,y)=$\frac{xy}{x^2-y^2}$	q(x,y)=$\frac{x-y}{x+y}$	
z(t)=te^{it}				z(t)=cos(t)+isin(πt)
T(x,y,z)=x$^2+y^2+z^2$	$\vec{F}(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{\lvert\vec{x}\rvert}$			

■ 2) Ein Tischtennisball wird zur Zeit t=0 in der Höhe H über einem Tisch losgelassen. Er fällt senkrecht auf den Tisch und springt wieder hoch. Zur Zeit t habe er die Höhe h(t) und die Geschwindigkeit v(t). Letztere hat ein Vorzeichen.

Skizzieren Sie die Graphen von t$\mapsto$h(t) und t$\mapsto v(t)$ für einige Sprünge.

■ 3) Was für eine geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben:

$$p = (\mathbb{R}^3_K, (x,y,z) \mapsto (x,y,0), \mathbb{R}^3_K) \ ?$$

Was ergibt sich für $p \circ p$?

■ 4) Welche geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben

$$r = (\mathbb{R}^2_K, (x,y) \mapsto (-y,x), \mathbb{R}^2_K) \ ?$$

Bestimmen Sie $r \circ r$ rechnerisch und geometrisch? Existiert die inverse Abbildung zu r? Wenn ja, wie sieht sie aus?

■ 5) Sei f(x)=ax(1-x). Berechne f$_2(x) = f \circ f(x)$ und f$_3(x) = f \circ f_2(x)$.

■ 6) Es sei A={a,b,c,d} und f:A→A mit f(a)=b, f(b)=c , f(c)=d und f(d)=a. Existiert die inverse Abbildung? Wenn ja: Geben Sie diese an.

a) Dasselbe für g:A→ A mit g(a)=a, g(b)=b, g(c)=d und g(a)=a.

c) Sei W={1,2,3,4}. Geben Sie ein Beispiel einer invertierbaren Abbildung A→ W an. Wieviel derartige Abbildungen A→ W gibt es?

■ 7*) Im Ursprung befinde sich eine Kugel mit Radius R und relektierender Oberfläche. Ein Strahl parallel zur z-Achse falle von oben ein und treffe die Kugel. Der Strahl habe den Abstand r von der z-Achse. Bestimmen Sie den reflektierten Strahl. Wo trifft der reflektierte Strahl die x-y-Ebene? Welchen Abstand R hat dieser Auftreffpunkt vom Ursprung? Bestimmen Sie die Zuordnung r$\mapsto R(r)$.

■ 8) "Vorstellungsskizze" : Gegeben der Einheitskreis und darauf ein Punkt P mit Polarwinkel θ. Weiter sei S der "Startpunkt" auf dem Kreis zum Winkel $\theta = 0$. Wir können P und S einmal durch den zugehörigen Bogen auf dem Einheitskreis verbinden oder durch die (kürzere) Verbindungsstrecke. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der folgenden Zuordnung

$$\theta \mapsto \text{Länge des Verbindungsbogens-Länge der Verbindungsstrecke}$$

Gehen Sie aus von der anschaulichen Vorstellung dieser Größen. Leiten Sie anschließend einen Rechenausdruck für den Funktionswert her.

■■ 9) Halbquantitative Skizze: Fertigen sie für die folgenden Funktionen über die Analyse des Rechenausdrucks eine Skizze des Graphen an.

Nochmals: *Keine Wertetabelle*, höchstens die Werte einiger besonderer Punkte. Möglichst viele per Inspektion erkennbare Eigenschaften in der Skizze unterbringen! Eventuelle Problemstellen oder Unklarheiten durch ein "?" markieren. Spezielle Tricküberlegungen sind natürlich erwünscht!

Gehen Sie aus von der Kenntnis der Grundfunktionen jeweiligen Aufbau des Rechenausdrucks:

$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$	$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$	$x \mapsto x + (x-1)(x-2)(x-3)$	
$x \mapsto x - sin(x)$	$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	$x \mapsto \frac{x}{\sin x}$	$x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$
$x \mapsto \frac{x}{a^2-x^2}$ mit a>0	$x \mapsto x\cos(x^2)$	$x \mapsto x^2\cos(x)$	$x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$
$x \mapsto \sin(\sin x))$	$x \mapsto \cos(\sin(x))$	$x \mapsto e^x - x^{2m}$ m=0,1,2,....	

■ 10) Skizzieren sie die Graphen der folgenden Zuordnungen:

x$\mapsto$ $\sqrt{\lvert x\rvert^n(a-x)}$ n=1,2,3,4 a>0	x$\mapsto$ $\frac{\sqrt{x}}{x+2}$	x$\mapsto$ $x+\sqrt{x}$	x$\mapsto$ $\sqrt{\sin^2(x)}$	x$\mapsto$ $x\sqrt{1-x^2}$

■ 11) Diskutieren Sie (kurz) den Verlauf der zusammengesetzten Abbildung x$\mapsto$ $\ln(\ln(x))$.

■ ■12) Berechnen Sie die inverse Funktion (volles Tripel) für die folgenden Funktionen:

y=3x$^3 - 9$	x$\mapsto$ e^{3x+2}	x$\mapsto$e$^x - e^{-x}$	y=3+9e^{-2x}

■ 13) Verstehen und interpretieren bzw. vervollständigen Sie die folgende Gleichungen:

x$^x = e^{x\ln x}$	a$^x = e^{x\ln a}$	ln(a^x) = ...	ln(ae$^{bx^2}$)

a) Was ist zu folgenden Gleichungen zu sagen:

$(x^x)^x = x^{(x^x)}$	e$^{x^2} = e^{2x}$	e$^{-x} = e^{\frac{1}{x}}$	ln(x+y)=lnx$\cdot\ln y$

■ 14) Einstieg in Kap.8.4.4a: Mit Hilfe der Additionstheoreme kann man eine nützliche Formel für die Größe $\boxed{\text{sin(x)+sin(y)}}$ herleiten. Tun Sie das. Hinweis: Offenbar gilt x=$\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$ und y=$\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)$.

Hilfsmittel

■ 15) Was bewirken kleine Transformationen im Falle der Sinusfunktion? (Das heißt: welche neuen Funktionen erhält man so? Formulieren Sie den Rechenausdruck und skizzieren sie den entstehenden Graphen.)

a) Dasselbe für x$\mapsto$ $\sqrt{x}$ und x$\mapsto$ $\ln(x)$. Welche Beobachtung macht man hinsichtlich der Zahl der Freiheitsgrade für das Ergebnis? Beispiel: $\sqrt{-1-x}$.

■ 16) Bilden Sie für die folgenden Rechenausdrücke ein Verlaufsdiagramm (in x):

sin(3x$^2 + e^x$)	sin(3x^2) + e^x	x$^2 - \sin(\ln(\cos(x^2)))$	x+x$^2\sin(x^2) + \frac{x^2}{\sin x^2}$	

■ 17) Die Ableitung von f(x)=x$^{\frac{1}{3}}$ = $\sqrt[3]{x}$ ist f$'(x_0) = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}$. Das sei bekannt. Berechnen Sie jetzt $\sqrt[3]{8.01} = \sqrt[3]{8+0.01}$ exakt und in Tangentenapproximation. Dasselbe für $\sqrt[3]{8.001}$ und $\sqrt[3]{9}$. Berechnen sie jeweils auch den absoluten und den lokalen Fehler.

$\boxed{\text{Mit Ableitungen}}$

■ 18) Bestimmen Sie eine Parametrisierung aller nach oben geöffneten Normalparabeln (der Ebene), deren Scheitelpunkt auf dem Einheitskreis um den Ursprung liegt.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente der Normalparabel zum Punkte x$_0$.

c) Patrametrisierern Sie alle Tangenten an die Normalparabel.

■■ 19) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln die folgenden Ableitungen:

$\mathrm{f}_1(x) = sin(x^2)$	$f_2(x) = \sin^2 x$	$f_3(x) = \sqrt{1+3x^2}$	$f_4(x) = e^{x^2}\cos(x)$	$\mathrm{f}_5(x) = \frac{x^2-x+1}{e^x+1}$
$\mathrm{f}_6(x) = \sin(2\sin(3x))$	$\mathrm{f}_7(x) = \frac{\cos(\sin(x))}{\sin(x)}$	$\mathrm{f}_8(x) = x^{(x^2)}$	$\mathrm{f}_9(x) = \frac{\cos x}{1+e^x}$	$\mathrm{f}_{10}(x) = \frac{(1+2x^2)^3}{(2-x^2)^2}$

a) **Kettenregel**: Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Ableitung:

F_1(x)=(-3x^3 + 7)^8 $\quad$ $\mathrm{F}_2(x) = \frac{1}{(1-x^2)^3}$ $\quad$ $\mathrm{F}_3(x)=\sqrt{1-x}$ $\quad$ $\mathrm{F}_4(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$\mathrm{F}_5(x)$=sin(cos(x)) $\quad$ $\mathrm{F}_6(x)$=ln(x+ln(x)) $\quad$ $\mathrm{F}_7(x)=\ln(\mathrm{e}^x + x)$ $\quad$ $\mathrm{F}_8(x) = \mathrm{x}^x$

■ 20) Skizzieren sie den Graphen von f(x)=x+sin(x). Gesucht ist eine Lösung der Gleichung f(x)=$\frac{1}{2}$. Wandeln Sie das in ein Nullstellenproblem um und bestimmen Sie die Lage der Nullstelle näherungsweise mit dem Newtonverfahren.

■ 21) Diskutieren sie $\boxed{\mathrm{f}(x)=|x|^{\frac{1}{5}}\ln(|x|).}$ Wo verschwindet die Ableitung?

■ 22) Bestimmen Sie für die folgenden Rechenausdrücke (über Einsetzen der Tangentenzerlegungen) das Verhalten an den Unbestimmtheitsstellen:

$$\frac{\tan x}{x(3+7x)} \quad \frac{\ln(x)}{x-1} \quad \frac{(\ln x)^2}{x-1} \quad \frac{\ln x}{(x-1)^2} \quad \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)}$$

■ 23) Diskutieren Sie die Funktion y=$\frac{x^2}{1+x^4}$

■ 24) Diskutieren Sie die Funktion y=$\frac{x^2}{1+x^2}$. Wieso ist hier die Umformung $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ angebracht?

■ 25) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen und der Maxima der folgenden drei Funktionen: y=sin(x^2) und y=sin($\frac{1}{x}$) und y=sin($\sqrt{x}$).

■ 26) Diskutieren Sie die beiden Funktionen $\mathrm{h}_\pm(x) = \sqrt{|x|} \pm \sqrt{1-x^2}$. Beide Graphen in einem Bild skizzieren!

■ 27) Diskutieren Sie die Funktionsscharen $\mathrm{f}_a(x) = x + a\sin(x)$ und $\mathrm{g}_a(x) = \frac{a}{x^2+a}$. .

■ 28) Diskutieren Sie das Verhalten der Kurvenschar

$$f_n(x) = \frac{e^x}{1+x^n} \quad \text{n=0,1,2,3,...}$$

■ 29) Geben Sie die Tangentenapproximation der durch $\delta \mapsto \sin\delta \cdot e^{2\tan(3\delta)}$ gegebenen Funktion um $\delta = 0$ an.

■ 30) Berechnen Sie **alle** Lösungen der folgenden Bestimmungsgleichungen

tan(x)=2 $\quad$ sin(x)=0.5 $\quad$ arctan(x)=0.2 $\quad$ cos(x^2)=0.5
