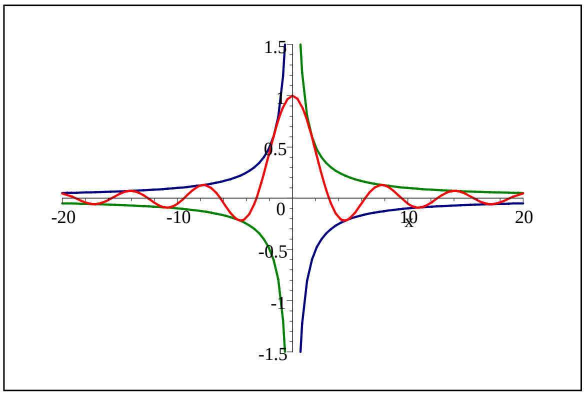
■■ Aufwärmübung: Halbquantitative Skizze zum Funktionsverhalten:

Fertigen sie für die folgenden Funktionen über die Analyse des Rechenausdrucks eine Skizze des Graphen an.

Nochmals: *Keine Wertetabelle*, höchstens die Werte einiger besonderer Punkte. Möglichst viele per Inspektion erkennbare Eigenschaften in der Skizze unterbringen! Eventuelle Problemstellen oder Unklarheiten durch ein ”?” markieren. Spezielle Tricküberlegungen sind natürlich erwünscht!

Gehen Sie aus von der Kenntnis der Grundfunktionen jeweiligen Aufbau des Rechenausdrucks: (Beispiel $\frac{\sin x}{x}$:



$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$	$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$	$x \mapsto x + (x-1)(x-2)(x-3)$	
$x \mapsto x - sin(x)$	$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	$x \mapsto \frac{x}{\sin x}$	$x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$
$x \mapsto \frac{x}{a^2-x^2}$ mit a>0	$x \mapsto x\cos(x^2)$	$x \mapsto x^2\cos(x)$	$x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$
$x \mapsto \sin(\sin x))$	$x \mapsto \cos(\sin(x))$	$x \mapsto e^x - x^{2m}$ m=0,1,2,....	

Kapitel 9 "Tangentenzerlegung"

- Die typische Situation: f:D→ $\mathbb{R}$ gegeben. Dazu ein Punkt $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = y_0$ bekannt. Setze $\Delta x = x - x_0$.
- Das Problem: Mit möglichst wenig Aufwand möglichst viel über das Verhalten von f um x_0 herum herausfinden. (Für kleines Δx). Geometrisch: Finde die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(x_0, f(x_0))$. Allgemeines und verallgemeinerbares Problem
- Lösung: Über eine Umschreibung des Rechenausdruckes der folgenden Art:
  - $$\underbrace{f(x_0+\Delta x)}_{?Verhalten??} = \underbrace{f(x_0) + \underset{???}{m} \cdot \Delta x}_{\text{Tangentengleichung}} + \underset{Fehler}{F(x_0,\Delta x)} \qquad \Delta x \frac{F(x_0,\Delta x)}{\Delta x}$$
  - Problem: Schluss von der Summe auf den Summanden! Das letzte Plus? Dazu müßte m oder F bekannt sein.
  - Man braucht eine zusätzliche Bedingung! ("Resttrermbedingung"). Diese sieht wie folgt aus: ″ ***Der Fehler F muss bei*** $\Delta x = 0$ *eine Nullstelle haben, die stärker als linear ist* ″ Realisierung:

* Schreibe $\boxed{\mathrm{F}(\mathrm{x}_0, \Delta x) = \Delta x \cdot R(x_0, \Delta x)}$ und fordere $\boxed{\boxed{lim_{\Delta x \to 0} R(x_0, \Delta x) = 0}}$ Das nennen wir "Restermbedingung" Achtung: $\mathrm{R}(\mathrm{x}_0, 0)$ ist zunächst nicht definiert!

- Damit erhält die Umschreibung des Rechenausdrucks folgende Gestalt:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \boxed{\mathrm{m}}\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$$

Nur m ist bisher noch unbekannt! eigentlich $\mathrm{R}_f^m(x_0, \Delta x)$.

■■ Wieso ist *Zerlegung* möglich? Beispiel ausdenken und R für $\Delta x \neq$ bestimmen!
(Wir haben f(x)=x^3 und f(x)=$\frac{1}{x}$*gerechnet*. Dazu f(x)=sin(x). Siehe Skript.

Bezeichnungen:
Eindeutigkeitsnachweis. "Wenn es ein m gibt,sodass„„ dann ist es eindeutig." Höchstens ein m.
Fallunterscheidung:
a) Es gibt genau ein m, für das die Restermbedingung erfüllt ist. Oder
b) Es gibt kein solches m .
Im Falle a) bezeichnen wir das ausgezeichnete m mit $\boxed{\mathrm{f}'(x_0)}$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder....."der Ableitungswert von f in x_0".

Weitere Bezeichnungen
"Die Tangentenzerlegung von f um x_0" :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f\,'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$$

"Tangentenapproximation ......"

Die zwei Denkfiguren:

$\boxed{\text{1. Denkfigur:}}$ "Bestimmung einer Ableitung":

Weise die Restermeigenschaft für f und x_0 für ein bestimmtes m nach. **Dann gilt** $\boxed{\mathbf{f}'(x_0) = m}$.
Die Ableitung ist berechnet!

■■ Beispiel ausdenken und rechnen! (Natürlich eines, deren Ableitung man bereits kennt!)

2. Denkfigur

$\boxed{\text{2.Denkfigur}}$ "Die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung".

f sei in x_0 differenzierbar mit Ableitung $\mathrm{f}'(x_0)$. Dann gilt die Tangentezerlegung

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f\,'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x) \quad \begin{array}{c}\text{mit Restermeigenschaft} \\ \lim_{\Delta x \to 0} R_f(x_0, \Delta x) = 0\end{array}$$

D.h. von R kennt man nicht die genauere Zuordnung, nur diese Eigenschaft!

Analogie: Ersetze den genauen Spielverlauf durch eines Fussballspieles durch das Resultat. (Informationsreduktion).

Die Tangentenzerlegung liefert codiert daher die Information über das Funktionsverhalten in einer Hierarchie zunehmender Genauigkeit, aber auch jeweils weniger leichter Zugänglichkeit:

$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \Delta x)$	$\approx f(x_0)$	Startwert
	$\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$	Tangentenapproximation
!!!! !!!	$= f(x_0) + f\,'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$	von R_f ist nur die Restermeigenschaft bekannt!
	$= f(x_0) + f\,'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$	R_f ist exakt bekannt

Der wichtige Schritt: Von der letzten Zeile zur vorletzten. Diese Form erweist sich als besonders nützlich.
■■ Beispiel ausdenke und rechnen.....

■ Zusammenhang mit dem Differentialquotienten?
■ und der momentanen Geschwindigkeit?

■ Die Ableitungsfunktion...
■ Die Ableitung der Funktionen der Grundausstattung (Über die erste Denkfigur)

Die Ableitungsregeln.

Sie sollen parallel zu unseren rekursiven Konstruktionen laufen. **D.h. wie sollten Sie allgemein aussehen?**
■■ Sei $\boxed{\text{.......Voraussetzungen..}}$ ...dann ist/gilt $\boxed{\quad\text{und ......}}$
Beispiele formulieren und dann der Beweis!

F(x)=$(\alpha f + \beta g)\,(x)$	F$'(x) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$	Linearität	
F(x)=$(fg)\,(x)$	F$'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$	Produktregel	Strategie!
F(x)=$\frac{f}{g}(x)$	F$'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0=}{g^2(x_0)}$	Quotientenregel	Strategie
	F$'(x_0) = g'(x_0)f'(g(x_0))$		
$F(x) = f(g(x))$	x$\longmapsto g(x) = y \longmapsto f(y)$	Kettenregel	Strategie
	g$'(x) \cdot f'$		

f,g x$_0$ f$'(x_0)$, g$'(x_0)$
??? (f+g)(x$_0$) differenzierbar und Wert (f+g)$'(x_0)$ =???

Herleitung von $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)$ durch Einsetzen von Tangentenzerlegungen

$$\boxed{\text{x}\longmapsto f(x) = y \longmapsto \frac{1}{y} = \frac{1}{f(z)}}$$

$$\text{f}(\text{x}_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x).$$

$$\text{r(y)}=\frac{1}{y} \qquad \frac{1}{y_0+\Delta y} = \frac{1}{y_0} + \left(\frac{-1}{y_0^2}\right)^{\cdot\cdot} \Delta y + \Delta y R_r(y_0, \Delta y)$$

$$\frac{1}{f(x_0+\Delta x)} = \frac{1}{f(x_0) + \underbrace{(f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x))}_{\Delta y \quad \text{Hilfsgröße}}}$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} + \left(\frac{-1}{f^2(x_0)}\right)(f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)) + \Delta y R_r(y_0, \Delta y)$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} + \left(\frac{-1}{f^2(x_0)}\right) f'(x_0)\Delta x + \Delta x \left[\left(\frac{-1}{f^2(x_0)}\right) R_f(x_0, \Delta x) + \frac{\Delta y}{\Delta x} R_r(y_0, \Delta y)\right]$$

[....] erfüllt die Resttembedingung. Also....

Beispiele:
$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x)$

$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

F(x)=$\frac{1+x\sin x}{3+x^2}$ Nebenrschnung: 1sinx+xcosx

$F'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x)(3+x^2)-(1+x\sin x)(2x)}{(3+x^2)^2}$

Kettenregel

F(x)=f(g(x)) $F'(x_0)$ ' $y_0=g(x_0)$

$x \overset{g}{\longmapsto} g(x)=y \overset{f}{\longmapsto} f(y)$

g sei in x_0

f sei in y_0

D.h.

$g(x_0+\Delta x)=g(x_0)+g'(x_0)\Delta x+\Delta x R_g(x_0,\Delta x)....$

$f(y_0+\Delta y)=f(y_0)+f'(y_0)\Delta y+\Delta y....$

$$F(x_0+\Delta x)=f(g(x_0+\Delta x))$$
$$=f(y_0+\Delta y)=F(x_0)+f'(g(x_0))\cdot[g'(x_0)\Delta x+\Delta x R_g(x_0,\Delta x)]+\Delta y...$$
$$=F(x_0)+f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\Delta x+f'(g(x_0))\Delta x R_g(x_0,\Delta x)+\Delta y..$$
$$=\underbrace{F(x_0)}+\underbrace{f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}\Delta x+\Delta x\boxed{\left[f'(g(x_0))R_g(x_0,\Delta x)+\frac{\Delta y}{\Delta x}R_f(y_0,\Delta y)..\right]}$$

$F'(x)=g'(x)\cdot f'(y)$

$x \overset{g}{\longmapsto} g(x)=y \overset{f}{\longmapsto} f(y)$

Heuristische Herleitung der Formel für die Ableitung der inversen Funktion mit Schema:

$f^1(x)$ inverse Funktion zu f(x) f in x_0 diff. mit Ableitung $f'(x_0)$.

Außerdem sei f^{-1} in $y_0=f(x_0)$ diff. ??? Wert der Ableitung

Es gilt

$f^{-1}(f(x))=x$ $x\longmapsto f(x)=y\longmapsto f^{-1}(y)$

Kettenregel $\frac{d}{dx}$... y=f(x) $x=f^{-1}(y)$

$f'(x)\left(f^{-1}\right)'(y)=1$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

y=f(x)	$f'(x)$	$y=x^3$	$3x^2$
$x=f^{-1}(y)$	$??\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}!!$	$x=\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$

$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

tan(x)=y $\tan'(x)$

x=arctan(y) $\arctan'(y)=\frac{1}{1+y^2}$

$\sin^2 x=(\sin(x))^2$ $\sin x^2$ $\sin(x^2)$

$\tan^2(\arctan(y))=(\tan(\arctan(y)))^2=y^2$
