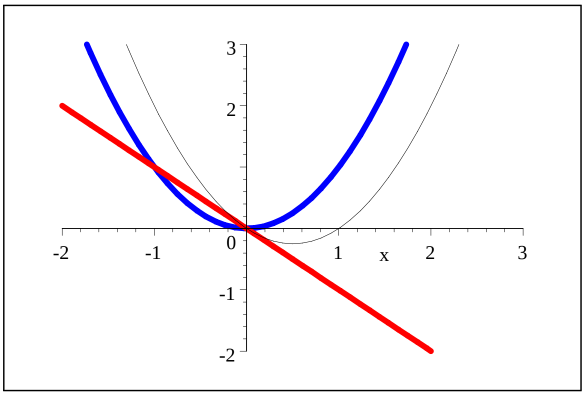
2.September

Reelle Funktionen

- Grundausstattung
  - $h_n = (\mathbb{R}, x \longmapsto \boxed{h_n(x) = x^n}, \mathbb{R})$ n$\in \mathbb{N}$ Symmetrie, Nullstellenstärke
  - sin, cos Additionstheoreme
  - exp=$(\mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x) = e^x, \mathbb{R})$ "Siegt gegen jedes Polynom"
- Rekursive Konstruktionen: Hauptproblem: Graph der Eingabefunktionen bekannt, wie erhält man eine (halbquantitative) Skizze des Graphen der Ausgabefunktion ? Oder auch: **Was für ein Verhalten des Graphen bewirken einzelne Teile des Rechenausdrucks ?**
- Dazu Hilfsmittel und Techniken!
- Die **Konstruktionen:** D$\subset \mathbb{R}$, aufgebaut aus (wenigen) Intervallen.
- f=(D, x$\longmapsto f(x), \mathbb{R})$ und g=(D,x$\longmapsto g(x), \mathbb{R})$ seien vorgegben!
  - Bilde dazu

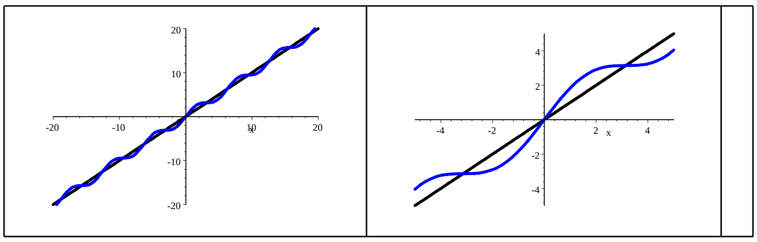
$$\begin{aligned} f+g &= (D, x \longmapsto \boxed{\text{(f+g)(x)=f(x)+g(x)}}, \mathbb{R}) \\ \alpha f &= (D, x \longmapsto (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \mathbb{R}) \end{aligned}$$

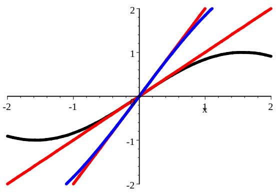
  - Gibt einen Vektorraum! Graph αf klar. Spiegelung, wenn $\alpha < 0$. Beispiel F(x)=x$^2 - x = x(x-1)$ Termumformung nutzen! $x^2 - x$



  - Vektorraum der Polynome

★ Dominanzargument! $\boxed{\text{f(x)>>|g(x)| , dann f(x)+g(x)}\approx f(x)}$
Dominanz bei Polynomen. Wo? Um x=0 und für große |x|





$$f \cdot g = (D, x \longmapsto \boxed{\text{(f·g)(x)=f(x)·g(x)}}, \mathbb{R})$$

Z.B. h_n·exp   mit $(\mathrm{h}_n \exp)(x) = x^n e^x$ oder sin· cos   usw.
Worauf ist zu achten?
★ Hat fg eine Symmetrie? (Regeln?)
★ Nullstellen der Faktoren
★ Vorzeichen
★ Ein Faktor hat den Wert ±1
★ Die wichtige Nullstellendominanzregel:

Diese Nullstellendominanzregel lautet wie folgt: Man hat Interesse am Verhalten von F(x)=f(x)g(x).

▼ f habe bei x_0 eine Nullstelle , also $f(x_0) = 0$.

▽ und dort gelte als Nullstellenbeschreibung näherungsweise $\boxed{f(x) \approx N(x)}$. Meist wird man $N(x) = A(x-x_0)^\alpha$ haben mit geeigneten Konstanten A und α. (**Vereinfachung des Rechenausdrucks, die Näherungsweise denselben Graphen liefert!)**

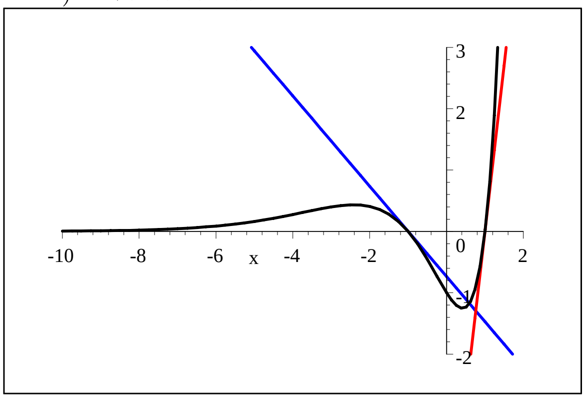
▽ Weiter sei $g(x_0) = b$ mit $b \neq 0$.

★ **Dann gilt näherungsweise** $\boxed{F(x) = f(x)g(x) \approx bN(x)}$, speziell $\boxed{F(x) \approx bA(x-x_0)^\alpha}$.

Kurz: Wenn man für f eine Näherung hat, die die Nullstelle bei x_0 gut beschreibt, dann soll der variable Zweitfaktor g(x) in der Nähe der Nullstelle einfach durch die Konstante $b = g(x_0)$ ersetzt werden. Aber nur, wenn $b \neq 0$ gilt.

Siehe Beispiele Skript!

$e^x(x^2-1)$ Verhalten bei x=±1.



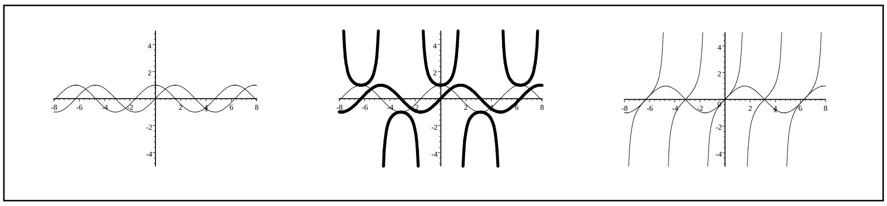
Die reziproke Funktion

$\frac{1}{f} = (D_0, x \longmapsto \boxed{\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}}, \mathbb{R})$ $\quad D_0 = \{x|x \in D, f(x) \neq 0\}$

Tritt meist als Faktor auf: $\frac{g}{f} = g \cdot \frac{1}{f}$
Beispiel: f(x)=$x^2 \pm 1$ und f(x)=x^2.

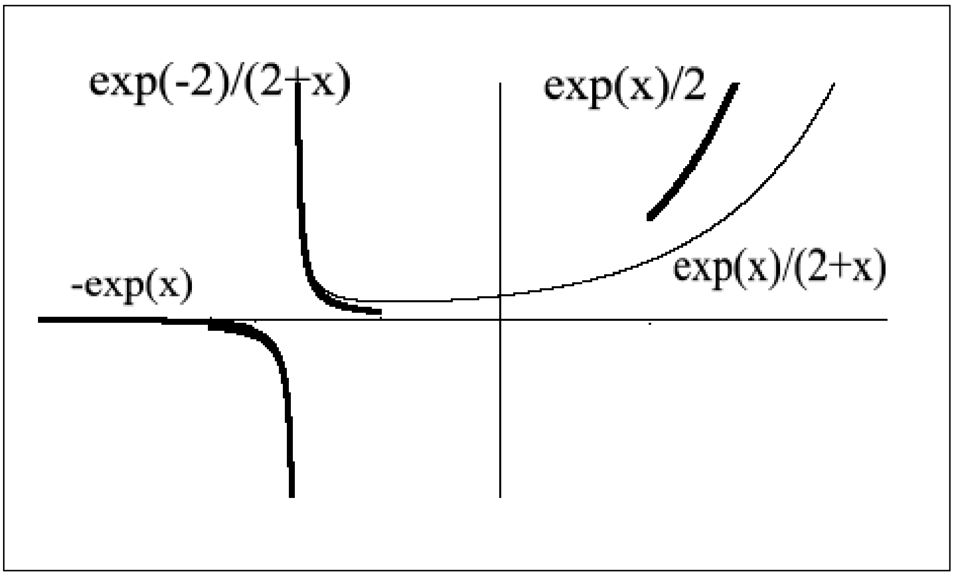
★ Bester Zugang: Starte an einer Stelle x_S mit f(x_S)=±1. und arbeite Dich nach beiden Seiten vor!
★ Nullstellen werden zu Polen. Nullstellentyp beachten! (Haupttypen)
★ Vorzeichen und Symmetrie bleiben erhalten.

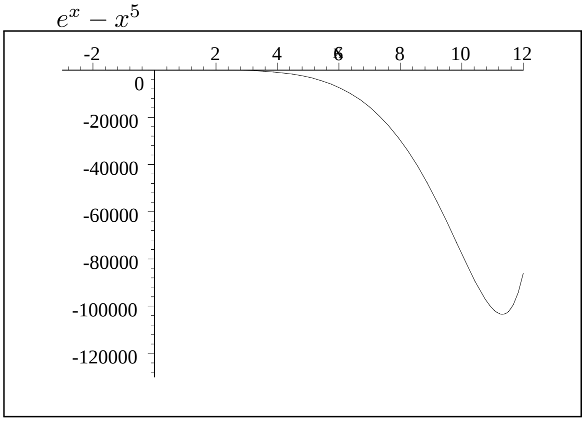
(8.3.43) Für den Tangens gilt tan(x)=$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$. Die Bilderfolge zeigt die entstehende Konstruktion des Graphen des Tangens:



Beachten Sie: ungerade/gerade=ungerade. Also ist der Tangens ungerade. Die Nullstellen des Sinus ergeben die des Tangens. Zugleich ist dort cos gleich ±1. Insbesondere tan(x)≈ x für kleine x. Die Nullstellen des cos ergeben Pole vom 1/x-Typ.

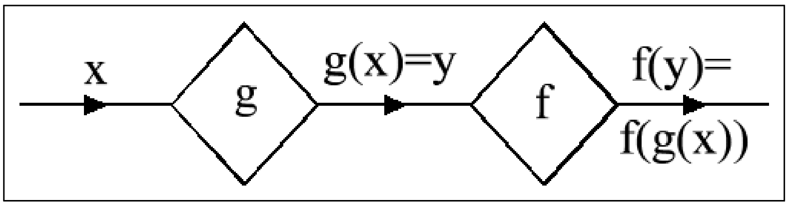
(8.3.44) Noch ein Beispiel: F(x)=$\frac{e^x}{2+x}$. Inspektion zeigt einen Pol bei $x = -2$. Auch Pole sind der Dominanzargumentation zugänglich, d,h, das Verhalten sollte durch das von $\frac{e^{-2}}{2+x}$ dominiert werde. Der Pol ist vom $\frac{1}{x} - Typ$. Weiter gilt $F(0) = \frac{1}{2}$. (Einmal ein bestimmter Einzelwert!). Vorzeichen? Positiv für x>-2, negativ für x<-2. Was ist für große x? Die allgemeine Regel besagt: Die Exponentialfunktion dominiert in jeder Hinsicht über alle Potenzen. Für x nach $+\infty$ also Wachstum wie exp. Für x nach $-\infty$ geht der Zähler nach 0, der Nenner nach unendlich, also geht der Quotient nach Null, mit negativem Zeichen. Oberhalb von $x = -2$ muß es ein Minimum geben. In der Figur sind die Näherungen in ihren Dominanzbereichen fett gezeichnet.





(8.3.46) Das **Schema der Konstruktion** sieht wie folgt aus:

$\Rightarrow$	f=(A,x$\mapsto f(x), B)$ und g=(C,y$\mapsto g(y), W)$ mit B=C !
!!	Dann hat man eine neue *zusammengesetzte* Funktion
T	$g \circ f = (A, x \mapsto \boxed{g \circ f(x) = g(f(x))}, W)$
	Charakterisierung: Hintereinanderausführen der Zuordnungen
!!	Als Wertegleichung: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle x aus A.



Diesen Teil leider ausgelassen!

(8.3.60) Wie bei den übrigen Konstruktionen hat man es verbreitet mit der folgenden Situation zu tun:

$x \mapsto F(x)$ ist gegeben und man interessiert sich für das Verhalten von F.

Man verfolgt den Rechenweg, den"Lebensweg" von x in F(x) und stellt fest, dass eine Zusammensetzung von Funktionen vorliegt. Dann geht man in x so weit, wie man die zugehörige Funktion beherrscht, und bezeichnet den Funktionswert mit y. Danach geht man wieder in y so weit, wie man die zugehörige Zuordnung gut beherrscht. Usw. Jeden Schritt notiert man möglichst als Pfeildiagramm. **Am Ende hat man F als Zusammensetzung geläufiger Funktionen dargestellt.**

(8.3.61) Ein Beispiel mit naheliegender Zerlegung:

$F(x) = \sin(e^{x^2+3})$
$x \overset{h}{\mapsto} x^2 + 3 = y \overset{g}{\mapsto} e^y = z \overset{f}{\mapsto} \sin(z)$
$F = f \circ g \circ h$

Hier ist es **nicht** sinnvoll, h noch weiter zu zerlegen in $u \mapsto u^2 = v \mapsto v+3$. Denn den Graphen von $h(x) = x^2+3$ können wir problemlos zkizzieren.

☐ Zerlegen Sie $F(x) = (1+e^{\sin((x-2)^2)})^3$ über ein Pfeildiagramm in beherrschbare Teile.

! Nochmals das Prinzip: **Gehe im "Schicksalsweg" der jeweiligen Variablen immer so weit, wie man die Zuordnung beherrscht!**

(8.3.62) Es sei $\ell(a) = ax+b$ wobei a und b äußere Parameter sind. Wir nennen ℓ ein *lineare Funktion.* Dann begegnet man ausgesprochen häufig Abbildungen der Form $\ell \circ f$ und $f \circ \ell$. D.h. als Wertegleichung:

$$\ell \circ f(x) = (\ell \circ f)(x) = af(x)+b \quad \text{und} \quad (f \circ \ell)(x) = f \circ \ell(x) = f(ax+b).$$

(8.3.63) Denken Sie etwa an die Beschreibung sinusförmiger Vorgänge in (6.3.30). Ebenso kommen Formen des Typs $\ell_1 \circ f \circ \ell_2$ vor. So läßt sich $t \mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$ wie folgt zerlegen: $t \overset{\ell_2}{\mapsto} \omega t+\varphi = u \overset{\sin}{\mapsto} \sin u = v \overset{\ell_1}{\mapsto} Av+0$.

☐ Unterscheiden Sie $F(x) = e^{x^2}$ und $G(x) = (e^x)^2$ durch Verlaufsdiagramme. Der erste Term ist eigentlich $e^{(x^2)}$ und verwendet eine Klammerersparnis. Er läßt sich nicht vereinfachen. Der zweite läßt sich über die Rechenregeln vereinfachen zu e^{2x}.

☐ $\boxed{\text{Diskutieren Sie } x \mapsto \sqrt{a^2-b^2\sin^2 x} \text{ für } a>b>0.}$ Zunächst eine Termumformung: $x \longmapsto a\sqrt{1-q^2\sin^2 x}$ mit 0<q<1. Der Einfluss von a ist jetzt trivial. Man hat nur noch die q-Abhängigkeit zu dikutieren.

Vorgehen: Inspektion zeigt: Funktion ist gerade und $\pi - periodisch.$ Starte bei x=0. Funktionswert ist 1. Was geschieht, wenn man x- vergrößert....

Dann überlegen, wie das Verhalten bei den oberen Extremstellen ist: Für x in der Nähe von 0 gilt:

$$\sqrt{1-q^2\sin^2 x} \approx \sqrt{1-q^2x^2} = \left(1-q^2x^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}q^2x^2$$

(Binomi) Das wurd berechnet. Der nächste Teil ist mühsamer und wurde nicht gerechnet, da noch nicht alle Information verfügbar war. Hier die Rechnung, die cosx$\approx 1-\frac{1}{2}x^2$ benutzt:

Und wie steht es mit den Minima? Etwa bei x=$\frac{\pi}{2}$. Dort gilt $\sin(\frac{\pi}{2}+\Delta x) \approx 1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\Delta x)^2$ Noch nicht gezeigt und besprochen!!Also

$\sqrt{1-q^2\sin^2 x} = \sqrt{1-q^2+q^2(1-\sin^2 x)}$

Es gilt sinx=$\sin(\frac{\pi}{2}+\Delta x) = 1-\frac{1}{2}\Delta x^2$ (Noch nicht besprochen!!) Also: 1-$\sin^2 x \approx 1-\left(1-\frac{1}{2}\Delta x^2\right)^2 \approx \Delta x^2$

Insgesamt:

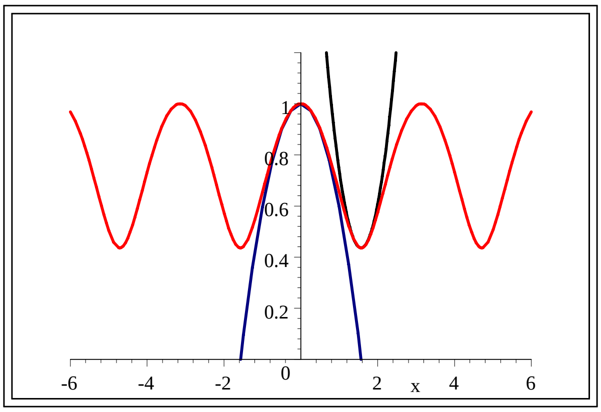
$$\begin{aligned} \sqrt{1-q^2\sin^2 x} &\approx \sqrt{1-q^2+q^2\Delta x^2} = \\ &= \sqrt{1-q^2}\sqrt{1+\frac{q^2}{1-q^2}\Delta x^2} \\ &\approx \sqrt{1-q^2}(1+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2}\Delta x^2) \end{aligned}$$

Ergebnis für x in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$:

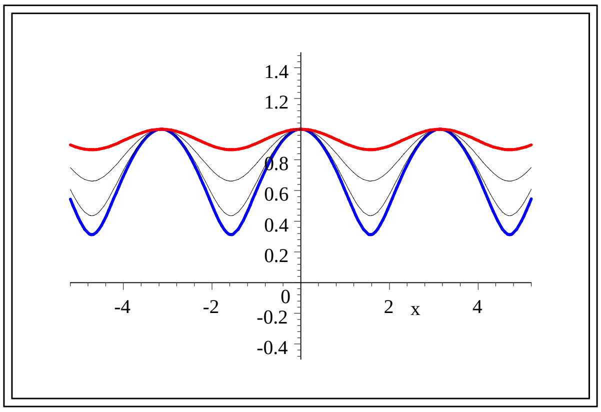
$$\sqrt{1-q^2\sin^2 x} \approx \sqrt{1-q^2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{\sqrt{1-q^2}}(x-\frac{\pi}{2})^2$$

Für q=0.9 ergibt das beispielsweise folgendes Bild:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{1 - .9^2 \sin^2 x} \qquad \text{rot} \\ & 1 - \frac{1}{2} .9^2 x^2 \quad \text{Näherung des Maximums blau} \\ & \sqrt{1 - .9^2} + \frac{1}{2} \frac{.9^2}{\sqrt{1 - .9^2}} (x - \frac{\pi}{2})^2 \quad \text{Minimum schwarz} \end{aligned}$$



Und für mehrere q-Werte: (q=0.5 rot und q=0.95 blau)



Verlaufsdiagramme!!!
Skript
Beispiele: $f_1(x)=e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $f_2(x) = e^{-x^2}$ $f_3(x) = \sin(\sin(x))$
$f_4(x) = \tan(\sin(x))$ und $f_5(x) = \sin(\tan(x))$.

Die (eine) zu f inverse Funktion / Nicht erneut behandelt!

- Vorbereitung von f

- Der Rechenausdruck der inversen Funktion
- Der Graph der inversen Funktion
- Die Hauptbeispiele (x^n und $\sqrt[n]{x}$) (exp und ln) (sin und asn) (tan und atn)....

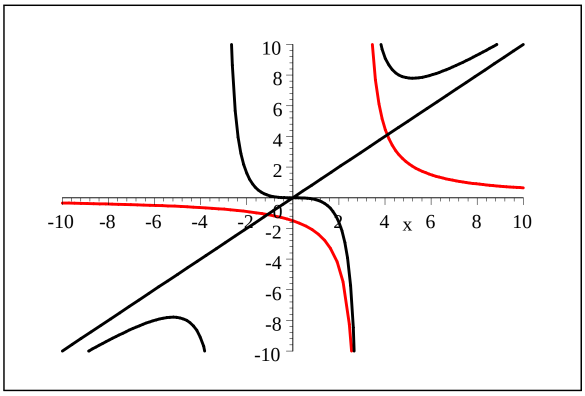
Einige nützliche Hilfsmittel !

- Umformung des Rechenausdrucks....
- Vereinfachende Näherung in einem Bereich (Approximation)
- Kleine Transformationen
- Verlaufsdiagramme

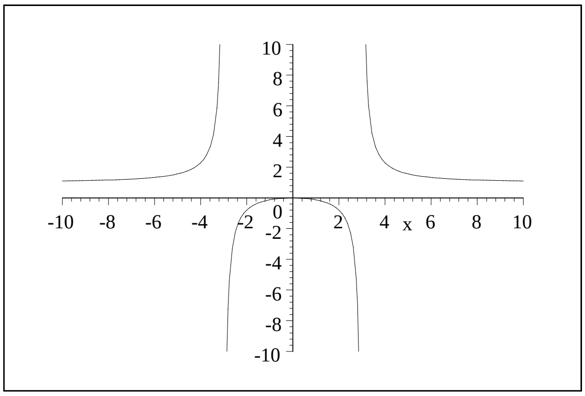
Kleine Transformationen:

Gewisse elementargeometrische Änderungen von Funktionsgraphen bzw. Teilmengen des $\mathbb{R}^2_K$ lassen sich problemlos iin den Rechenausdruck für die Funktionswerte übertragen und umgekehrt. Daher diskutiert man immer nur einen Normfall.

$\frac{x^3}{x^2-9}$



$\frac{x^2}{x^2-9}$



$\frac{3x+2}{(x^2-6x+9)}$