$$\underset{Wertbezeichnung}{g \circ f(x)} = \underset{\text{Berechnungsverfahren}}{g(f(x))}$$

Die Zusammensetzung von Funktionen. Konkretes Rechenbeispiel:

$$f(x) = ax(1-x)$$

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) = a^2 x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x)) \\ &= a^2 x - (a^3 + a^2) x^2 + 2a^3 x^3 - a^3 x^4 \end{aligned}$$

und $f \circ f \circ f$:

$$f(f(f(x))) = a^3 x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x))\,\big(1 - a^2 x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x))\big)$$

$$= a^3 x + 2a^4 x^3 - a^3 x^2 - a^5 x^2 - a^4 x^2 - a^4 x^4 + 2a^6 x^3 - 6a^6 x^4 + 2a^5 x^3 + 6a^6 x^5 - a^7 x^4 + 4a^7$$
$$x^5 - 6a^7 x^6 + 4a^7 x^7 - a^5 x^4 - 2a^6 x^6 - a^7 x^8 =$$

Ein Aufgabenbeispiel zur Potenzmengenerweiterung einer Abbildung:

f:U$\rightarrow W$ sei vorgegeben. $\mathcal{P}$(U) und $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ seien die Potenzmengen von U und W. (Behalten, was das ist? Definition?)

Dann gibt es dazu die weitere Abbildung $\underline{f}$=($\mathcal{P}$(U), X$\longmapsto$ $\underline{f}$(X), $\mathcal{P}(\mathcal{W})$) mit

$$\begin{aligned} \underline{f}(X) &= \{y|y = f(x) \quad \text{für ein} \quad x \in X\} \\ \{y|y &\in W, \quad \text{es gibt ein} \quad x \in X \quad \text{mit y=f(x)}\} \end{aligned}$$

Kleine Buchstaben: Elemente von U und W, große: Teilmengen

Daher gilt Wenn x$\in X$, dann ist y=f(x)$\in\underline{f}$(X) .

Zu zeigen: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Also zwei Richtungen (Denkfigur mit f statt $\underline{f}$):

$$\boxed{(1)\ f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \ \text{ und } (2)\ f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)}$$

Beweis (1): Sei y$\in f(A \cup B)$. D.h es gibt x$\in A \cup B$ mit f(x)=y

Dann liegt x entweder in A oder in B.

Sei O.B.d.A.etwa x$\in A$. Dann ist y=f(x)$\in f(A)$.

Also auch y$\in f(A) \cup f(B)$

Beweis (2): Sei y$\in f(A) \cup f(B)$. O.B.d.A. y$\in f(A)$.

D.h., es gibt x$\in A$ mit y=f(x)

Dann gilt auch x$\in A \cup B$

dann ist f(x)$\in f(A \cup B)$

Konstruktion von Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ein einfaches Beispiel:

(x,y)$\overset{F}{\longmapsto}$ $(1 - x - y^2$,x) also F=$\big(\mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto (1 - x - y^2, x\big), \mathbb{R}^2)$

F(1,1)=(-1,1) und F(5,1)=(-5,5)

F(F(5,1))=(1,-5)

Wir betrachten hier hinreichend glatte Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kein unanschaulichen Monster wie nachfolgendes D:

$$\text{D(x)=}\begin{cases} 1 & \text{x rational} \\ 0 & \text{x irrational} \end{cases}$$

Wie sieht GraphD geometrisch aus???

Grundausstattung von Funktionen:

h$_n(x) = x^n$ n$\in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{h}_n = (\mathbb{R}, x \longmapsto x^n, \mathbb{R})}$

Verhalten bei x=0, bei x=1 und x=-1

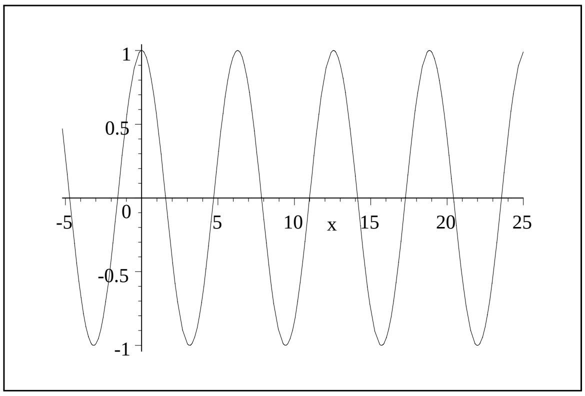
Symmetrie

Verhalten zwischen 0 und 1

Nullstellenstärke: (Teilweise Quantifizierung dieses Begriffs. Wie läßt sich eine solche Eigenschaft festlegen? $\frac{f(x)}{g(x)}$ Verhalten bei x gegen Null studieren.

Trigonometrische Funktionen sin und cos .

- cos ist gerade Funktion. Da besagt für die Werte: $\boxed{\text{cos(-x)=cos(x)}}$
- cos ist periodisch .mit Periode 2π $\boxed{\text{D.h cos(x)=cos(x+}2\pi\text{)}}$, wobei 2π kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft ist.
- Bild(cos)=[-1,1]
- $\cos(2\pi n) = 1$ und aqnalog:....



Die Additionstheoreme:

- Merke die für sin. Daraus folgt die für cos und die weiteren trigonometrischen Formeln.
- Pythagoras: cos(x+y)=.... für y=-x.
- cos(2x)=$\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ (für y=x)
- cos(2x)=$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
  - Strategievorgabe: Nach cosx bzw. sinx auflösen und z=$\frac{x}{2}$ setzen. Ergebnis kommentieren! (**Puh, mühsam)**
  - cos(z)=$2\cos^2\frac{z}{2} - 1$ / $\cos^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(\cos z + 1)$ / $\boxed{\cos\frac{z}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\cos z + 1}\right)}$ Tolle Formel!
  - cosz=1-2sin$^2\frac{z}{2}$ / $\boxed{\sin\frac{z}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 - \cos z})}$
  - Z.B.cos$15^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1}\right)$

Geht das analog für $\cos(\frac{z}{3})$??? Dazu benötigt man

$$\cos(2x+x) = \overbrace{(cos^2 x - \sin^2 x)}^{\cos(2x)} \cos x - (2\sin x \cos x)\sin x$$
$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \text{Also:}$$
$$\boxed{4\cos^3 x - 3\cos x - \cos(3x) = 0}$$

Benötigt Lösungsformel für kubische Gleichung!

Von den üblichen trigonometrischen Formeln ist nur die folgende (für sinx+siny) nicht sofort aus den Additionstheoremen herleitbar:

$\boxed{\text{sinx+siny} = \quad ?????}$ Hinweis: Offenbar gilt:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

Das in sinx+siny einsetzen und das Additionstheorem benutzen. Also:
sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB.
Das die Strategievorgabe. Ausführung:

$$\text{sinx+siny} = \sin\left(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}\right)$$

Bilanz:

$$\sin\left(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}\right) = \sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} + \cos\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}$$
$$\sin\left(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}\right) = \sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} - \cos\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}$$

$$sinx + siny = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Das ist die gesuchte Formel!!

Exponentialfunktion: Die grundlegenden Eigenschaften:

$\mathrm{E}_a(x) = a^x \qquad \text{x} \longmapsto x^x = e^{x\ln(x)}$

Wird zu vollem Abbildungstripel:

$$\boxed{\mathrm{E}_a = (\mathbb{R}, x \longmapsto a^x, \mathbb{R})}$$

Was ist bei a=e? $\mathrm{E}_e(x)$ hat Tangentensteigung 1 bei x=0. Die (eine) definierende Eigenschaft der Eulerschen Zahl!
