25. September Aufwärmübungen:

■ Was für Figuren werden durch die folgenden 3 Mengen (im Konfigurationsraum) festgelegt? $\vec{a} \in V_0^3$ sei ungleich Null.

$K = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in V_0^3,\ \vec{x}^2 = 9\}$	$L = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in V_0^3,\ (\vec{a} \cdot \vec{x}) = 9\}$	$M = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in V_0^3,\ (\vec{a} \cdot \vec{x}) = 9, \vec{x}^2 = 4\}$

Bitte Antwort und Konzept trennen! Beispielantwort:

a) K ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius 3 und Mittelpunkt im Ursprung.
b) L... (ist = enthält die Punkte....)

Test zum persönlichen Aufarbeitungserfolg / Vorbereitung komplexe Zahlen.

■ (5 Minuten) Wir betrachten die kubische Bestimmungsgleichung

$$x^3 + px + q = 0 \text{ in der Unbestimmten x.}$$

Für diese Gleichung soll wie folgt eine Lösungsformel bestimmt werden:

Machen Sie den Ansatz $x = \frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie das in die Gleichung für x ein. Bestimmen Sie α so, dass Sie die entstehende Gleichung in y lösen können. (Hinweis: Zwei (!) y-Potenzen fallen bei richtiger $\alpha - Wahl$ heraus.. Bis zur $\alpha - Bestimmung$ benötigt man 4 bis 5 Zeilen!). Bestimmen Sie hier nur die lösbare Gleichung für y). Start:

$$\square^3 + p\square + q = 0$$

■ (10 Minuten) Es sei $\vec{a} \in V_0^3$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$.
a) Bestimmen Sie (verbal) alle Lösungen der Gleichung $(\vec{a} \cdot \vec{x}) = 0$
b) Dasselbe für die Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ (verbal und Formel)
c) Jetzt sei $\vec{b} \in V_0^3$. Dann soll die (lineare!) Gleichung $\boxed{\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}}$ gelöst werden.

c1) Wieso ist die Gleichung höchstens dann lösbar, wenn $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$ gilt?

c2) Zeigen Sie mit Hilfe der bereits bewiesenen Formel

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

dass im lösbaren Fall $\vec{x}_S = \frac{1}{\vec{a}^2}(\vec{b} \times \vec{a})$ **eine** (spezielle) Lösung dieser Gleichung ist.

c3) Wieso hat man dann wegen b) bereits **alle** Lösungen?

Lösung kubische Gleichung:

$$\square^3 + p\square + q = 0$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha}{y} - y\right)^3 + p\left(\frac{\alpha}{y} - y\right) + q &= 0 \\
\left(-y^3 + 3\alpha y - 3\alpha^2 y^{-1} + \alpha^3 y^{-3}\right) + p\left(\frac{\alpha}{y} - y\right) + q &= 0 \\
-y^3 + y(3\alpha - p) + y^{-1}(-3\alpha^2 + p\alpha) + \alpha^3 y^{-3} + q &= 0 \\
-y^3 + \underbrace{(3\alpha - p)}\,y + \alpha(-\underbrace{3\alpha + p})y^{-1} + \alpha^3 y^{-3} + q &= 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\alpha = \frac{p}{3}}$ Damit liegt α fest.

$$\begin{aligned} -y^3 + \alpha^3 y^{-3} + q &= 0 \qquad \text{!!!! Lösbar!!!} \\ y^6 - qy^3 - \alpha^3 &= 0 \qquad \text{Bis hierher war verlangt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y^3 + \alpha^3 y^{-3} + q &= 0 \qquad \text{!!!! Lösbar!!!} \\ y^6 - qy^3 - \alpha^3 &= 0 \\ (y_{12})^3 &= \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} \pm r \\ y_{12} &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm r} \qquad \text{mit r=}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Jetzt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{y_{12}}\right)^3 &= \frac{p^3/3^3}{\frac{q}{2} \pm r} = \frac{p^3}{3^3} \frac{\frac{q}{2} \mp r}{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - r^2} = \frac{p^3}{3^3} \frac{\frac{q}{2} \mp r}{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} \\ &= -\frac{q}{2} \pm r \qquad \boxed{\frac{\alpha}{y_{12}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm r}} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{y} - y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm r} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm r} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm r'} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp r} \qquad \text{Nur eine Lösung} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm r} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp r} \qquad \text{oder ausgeschrieben} \\ & \boxed{\text{y=+}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \end{aligned}$$

Die gesuchte Formel für eine Lösung der Gleichung!

Das Beispiel zur Einführung der komplexen Zahlen:

(6.3.3) Jetzt zum zweiten Einstieg. Zunächst begegnet man den Wurzeln aus negativen Zahlen beim formalen Umgang mit der p-q-Formel für quadratische Gleichungen: Dort treten diese *unmöglichen Wurzeln* in der Endform auf, man kommt aber rechnerisch nicht weiter. Für die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist das etwas anders. Für sie kann man auch eine Lösungsformel angeben. Mit geeigneten Hilfsgrößen sieht diese Formel wie folgt aus:

$$\boxed{\text{x}^3\text{+px+q=0} \quad \text{wird gelöst durch} \quad x = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + r} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - r} \quad \text{mit } r = \sqrt[2]{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}}.$$

- Wendet man die gefundene Formel beispielsweise auf die Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$ an,
  - so ergibt sich der Ausdruck $\boxed{x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}}$ mit $i = \sqrt{-1}$.
  - Aber hier kann man weiterrechnen:
  - $\boxed{\text{Was bedeutet } \sqrt[3]{a}?}$ Wie in (1.1.18) gesagt, bezeichnet das eine Lösung der Gleichung $x^3 = a$. D.h. $\sqrt[3]{2 + 11i}$ sollte für eine Lösung von $z^3 = 2 + 11i$ stehen. Eine Lösung dieser Gleichung läßt sich nun aber raten, nämlich z=2+i.

- Man verifiziert mit $i^2 = -1$ und $i^3 = i^2 \cdot i = -i$:

$$(2+i)^3 = 8 + 3 \cdot 4i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i.$$

- Also gilt $\boxed{\sqrt[3]{2+11i} = 2 + i\ .}$ (Links die Bezeichnung einer Lösung, rechts die tatsächliche Berechnungsformel.) Entsprechend findet man $\boxed{\sqrt[3]{2-11i} = 2 - i}$ als Lösung von $z^3 = 2 - 11i$.
- Zusammengenommen erhält man $\boxed{\text{x=(2+i)+(2-i)=4.}}$
- **Und 4 ist tatsächlich reelle Lösung der Ausgangsgleichung** $x^3 - 15x - 4 = 0$, was man sofort nachrechnet. Wie behauptet ist das *unmögliche* $i = \sqrt{-1}$ aus dem Endresultat herausgefallen.

Inhaltsverzeichnis

★ Verstanden zu merkende Formeln:

★ 6.3.1c Die Multiplikationsformel Komponentenform

(Real × Real - Im × Im)+i(Real × Im +Im × Rea)l....

★ 6.3.3a Die beiden Darstellungen und Eulersche Formel

$$z = u + iv = re^{i\alpha} \qquad \mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Rechnen mit Potenzregeln! Umrechnung und wann welche Darstellung anwenden?

★ Komplexe Konjugation, Beseitigung von i im Nenner:

$$\overline{z} = \overline{u + iv} = u - iv \qquad \overline{\mathrm{r}e^{i\alpha}} = re^{-i\alpha}$$

★ "Rechnen wie mit reelen Zahlen"

★ Schluss von der Summe auf den Summanden / Was folgt aus $\mathrm{r}e^{i\alpha} = se^{i\beta}$??

---

26. September

Aufwärmübungen:

■ Welche Rechenregeln und Rechenschemata sollte man im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen gut beherschen? Wie rechnet man mit komplexen Zahlen?

■ Zugehörige **Konsolidierungsaufgaben** zur Multiplikation.und den übrigen einfachen Rechenoperationen...: ("schnell, effizient, richtig

$z_1 = 1 - 3i$ $\quad z_2 = -2 + 3i$ Berechne: , , ,

$$\begin{array}{lll}
z_1 + iz_z & & \\
z_1 \cdot z_2 & & \\
\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-3i}{-2+3i} & & = \frac{(-1-3i)(+2-3i)}{13} = \\
(z_1 + z_2)^2 & & (-1+0i)^2 = 1 \\
\frac{1}{\frac{1}{z_1+z_2} - \frac{1}{z_1-z_2}} = \frac{z_1^2 - z_2^2}{(z_1-z_2)-(z_1+z_2)} & & \frac{z_1^2-z_2^2}{-2z_2} = \ldots \\
(i + z_1)^2 & & \\
\sqrt{z_1} & & \\
\frac{1}{i+\frac{1}{i+z_2}} & & \\
\sum_{n=0}^{10} z_1^n = 1 + z_1 + \ldots + z_1^{10} & & \\
w^2 + z_1 w + z_2 = 0 & & w_{12} = ..
\end{array}$$

Die geometrische Reihe war nicht mehr bekannt.

Zur komplexen Konjugation:

Die Konstruktion $z \longmapsto \overline{z}$ erweist sich als vielfach nützlich. Vieles davon wir über Übungen vom Verstädnistyp eingeführt wie "Was ergibt $z\overline{z}$?" oder "Was besagt $z=\overline{z}$?"
$z\overline{z} = |z|^2$ Längenbestimmungsmethode (entspricht $(\vec{x} \cdot \vec{x}) = |\vec{x}|^2$ für Vektoren)
$z=\overline{z}$ z ist rein reell und $z=-\overline{z}$: Z ist rein imaginär

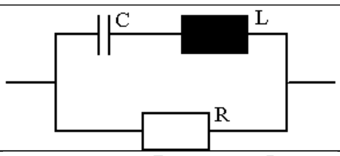
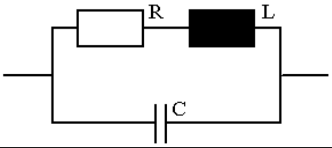
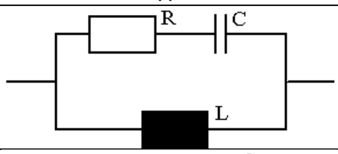
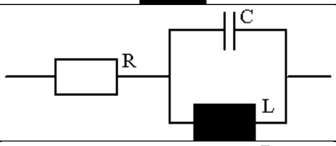
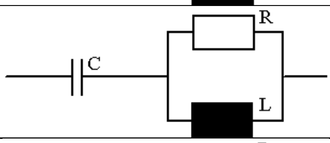
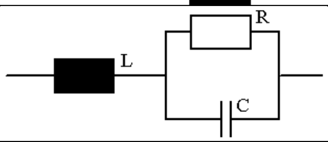
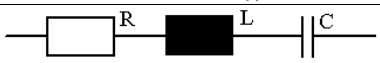
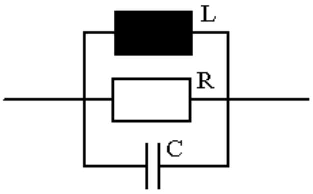
Die Interpretation der Gleichung $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ besprochen. Reihenfolge der Operationen. Bezug zur p-q-Formel: Dort sind komplexe Lösungen immer paarweise zueinander konjugiert. Wie beweist und verallgemeinert man das?

Jetzt müsste man die Rechenregeln für die komplexe Konjugation formulieren und beweisen. Vornehmlich $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Wurde nicht durchgeführt. Damit sollte man dan weiter argumentieren: Wird Bei der Integrationsmethode Partialbruchzerlegung benötigt.

Jetz noch eine kurze Liste von Schaltungen, die man aus drei Bauelementen aufbauen kann samt den zugehörigen komplexen Widerständen. Die Ergebnisse sind mit Hilfe einiger Hilfsgrößen allerdings in eine bessere Endform mit nur wenigen Parametern gebracht!

Komplexe Widerstände

$$\begin{aligned}
P^2 &= \frac{R^2 C}{L} \qquad P = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \text{einheitenfrei} \\
\omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\
x &= \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{\omega_0}
\end{aligned}$$

	$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R}\frac{(1-x^2)+ixP}{1-x^2}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = R\frac{\lvert 1-x^2\rvert}{\sqrt{(1-x^2)^2+x^2P^2}}$
	$\frac{1}{Z} = \frac{P}{R}\frac{P+ix(P^2+x^2-1)}{P^2+x^2}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{P^2+x^2}{(1-x^2)^2+x^2P^2}}$
	$\frac{1}{Z} = \frac{P}{R}\frac{Px^3-i(1-x^2+x^2P^2)}{x(1+x^2P^2)}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = R\frac{x}{P}\sqrt{\frac{1+x^2P^2}{(1-x^2)^2+x^2P}}$
	$Z = \frac{R}{P}\left[\frac{P(1-x^2)+ix}{1-x^2}\right]$ $\square$	$\lvert Z\rvert = \frac{\sqrt{P^2(1-x^2)^2+x^2}}{\lvert 1-x^2\rvert}$
	$Z = \frac{R}{P}\frac{Px^3+i(P^2(x^2-1)-x^2)}{x(x^2+P^2)}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{P}\frac{\sqrt{P^2(x^2-1)^2+x^2}}{x\sqrt{x^2+P^2}}$
	$Z = R\frac{\left[(1-x^2)+x^2P\right]+ix\left[1-P(1-x^2)\right]}{1+x^2P^2}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{P^2(x^2-1)^2+x^2}{1+x^2P^2}}$
	$Z = \frac{R}{P}\frac{\left[Px+i(x^2-1)\right]}{x}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{Px}\sqrt{(1-x^2)^2+P^2x^2}$
	$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R}\frac{x+iP(x^2-1)}{x}$ $\square$	$\lvert Z\rvert = \lvert Z\rvert = R\frac{x}{\sqrt{x^2+P^2(x^2-1)^2}}$