21. September

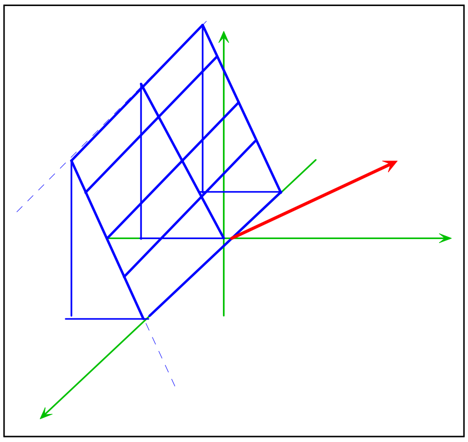
**Aufwärmübung:**

Welche elementaren und wichtigen geometrischen Größen und Eigenschaften können wir **noch nicht** vektoriell beschreiben, also insbesondere quantifizieren? (Nur mit Hilfe der Vektorraumaxiome, im $\mathbb{R}^3_K$ geht es über zusätzliche Strukturen)

> Die Länge eines Vektors, der Winkel zwischen zwei Vektoren, der Betrag eines Vektors, Einheitsvektor usw.

Lösen Sie die 1×3 Gleichung $\boxed{0x+2y+1z=0}$ (k-Wert?) Zeichnen Sie die Lösungsmenge im $\mathbb{R}^3_K$ und dazu den Vektor $\vec{a}^K = (0,2,1)$. Was fällt Ihnen auf? .

---



Interpretiere (0,1,2) aus der Gleichung als geometrischen Pfeil in $\mathbb{R}^3_K$. Die zugehörige Gleichung bestimmt die Lösungsmenge in Form einer Ebene in $\mathbb{R}^3_K$. Dann sollte der erste Pfeil die Ebene auch irgendwie geometrisch bestimmen, festlegen!

---

Kap. 6 (Weitere) Ergänzungen der Vektorrechnung

- 6.1 Das Skalarprodukt zweier Vektoren
- 6.2 Das Vektorprodukt zweier Vektoren
- 6.3 Komplexe Zahlen (Der Körper $\mathbb{C}$ der .....)

Wie gelangt man zu neuen Resultaten ? In diesem Kapitel werden nebenbei drei unterschiedliche Zugänge dargestellt.

---

Jetzt der in der Veranstaltung durchgegangene Text. Also das leicht ergänzte Kap.6.1 des Skriptes!
Bemühen Sie sich um die eingestreuten Übungsaufgaben!

---

# Die Komponentenform des Skalarproduktes

Herumspielen mit

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0. \quad \text{Besser} \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird in der Regel m=ℓ=1 haben: Eine Bedingung für drei Unbestimmte. Damit folgt k=2. D.h. als Lösungsmenge ist typischerweise eine Ebene zu erwarten.

Idee: .... (a,b,c) als geom. Pfeil interpretieren!

Hypothese:.....

Idee verfolgen führt zu:

- Zu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ soll die folgende Zahl (=Skalar) gebildet werden:

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Ist etwa $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (4, -1, 0)$, so ergibt sich die Zahl $1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 2$.

Also folgende Zuordnung betrachten:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &\mapsto \vec{a} \cdot \vec{b} \\ ((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) &\mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

**(6.1.6)** Mit Hilfe dieses Skalarproduktes schreibt sich unsere Ausgangsgleichung $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{x} = 0}$. Und die Vorüberlegungen legen folgende Vermutung (Hyothese) nahe, die sich tatsächlich bestätigen wird:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ ist gleichbedeutend damit, dass } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufeinander senkrecht stehen.}}$$

**(6.1.7)** Bitte halten Sie auseinander:

- Das $\boxed{\text{Skalarprodukt}}$ macht aus zwei Vektoren eine Zahl, ein **Skalar**.
- Die $\boxed{\text{Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl}}$ macht aus einem Skalar und einem Vektor erneut einen Vektor.

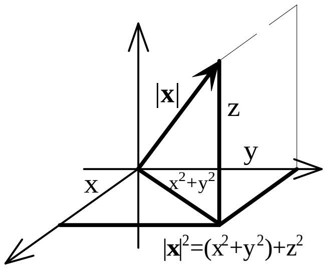
⇓ Als Nächstes probieren wir einfach aus, was man mit der neuen Zuordnung anfangen kann. Physiker nennen so etwas gerne *Herumspielen.*

**Der Betrag eines Vektors.**

$$(\vec{a}, \vec{a}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Zwei rechtwinklige Dreiecke.

$(\vec{x}, \vec{x}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{x} = x^2 + y^2 + z^2$



Die Skizzze zeigt sofort (über zweifache Anwendung des Pythagoras), dass dies -also $\vec{a}\cdot\vec{a}$ - gleich dem Quadrat der Länge des geometrischen Pfeiles $\vec{a}$ ist. Bezeichnen wir also die *Länge des geometrischen Pfeiles* $\vec{a}$ mit $|\vec{a}|$ (=Betrag von $\vec{a}$), dann erhalten wir:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Die Länge oder der Betrag von } \vec{a} \text{ wird gegeben durch:}\\ |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\end{array}}$$

**(6.1.9)** Anstelle von $\vec{a}\cdot\vec{a}$ schreibt man gerne auch $\vec{a}^2$. Damit folgt die nützliche Gleichung $\boxed{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}$. Links steht das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit sich selbst, rechts das Quadrat einer reellen Zahl. Rechnen Sie daher nie mit der unsinnigen Gleichung $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$.

**Gebrauchsregel**: $\quad \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \quad$ oder $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ .

**(6.1.10)** Nicht erklärt und sinnvoll sind Ausdrücke wie $\vec{a}^3$ oder $\vec{a}^4$, auch wenn man ihnen in schludrigen Darstellungen immer wieder begegnet. $\vec{a}$ ist Vektor, $\vec{a}^2$ aber eine Zahl. Sinnvolle (und gemeinte) Terme sind dann $\vec{a}^2\vec{a}$ und $(\vec{a}^2)^2$.
**(6.1.11)** In physikalischen Texten schreibt man anstelle von $|\vec{a}|$ vielfach einfach a (derselbe Buchstabe). Insbesondere für $|\vec{r}|$ oder $|\vec{x}|$ schreibt man r. Dabei steht r dann für *Radius.* (Nicht aber x für $|\vec{x}|$ )
**(6.1.12)**
Es seien P und Q zwei Punkte des $E^3$ und $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K \in \mathbb{R}_K^3$ zugehörige Koordinatenvektoren.

$$\left|\vec{x}_P^K - \vec{x}_Q^K\right|$$

Das ist der "*Abstand von P und Q*". *die Länge des "Abstandsvektors"*

■ $\boxed{\text{Konsolidierungsübung:}}$ $(\vec{x}_P\cdot\vec{x}_Q)$, ..$|\vec{x}_P|$, $|\vec{x}_Q|$, $|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|$ und ..$|\vec{x}_P| - |\vec{x}_Q|$

**Einheitsvektoren** **(6.1.13)** Mit Hilfe des Betrages kann man beliebige Vektoren ($\neq \vec{0}$) formelmäßig nach Richtung und Länge zerlegen. Dazu schreibt man einfach $\vec{a} = |\vec{a}|\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right)$. (Gezieltes Ausklammern, Kap. 1.2.3.)

T Einen Vektor vom Betrage 1 nennt man einen *Einheitsvektor.* Beispielsweise ist $\vec{e}_1$ ein solcher, ebenso wie $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$. Und allgemein ist $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ein Einheitsvektor in Richung von $\vec{a}$.

$$\boxed{\text{Für jedes } \vec{a}\neq\vec{0} \text{ ist } \tfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \tfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ Einheitsvektor in Richtung von } \vec{a}.}$$

☐ Bestimmen Sie die Einheitsvektoren für (1,1,0) und (1,1,1) und (1,2,3).
☐ Welche Interpretation hat $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}$

**(6.1.14)** In physikalischen Formeln trennt man auf diese Weise in Vektortermen gerne Richtung und Betrag voneinander.

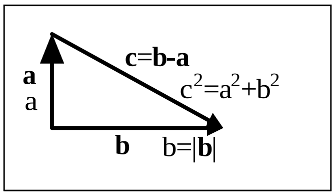
$$\boxed{\vec{F} = \frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}.}$$

☐ Jetzt können wir auch die Winkelhalbierende zwischen zwei gegebenen Vektoren bestimmen. Überlegen sie selbst, dass deren Richtung durch $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ festgelegt wird. Welcher Unterschied besteht zu $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$? Welcher zusätzliche Faktor ist anzubringen, damit man den Vektor der Winkelhalbierenden im Dreieck erhält?

### 0.0.1 Das Skalarprodukt senkrechter Vektoren.

⇕ **(6.1.15)** *Senkrechtstehen??*

$\vec{a}, \vec{b}$ geom. Pfeile
Dann steht $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ genau dann senkrecht,
wenn für das durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Dreieck der Pythagoras gilt
$|\vec{a}|^2 + |b|^2 = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2$




**(6.1.16)** Nach (6.1.9) können wir diese Gleichung wie folgt umschreiben:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}).$$

Mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ und distributiv:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Gibt

$$0 = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Wenn das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Dreieck den Pythagoras erfüllt (1. Gleichheitszeichen!), gilt obige Rechnung.
Und das heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist Null.
Ist umgekehrt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dann folgt:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + b^2 - 0 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}).$$

Und das ist gerade der Pythagoras.

T **(6.1.17)** Ist mindestens einer der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor, dann gilt auch noch $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. In diesem Fall entartet das Dreieck. Um unangenehme Fallunterscheidungen zu vermeiden, **sagt man (vereinbarungsgemäß), dass der Nullvektor auf jedem Vektor senkrecht steht.**

⇑ **(6.1.18)** Damit können wir folgendes zusammenfassende Resultat formulieren:

| |
|---|
| Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3_K$.<br>Dann gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen. |

!⇑ Unsere ursprüngliche Vermutung, die den Einstieg in die Überlegungen lieferte, ist damit bestätigt: **Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, dann besteht die Lösungsebene der linearen Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ aus der Ebene senkrecht zu $\vec{a}$.**

□ Es sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit gegebenem $\vec{a}^K = (a_1, a_2, a_3)$. Sie suchen zwei unabhängige Vektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen. (Zwei, nicht alle!). Eine mögliche Lösung können Sie sofort - ohne Rechnung - hinschreiben, $\vec{s}_1^K = (.,.,.)$ und $\vec{s}_2^K = (.,.,.)$. Nämlich?

**0.0.2**

Was ist bis hierher zu merken?

# Die Rechenregeln des Skalarproduktes

⇓ Erfüllt das Skalarprodukt tatsächlich die soeben benutzten Regeln? Diese Frage bleibt zu prüfen.
**(6.1.19)** Zunächst das **Kommutativgesetz**. Es ist offensichtlich erfüllt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Die Gleichheit in der Mitte ist für die Rechtfertigung entscheidend. Dort wird $a_1 b_1 = b_1 a_1$ benutzt. Das ist das Kommutativgesetz für die Zahlmultiplikation.

**(6.1.20)** Wie steht es mit den **Distributivgesetzen**? Wir möchten $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ nachweisen. Wir rechnen wie folgt, wobei wir naheliegend die 1-Komponente von $\vec{a}+\vec{b}$ mit $(a+b)_1$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b+c)_1 + a_2(b+c)_2 + a_3(b+c)_3\\ &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3\\ &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

**(6.1.21)** Dazu der nachfolgende Einschub zur *Tunnelmethode.*

...

**Vorsicht!** Man begegnet leider immer wieder einem erstaunlichen Drang zum umständlichen Rechnen, wohl weil man dabei ohne Anwendung der *abstrakten Formel* $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$ auskommt. Sagen wir $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{5},\frac{1}{7},-\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{10}+\frac{2}{21}-\frac{3}{14} = ....$ statt $...\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{35}(3,4,3)(7,5,15) = \frac{21+20-45}{210} = -\frac{2}{105}$

**(6.1.24)** Die Distributivgesetze und die zuletzt bewiesene Regel sind für das Rechnen mit Skalarprodukten ausgesprochen wichtig. Ihre Form ist analog zu der der Linearitätsregeln aus dem Matrixbereich, nur dass sie hier für beide Faktoren gelten. Man charakterisiert sie daher als *Bilinearität.* Zusammengefaßt erhält man folgenden Satz von **Rechenregeln für das Skalarprodukt:**

| | | |
|---|---|---|
| Kommutativität | $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ | für alle $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ |
| Bilinearität | $\vec{a}\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{y}$<br>$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x} = \vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}$<br>$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$ | für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ und $\alpha\in\mathbb{R}$. |

⇑ Damit sind alle Regeln bewiesen, die wir zur Ausführung der Pythagorasrechnung benötigt haben. Das in (6.1.18) angegebene Resultat ist bewiesen.
**(6.1.25)** Eine weiteres anstehendes Problem: Wie rechnet man üblicherweise mit dem Skalarprodukt, was sind die zu merkenden **Gebrauchsregeln**?
"

☐ Wieso sind die folgenden beiden Terme zulässig, kein Verstoß gegen die zweite Regel?

$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}{\vec{a}^2} \quad \text{und} \quad \frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}}{\vec{x}^2}.$$

Die folgenden Termumformungen dagegen sind grausame Regelverstöße:

$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}{\vec{a}^2} = \vec{x}^2 \qquad \frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}}{\vec{x}^2} = \vec{a}.$$

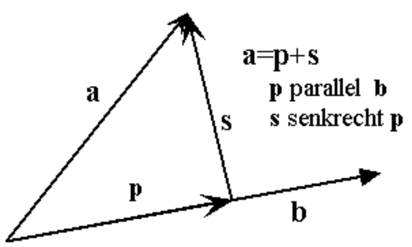
Wie steht es mit $\frac{\vec{x}^2}{|\vec{x}|} = |\vec{x}|$ ?

☐ Berechnen Sie $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$. (An das sinnvolle Ordnen denken!)

## 0.1 Die geometrische Form des Skalarproduktes.

**(6.1.27)** Wir kommen jetzt zu einem äußerst wichtigen Resultat, das uns eine geometrische Interpretation der Skalarproduktbildung liefern wird. Seien $\vec{a}^K$ und $\vec{b}^K$ zwei Vektoren ungleich Null aus $\mathbb{R}^3_K$. Wir bilden die Konfiguration der Skizze.

Zerlegung von $\vec{a}^K$ in eine zu $\vec{b}^K$ parallele und senkrechte Komponente: $\vec{a}^K = \vec{p}^K + \vec{s}^K$ $(\vec{p}^K\cdot\vec{s}^K) = 0$ und $\vec{p}^K||\vec{b}^K$.
$\vartheta$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Dann folgt aus der Skizze sofort $\left|\vec{p}^K\right| = \left|\vec{a}^K\right| \cos\vartheta$ und damit $\vec{p}^K = \left(\left|\vec{a}^K\right| \cos\vartheta\right) \frac{\vec{b}^K}{\left|\vec{b}^K\right|}$. Außerdem gilt nach (6.1.18), dass $\vec{b}^K \cdot \vec{s}^K = 0$ ist. Jetzt rechnen wir unter Ausnutzung der Bilinearität wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K &= \vec{b}^K(\vec{p}^K + \vec{s}^K) = \vec{b}^K\vec{p}^K + \vec{b}^K\vec{s}^K = \vec{b}^K\vec{p}^K = |\vec{b}^K| \cdot \left(\left(\left|\vec{a}^K\right| \cos\vartheta\right)\right) \\ &= \left|\vec{a}^K\right| \left|\vec{b}^K\right| \cos\vartheta.\end{aligned}$$

Es ist $\vec{a}^K$ Koordinatenvektor des geometrischen Pfeiles $\vec{a}$. Dann gilt $\left|\vec{a}^K\right| = |\vec{a}|$. Die Länge von $\vec{a}$ ist gleich der mit Hilfe des Skalarproduktes berechnete Zahl $\left|\vec{a}^K\right| = \sqrt{\vec{a}^K \cdot \vec{a}^K}$.
**(6.1.28)** Damit folgt insgesamt:

$$\boxed{\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\vartheta}$$

!! Das ist die versprochene geometrische Interpretation des Skalarproduktes. Die linke Seite wird koordinatenabhängig wie bisher bestimmt. **Die rechte Seite dagegen hat eine rein geometrische Bedeutung, da nur die Längen der beiden Pfeile und der Winkel zwischen ihnen vorkommen.**
**(6.1.29)** Bisher haben wir das Skalarprodukt nur für Tupel aus $\mathbb{R}^3$ bzw. für Koordinatenvektoren aus $\mathbb{R}^3_K$ definiert. Jetzt können wir die Definition auf geometrische Pfeile aus $V^3_0$ bzw. $V^3$ ausdehnen. Wir setzen einfach:

**Die geometrische Form des Skalarproduktes**
Für $\vec{a}, \vec{b}$ aus $V^3_0$ bzw. $V^3$ sei $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\vartheta.$

Damit kann man für eine Konfiguration zweier geometrischer Pfeile das Skalarprodukt ausrechnen. In vielen Beispielen - besonders der Physik - sind die Beträge und der Winkel bekannt und dann kann man diese Formel anwenden.
**(6.1.30)** Führt man zusätzlich zum Ursprung ein volles Koordinatensystem K ein, dann kann man das Skalarprodukt entweder geometrisch oder über die Komponenten ausrechnen. **Und beide Wege ergeben dieselbe Zahl:**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^K \cdot \vec{b}^K}.$$

Dies bedeutet, dass die oben formulierten Rechenregeln auch für die geometrische Form des Skalarproduktes gelten.
**(6.1.31)** Führt man ein anderes Koordinatensystem L ein, dann ändern sich die Komponenten der beteiligten Vektoren, nicht aber die geometrische Konfiguration. D.h. es gilt

$$\boxed{\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K = \vec{a}^L \cdot \vec{b}^L}.$$

☐ Konkretisieren Sie diesen Sachverhalt an einem einfachen Beispiel in der Ebene!

$\vec{a}^K = (1,2,3)$ $\quad \vec{b}^K = (0,\text{-}3,4)$ $\qquad$ Schreibe $\vec{b} = \vec{s} + \vec{p}$ $\quad$ wobei $\vec{p}||\vec{a}$
$\vec{p} = (1,2,3)\frac{6}{14}$ $\quad \vec{s} = \vec{b} - \vec{p}$...

---

Einschub

Das letzte Resultat ist von großem Wert für die Anwendungen. Denn damit ist gesichert, dass man mit Hilfe des Skalarproduktes **beobachterunabhängig** geometrische und physikalische Phänomene beschreiben kann.
Beweise:

> **Der Schwerpunkt S (einer Konfiguration von Massepunkten) besitzt die folgende Eigenschaft**: Legt man eine Ebene E durch den Schwerpunkt S und bezeichnet der Index i alle die Massepunkte, die auf einer Seite der Ebene liegen mit Masse $m_i$ und mit kürzestem Abstand $a_i$ und bezeichnet j alle Punkte auf der anderen Seite der Ebene, mit Masse $m_j$ und jeweiligem Abstand $a_j$ von der Ebene, dann gilt das folgende verallgemeinerte Hebelgesetz:
>
> $$\Sigma m_i a_i = \Sigma m_j a_j$$

Mobileinterpretation??

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \sum_k m_k \vec{x}_k \qquad \text{Gültig. Ursprung in S, Schwerpunktdef.}\\
\vec{0} &= \sum_i m_i \vec{x}_i + \sum_j m_j \vec{x}_j\\
\vec{0} &= \sum_i m_i(\vec{p}_i + \vec{s}_i) + \sum_j m_j(\vec{p}_j + \vec{s}_j)\\
0 &= \vec{N} \cdot \left( \sum_i m_i(\vec{p}_i + \vec{s}_i) + \sum_j m_j(\vec{p}_j + \vec{s}_j) \right)\\
0 &= \sum_i m a_i + \sum_j m_j(-1)a_j
\end{aligned}$$

---

**(6.1.32)** *Arbeit* ist eine typische Größe die durch ein Skalarprodukt zweier Vektoren beschrieben wird. Stellen Sie sich vor, Sie müßten einen Stein einen Hang emporschleppen. Die Arbeit ist ein Maß für die Anstrengung, die Sie dabei zu erbringen haben.

$A = (\vec{F} \cdot \Delta\vec{x})$

| | |
|---|---|
| $\vec{F}$ | (konstante) Kraft |
| $\Delta\vec{x}$ | Vektor, um den der Massepunkt im Kraftfeld verschoben wird |
| A | Dabei geleistete Arbeit! |

☐ Verschiebung senkrecht zu Kraft? In Richtung der Kraft (Vorzeicheninterpretation?)

---

**Beobachterabhängigkeit (des Resultates)** würde folgendes bedeuten: Oben am Hangende steht der Beobachter, der die Koordinatenachsen festlegt. Mag er Sie persönlich, dreht er die Achsen so, dass der Arbeitswert klein wird, Sie ohne Mühe hinaufsteigen können. Mag er Sie nicht, dreht er die Achsen so, dass Sie kaum noch vorankommen.
Sieht man von Beschreibungsgrößen wie dem Koordinatenvektor ab, so sind physikalische Größen erfahrungsgemäß nicht beobachterabhängig, sollten es nicht sein. Zumindest sollte man die Frage der eventuellen Beobachterabhängigkeit jeweils sorgfältig analysieren. So haben wir in (4.2.7) gesehen, dass der durch den beobachterabhängigen Schwerpunktsvektor festgelegte Punkt aus $E^3$ beobachterunabhängig war. Oder: "freie Vektoren " hängen nicht von der Wahl des Koordinatenursprunges ab, gebundene tun es in bestimmter Weise.

☐ Wie steht es mit der Geschwindigkeit?

☐ Nicht selten wird das Skalarprodukt durch falsche Analogisierung wie folgt gebildet:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3).$$

Zeigen Sie über einfache Konkretisierungen, dass der entstehende Vektor (=geometrische Pfeil) beobachterabhängig ist, was diese Bildung als an und für sich nahe liegendes Vektorprodukt disqualifiziert. ( Stellen Sie sich den Beobachter hier einmal als Windgott vor!)#

**(6.1.33)** Die Argumentation aus (6.1.27) liefert noch ein weiteres Resultat. Wir haben dort den Vektor $\vec{b}$ in eine zu $\vec{a}$ parallele und eine senkrechte Komponente zerlegt. Das ergibt eine der vorrangig zu merkenden Formeln, die Zerlegungsformel:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{b} = \vec{p} + \vec{s}. \\ \vec{p} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{a}^2}\vec{a} \quad \vec{s} = \vec{b} - \vec{p}. \end{array}}$$

Diese Formeln liefern einen zweiten Weg für $\vec{b}$, der durch die Rivhtung von $\vec{a}$ festgelegt ist.

□ **(6.1.34)** Es sei K ein kartesisches Koordinatensystem und $\vec{x} \in V^3$ bzw. $V_0^3$. Beweisen und diskutieren Sie die folgenden Formeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3 \\ Also \quad x_1 = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1), \quad x_2 = (\vec{x}\cdot\vec{e}_2) \quad \text{und} \quad x_3 = (\vec{x}\cdot\vec{e}_3), \end{array}}$$

### 0.1.1 Winkel und Projektion

**(6.1.35)** Eingangs wurde gesagt, dass wir noch nicht in der Lage seien, vektoriell Winkel zu bestimmen. Das ist jetzt anders. Die geometrische Form des Skalarproduktes löst das Problem sofort, man muss die Formel nur nach $\cos\vartheta$ auflösen:

| | |
|---|---|
| $\Rightarrow$ | Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren $\neq \vec{0}$. |
| $\Rightarrow$ | $\vartheta$ sei der Winkel zwischen den beiden Vektoren mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$. |
| !!! | Dann gilt $cos\vartheta = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$. |

Die zur Winkelbestimmung benötigten Skalarprodukte können fallspezifisch über die Komponentenform oder die geometrische Form bestimmt werden.

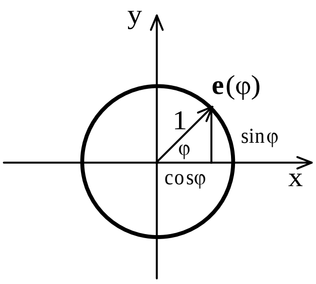
Beispiel: $\vec{a}^K = (1,1,1)$ und $\vec{b}^K = (2,-3,2)$. Es folgt (ohne jede schriftliche Zusatzrechnung, sofort!) $\boxed{\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{17}}}$.

Wir raten dagegen dringend von Rechnungen und Darstellungen der folgenden Art ab, die die Anwendung der Formel zu einem Schreibexerzitium zu machen, das etwa so aussieht:

$$cos\vartheta = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^1 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{1\cdot 2 - 1\cdot 3 + 1\cdot 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = .....$$

Es gibt keine sinnvolle Begründung für diese Art sinnloser Arbeitsbeschaffung, der man leider allzu häufig begegnet.

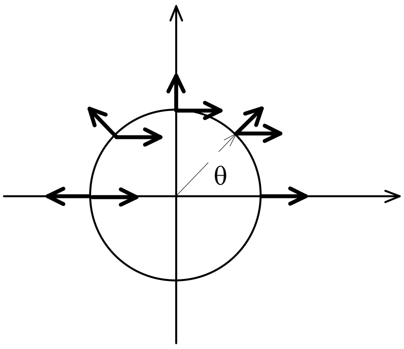
**(6.1.36)** Wir betrachten jetzt eine feste Ebene mit Koordinatensystem K. Der Raum der zugehörigen Koordinatenvektoren ist $\mathbb{R}^2_K$. Wir legen einen Kreis mit Radius 1 um den Ursprung. Jeder Punkt auf dem Kreis bestimmt dann einen Einheitsvektor $\vec{e}(\varphi)$, wobei $\varphi$ der Winkel zwischen der 1-Richtung und dem Vektor sein soll. Aus der Skizze liest man sofort die angegebene Darstellung des Einheitsvektors ab. (Vgl. (4.5.20))

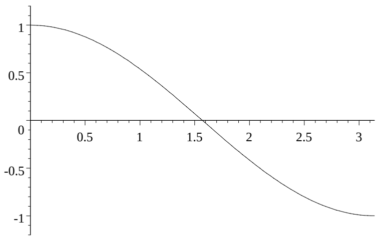



$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{e}(\varphi) = \cos(\varphi)\vec{e}_1 + \sin(\varphi)\vec{e}_2 \\ \vec{e}^K(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \\ \text{Orts- und Koordinatenvektoren} \\ \text{Der Punkte des Einheitskreises} \end{array}}$$

Skalarproduktbildung gibt $\cos(\varphi) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}(\varphi)$. Jetzt sieht man unmittelbar, wie sich der Wert des Skalarproduktes (bei festen Vektorlängen) mit dem Winkel ändert: Man startet mit dem Wert 1 beim Winkel Null.

Bei spitzen Winkeln erhält man einen positiven Wert unter 1. Senkrecht gehört zum Wert Null, ein stumpfer Winkel liefert einen negativen Wert und Antiparallelität gibt schließlich den Wert -1.




**(6.1.37)** *Zusammenfassung: Das Skalarprodukt ist eine Bildung, die aus jeweils zwei Vektoren gleichen Typs eine Zahl, ein Skalar macht. Die Auswertung kann entweder über die* ***Komponentenform*** *oder über die* ***geometrische Form*** *erfolgen. Die Gleichheit des Resultates wird durch (6.1.31) sichergestellt.*
*Die Rechenregeln für den Umgang mit dem Skalarprodukt sind in (6.1.23) und (6.1.25) zusammengatellt. Man sollte sie zur Termumformung verwenden, aber auf Unterschiede zum Zahlrechnen achten.*
*Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich die geometrischen Begriffe Länge, Abstand und Winkel in das vektorielle Beschreibungsschema einfügen. Insbesondere stehen zwei Vektoren genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.*
*Eine nützliche Konstruktion ist die Zerlegung eines Vektors in eine zu einem zweiten Vektor senkrechte und parallele Komponente. Die Formeln werden in (6.1.33) gegeben.*
*Nachfolgend geben wir noch einige Anwendungsbeispiele, die aufzeigen, wie weit das Spektrum an Problemen ist, das durch einen Formalismus wie den des Skalarprodutes überdeckt wird. Die erste Anwendung besteht in der Abrundung unserer Einstiegsidee in das Thema. Die zweite ist vom Routinetyp, einer Winkelbestimmung. In der dritten Anwendung wird ein Winkel über eine zusätzliche Idee, also nicht routinemäßig bestimmt. Und bei der vierten geht es um eine Verallgemeinerung des Formalismus.*

$\boxed{\text{Zu merkende Sachverhalte und Formeln?}}$

## 0.2 Anwendungsbeispiele

**(6.1.38)** Kehren wir zu unserem Einstiegsproblem, der geometrischen Interpretation der $1{\times}3$-Gleichung zurück. Die homogene Gleichung schreibt sich jetzt $(\vec{a}\cdot\vec{x})=0$ mit $\vec{a}\neq\vec{0}$. Lösungsmenge ist die geometrisch eindeutig festgelegte Ebene aller auf $\vec{a}$ senkrechten Vektoren. Übergang zur inhomogenen Gleichung $(\vec{a}{\cdot}\vec{x})=b$ bedeutet nach den allgemeinen Resultaten in (5.3.24) **Parallelverschiebung der Lösungsmenge**. Wie weit ist parallel zu verschieben? Sei $\vec{X}$ irgendeine Lösung unserer Gleichung (Lösungsrolle, also gilt $\vec{a}{\cdot}\vec{X}=b$). Wir zerlegen $\vec{X}$ in eine zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und finden $\vec{X}=\frac{(\vec{X}\cdot\vec{a})}{\vec{a}^2}\vec{a}+\vec{s}=\frac{b}{\vec{a}^2}\vec{a}+\vec{s}$ . Das ergibt offensichtlich für jedes $\vec{s}$ aus der zu $\vec{a}$ senkrechten Ebene eine Lösung. Wir berechnen mit Bilinearität das Quadrat der Länge von $\vec{X}$ und finden wegen $\vec{a}\cdot\vec{s}=0$ sofort: $\vec{X}^2=\frac{b^2}{\vec{a}^2}+\vec{s}^2$. Das heißt, der kürzeste Abstand gehört zu $\vec{s}=\vec{0}$ und der Vektor des kürzesten Abstandes ist einfach $\frac{b^2}{\vec{a}^2}\vec{a}$. **Um diesen Vektor ist die Lösungsebene parallel zu verschieben.**
**(6.1.40)** Die Ebenengleichung läßt sich ebenso wie die Geradengleichung in eine Reihe **unterschiedlicher Formen** bringen, aus denen man jeweils bestimmte geometrische Konfigurationsgrößen ablesen kann. Wir starten mit der allgemeinen Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ und gehen durch Gleichungsumformung zu drei speziellen Formen über. Dabei nutzen wir die Bilinearität (6.1.24) des Skalarproduktes.

| Umformung | Gleichung | Geom. Interpretation |
|---|---|---|
| Division durch $\lvert\vec{a}\rvert$ mit $\vec{n}=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ <br> $\vec{n}$ Einheitsvektor | $\vec{n}\cdot x=\alpha$ <br> $\vec{D}=\alpha\vec{n}$ | $\alpha=\frac{b}{\lvert\vec{a}\rvert}$kürzester Abstand der Ebene vom Ursprung |
| Division durch b mit $\vec{A}=\frac{\vec{a}}{b}$ | $\vec{A}\cdot\vec{x}=1$ | $\vec{A}=(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ <br> a,b,c Achsenabschnitte |
| Division durch $a_3$ mit $\vec{N}=\frac{1}{a_3}\vec{a}$ | $\vec{N}\cdot\vec{x}=\frac{b}{a_3}$ | z=$\frac{b}{a_3}$-$\frac{a_1}{a_3}x-\frac{a_2}{a_3}y$ <br> Höhenfunktion |

.

Beachten Sie: Die vorletzte Gleichung schreibt sich $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Den Schnitt mit der z-Achse erhält man durch Nullsetzen von x und y. Es bleibt $\frac{z_S}{c}=1$ oder $z_s=c$.D.h. c gibt wie behauptet den zugehörigen Achsenabschnitt. Und die letzte erlaubt den Übergang zu einer Parameterdarstellung der Ebene

$$(x,y)\mapsto(x,y,z(x,y))=(x,y,\frac{b}{a_3}-\frac{a_1}{a_3}x-\frac{a_2}{a_3}y).$$

### 0.2.1

## Der Winkel zwischen zwei Geraden im Raum

**(6.1.41)** Ein anderer Problemkreis: **Bestimme den Winkel zwischen zwei (eventuell windschiefen) Geraden**. Ist das ein sinnvolles Problem? Ja, startet man mit zwei sich schneidenden und nicht parallelen Geraden. Verschiebt eine Gerade in die Richtung, **senkrecht zu beiden Geraden**, bleibt der "Winkel" offensichtlich sinnvoll und unverändert. Stellen Sie sich dazu vor, dass Sie in Richtung der Verschiebungsrichtung auf die Konfiguration blicken! Man kann verschieben, bis sich die beiden Geraden treffen.

☐ Ausnahme: Die beiden Geraden sind parallel. Was geht schief? Macht das etwas?

**(6.1.42)** Die eigentliche Ausführung der Winkelbestimmung ist dann unproblematisch. Seien g und h die Geraden und $\vec{x}_g(a)=\vec{x}_0+a\vec{d}$ sowie $\vec{x}_h(b)=y_0+b\vec{f}$ zugehörige Parametrisierungen. **Der Winkel zwischen den Geraden ist gleich dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren** $\vec{d}$ und $\vec{f}$. Also $\cos(\gamma)=\frac{(\vec{d}\cdot\vec{f})}{\lvert\vec{d}\rvert\lvert\vec{f}\rvert}$.

Was ist, wenn man statt $\vec{f}$ den entgegengesetzten Vektor $-\vec{f}$ genommen hätte? Dann hätte man den negativen cos-Wert erhalten und damit den supplementären Winkel $\pi-\gamma$.
Hüten Sie sich davor, anstelle der Richtungsvektoren die Aufpunktsvektoren oder gar die Ortsvektoren in die Winkelformel einzusetzen. Das ergibt ziemlichen Unsinn. (Ursprungsabhängiger Winkel)

### 0.2.2 Weitere Anwendungen

**(6.1.43) Wie erhält man die Gerade, die senkrecht auf zwei gegebenen unabhängigen Vektoren steht?** (Wurde in (6.1.41) benötigt.) Die Antwort ist mit den Resultaten dieses Kapitels nicht schwer. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die beiden gegebenen Vektoren. $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ bestimmt alle Vektoren senkrecht zu $\vec{a}$. Will man zusätzlich senkrecht zu $\vec{b}$ erreichen, so muss man noch $\vec{b}\cdot\vec{x}=0$ fordern. Dh. die gesuchte Gerade folgt als Lösung des folgenden 2×3-Systems $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{x}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{x}=0}$ . Ist hier $\ell$=2, so folgt $k=3-2=1$. Die Lösungsmenge ist eine Gerade mit den gewünschten Eigenschaften.

**(6.1.44) Wie groß ist der** *Tetraederwinkel?* Das Tetraeder ist ein regelmäßiger symmetrischer Körper mit vier Eckpunkten. Wir legen den Ursprung in den Mittelpunkt des Körpers. Die Ortsvektoren der vier Eckpunkte sollen mit $\vec{x}_1,...,\vec{x}_4$ bezeichnet werden. Aus Symmetriegründen haben sie alle 4 dieselbe Länge a=$\lvert\vec{x}_1\rvert=\lvert\vec{x}_2\rvert=\lvert\vec{x}_3\rvert=\lvert\vec{x}_4\rvert$. Der Winkel zwischen zwei verschiedenen dieser Ortsvektoren ist der Tetraederwinkel $\tau$. Auch er hat aus Symmetriegründen stets denselben Wert. Der Mittelpunkt stimmt mit dem Schwerpunkt überein (bei gleichen Massen). Dann gilt für unsere Ursprungswahl $\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4=\vec{0}$. Oder $\vec{x}_1=-\vec{x}_2-\vec{x}_3-\vec{x}_4$. Von beiden Seiten dieser Gleichung bilden wir das Quadrat (im Sinne des Skalarproduktes). Beachten Sie, dass infolge der Bilinearität solche Zweierprodukte nach der üblichen Regel *jeder mit jedem* auszumultiplizieren sind. Es folgt:

$$\vec{x}_1^2=(\vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4)^2=\vec{x}_2^2+\vec{x}_3^2+\vec{x}_4^2+2\,(\vec{x}_2\cdot\vec{x}_3)+2\vec{x}_2\vec{x}_4+2\vec{x}_3\vec{x}_4.$$

Ausrechnen der Skalarprodukte mit der geometrischen Form und Einsetzen der aus der Symmetrie folgenden Relationen gibt $a^2=3a^2+6a^2\cos\tau$. Erwartungsgemäß fällt a heraus, denn dieser Wert bestimmt ja die

Tetraedergröße. Man findet $\cos\tau = -\frac{1}{3}$. Das negative Vorzeichen zeigt, dass es sich um einen stumpfen Winkel handelt. Sein numerischer Wert liegt etwas unter $110^0$.
Beachten Sie: Wir haben nur die Rechenregeln für das Skalarprodukt und die Symmetrieeigenschaften des Körpers verwandt. Die Koordinatenvektoren $\vec{x}_i^K$ selbst haben wir nicht bestimmt.

□ Wie wird man die (Plural!) entsprechenden Winkel beim Würfel bestimmen?

□ Zeigen sie, dass in einer Raute (Viereck mit gleichlangen Seiten) die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

### 0.2.3 Verallgemeinerung des Skalarproduktes

**(6.1.45)** Bisher haben wir das Skalarprodukt nur für höchstens dreidimensionale Vektoren eingeführt. Läßt es sich auch auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern? Die Verallgemeinerung der Komponentenform ist problemlos möglich. Man hat nur n statt 3 Summanden $a_i b_i$ zu nehmen. Aus der Komponentenform folgen dann aber auch sofort alle Rechenregeln. Diese gelten daher weiter. Wie steht es mit der geometrischen Form? Hat man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgewählt, so kann man die daraus erzeugte Ebene bilden und sich vorstellen, das sei ein Konfigurationsraum. Wir erwarten, dass darin die übliche ebene Geometrie gilt. Entsprechend übernehmen wir alle geometrischen Formeln für Betrag und Winkel. Damit können wir etwa den Winkel zwischen zwei Vektoren im Vierdimensionalen bestimmen. Sagen wir $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$und $\vec{b} = (1, 0, -1, 0)$.Es folgt $\cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{30}\sqrt{2}}$.

□ **(6.1.46)** Eine vertrauensbildende Maßnahme für die soeben gegebene Überlegung: Betrachten Sie das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Dreieck. Rechnen Sie die drei Seitenlängen dieses Dreiecks (im Vierdimensionalen) aus. Dann zeichnen sie ein Dreieck mit den gefundenen Seitenlängen. Rechnen Sie die drei Winkel des Dreiecks im Vierdimensionalen aus und vergleichen Sie mit den gezeichneten Winkeln. Vorsicht, keinen supplementären Winkel nehmen.

## 0.3 Termbau und Formeln

**(6.1.47)** Das Skalarprodukt hat große Bedeutung für den Term- und Formelbau. Mit seiner Hilfe kann man Skalarfelder mit **geometrischer**, also koordinatenwahlunabhängiger Bedeutung konstruieren. Man kann also Ausdrücke konstruieren, in die man Vektoren eingibt und bei denen Zahlen herauskommen. Die einfachsten und wichtigsten Beispiele sind

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}^2 \qquad \vec{x} \mapsto |\vec{x}| \qquad \vec{x} \mapsto (\vec{a} \cdot \vec{x}) \quad \vec{a} \text{ äußerer Parameter} \quad .$$

Diesen Konstruktionen begegnet man in physikalischen und geometrischen Formeln vielfach. Mit Hilfe solcher Bausteine lassen sich problemlos Terme vom Feldtyp bilden, bei denen ein Vektor eingeben wird und eine Zahl oder ein anderer Vektor herauskommt. Einige Beispiele derartiger Termkonstruktionen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(\vec{a}\vec{x})\,\vec{x}^2\vec{x}$ | $\frac{\vec{a}}{1+\alpha\vec{x}^2}$ | $\vec{A}^2\vec{x}^2 - (\vec{A}\vec{x})^2$ | $\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}^2-\vec{x}^2}\,\vec{x}$ |

Im Analysisteil gehen wir auf die Geometrie der Skalarfelder genauer ein.
**(6.1.48)** Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei geometrische Pfeile. Wie groß ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms?

Sei $\vartheta$ wieder der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann ist der Flächeninhalt gegeben durch $F = |\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right| \sin\vartheta$. Hätte man anstelle des Sinus den Cosinus, so ließe sich das als Skalarprodukt schreiben. Über die Formel $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ kann man diese beiden Größen immer ineinander umwandeln. Also

$$F^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \sin^2\vartheta = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 (1 - \cos^2\vartheta) = \vec{a}^2 b^2 - (|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\vartheta)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

Damit haben wir ein Beispiel einer einfachen, aber nützlichen Formel mit Skalarprodukten:

$$\boxed{F^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}.$$

Jetzt legen wir ein Koordinatensystem so, dass die beiden Vektoren in der 1-2-Ebene liegen. Also $\vec{a}^K = (a_x, a_y, 0)$ und $\vec{b}^K = (b_x, b_y, 0)$. Dann folgt in Koordinaten

$$F^2 = (a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2) - (a_x b_x + a_y b_y)^2 = a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y = (a_x b_y - a_y b_x)^2,$$

wie man sofort nachrechnet. Wir werden dieser Formel im Zusammenhang mit dem Vektorprodukt erneut begegnen.
**(6.1.49) Bestimme die Mittelsenkrechte zur Seite $\vec a$ in dem von $\vec a$ und $\vec b$ erzeugten Dreieck.** Diese Aufgabe lösen wir mit Hilfe unserer Projektionsformel. Dabei nehmen wir an, dass $\vec b$ nicht dieselbe Richtung wir $\vec a$ hat. Die Idee: Zerlege $\vec b$ in eine zu $\vec a$ parallele und eine senkrechte Komponente. Letztere gibt uns die gesuchte Richtung der Mittelsenkrechten. Nach (6.1.33) folgt die senkrechte Komponente zu $\vec b - \frac{(\vec b\vec a)}{\vec a^2}\vec a$. Bei einem Richtungsvektor kommt es auf Länge nicht an. Durch Anbringen eines gemeinsamen Faktors $\vec a^2$ beseitigen wir den Bruch und erhalten folgende Formel für einen (nicht etwa "den") Richtungsvektor der Senkrechten auf $\vec a$ :

$$\boxed{\vec N_{\vec a} = \vec a^2\vec b - (\vec a\cdot\vec b)\vec a}$$

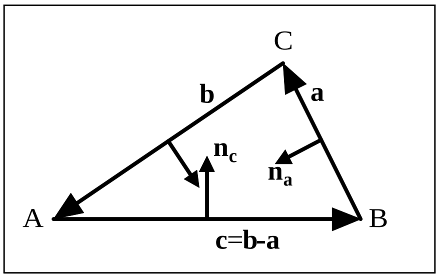
☐ Verifizieren Sie $\vec N_{\vec a}^2 = \vec a^2 F^2$ rechnerisch. Kann man das ohne Rechnung verstehen?
☐ Parametrisierung der gesuchten Mittelsenkrechte?
☐ Leiten Sie Sinussatz und Cosinussatz für Dreiecke vektoriell her. (Immer mit einer geeigneten Skizze beginnen!)

### 0.3.1 Einige Dreiecksformeln

**(6.1.50)** Wir wollen jetzt etwas systematischer ein allgemeines Dreieck **vektoriell** beschreiben. Das Dreieck wird zunächst samt seiner Lage im Raum durch seine drei Eckpunkte A,B,C$\in E^3$ vorgegeben. Die üblichen geometrischen Eigenschaften des Dreiecks werden dann durch die Kantenvektoren festgelegt. Um die Gleichwertigkeit der drei Punkt zu sichern, definieren wir die Kantenvektoren wie folgt:

$$\boxed{\vec a = \vec x_C - \vec x_B \quad \vec b = \vec x_A - \vec x_C \quad \vec c = \vec x_B - \vec x_A \quad \text{damit gilt } \ \vec a + \vec b + \vec c = \vec 0}$$

Bei Bedarf kann man mit Hilfe der letzten Gleichung $\vec c$ eliminieren, aber dann ergeben sich unsymmetrische Formeln, da die beiden verbleibenden Seiten ausgezeichnet werden.




Wir brauchen noch die drei Richtungsvektoren für die Seitensenkrechten. Verallgemeinerung von (6.1.49) gibt:

$$\vec N_{\vec a} = \vec a^2\vec b - (\vec a\cdot\vec b)\vec a \quad \vec N_{\vec b} = \vec b^2\vec c - (\vec c\cdot\vec b)\vec b \quad \vec N_{\vec b} = \vec c^2\vec a - (\vec a\cdot\vec c)\vec c$$

☐ Zeigen Sie, dass diese Vektoren von ihren Seiten aus ins Innere des Dreiecks weisen, sofern dieses nicht entartet ist. Zeigen Sie beispielsweise $\vec N_{\vec a}\cdot\vec b = F^2$ und $\vec N_{\vec a}\cdot\vec c = -F^2$ gilt. Wieso folgt hieraus die Behauptung?
**(6.1.51)** Mit dieser Information kann man die **Höhen**, die **Mittelsenkrechten** und die **Winkelhalbierenden** im Dreieck angeben. Für all diese Objekte kennt man ja jeweils einen Punkt und eine Richtung. Jetzt kann man die zugehörigen Schnittpunkte vektoriell bestimmen. (Zunächst einen Zweierschnittpunkt und dann zeigen, dass die dritte Gerade auch durch diesen Punkt verläuft.)

Das gibt (mit **einiger** Rechnung!) die folgenden symmetrischen vektoriellen Formeln:

| | |
|---|---|
| Der Höhenschnittpunkt: | $\vec H = \frac{1}{F^2}\Big((\vec a\vec b)\,(\vec a\vec c)\,\vec x_A + (\vec b\vec a)(\vec b\vec c)\vec x_B + (\vec c\vec a)(\vec c\vec b)\vec x_C\Big)$ |
| Mittelsenkrechte | $\vec M = \frac{-1}{2F^2}\Big((\vec b\vec c)\vec a^2\vec x_A + (\vec a\vec c)\vec b^2\vec x_B + (\vec a\vec b)\vec c^2\vec x_C\Big)$ |
| Winkelhalbierende | $\vec W = \frac{1}{U}\Big(\lvert\vec a\rvert\,\vec x_A + \lvert\vec b\rvert\,\vec x_B + \lvert\vec c\rvert\,\vec x_C\Big)$ mit U=$\lvert\vec a\rvert + \lvert\vec b\rvert + \lvert\vec c\rvert$ |

☐ Rechnen Sie einen dieser drei Fälle nach.

### 0.3.2 Schnittmengenbestimmung mit Hilfe von Koordinatengleichungen

**(6.1.52)** Bisher haben wir Schnittmengen mit Hilfe von Parametrisierungen bestimmt. Alternativ kann man auch von Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten ausgehen. Nehmen wir zwei Ebenen, die durch Bestimmungsgleichungen $\vec{a}\cdot\vec{x} = d$ und $\vec{b}\cdot\vec{x} = e$ festgelegt sind. Hier sind die Unbestimmten die Koordinaten der Punkte selbst, nicht zugehörige Parameter. Fügt man beide Gleichungen zu einem System zusammen, so ergibt die Lösung unmittelbar den Schnitt, genauer die Koordinatentripel eventueller Schnittpunkte.
Oder: $\vec{x}^2 = R^2$ beschreibt die Punkte einer Kugeloberfläche. und $\vec{a}\cdot\vec{x} = b$ die Punkte einer Ebene. Zusammen liefern beide Gleichungen den Schnitt der Flächen. Ausgechrieben erhält man ein System von 2 Gleichungen für drei Unbekannte:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{und} \quad a_1x + a_2y + a_3z = b.$$

Das System kann mit dem üblichen Eleiminationschema angegangen werden: Man löst eine Gleichung - etwa die zweite - nach einer Unbestimmten auf, setzt in die andere ein. Das gibt eine Gleichung für zwei Unbestimmte. Eine Unbestimmte erhält die Rolle eines freien Parameters, nach der anderen löst man auf. Usw.

□ Führen Sie die Rechnung für $a_3 \neq 0$ aus.