Aufwärmfrage:

Angenommen Sie haben eine Figur F im E^3.
Sie wählen einen Ursprung O und beschreiben die Punkte von F mit Hilfe ihrer Ortsvektoren in V_O^3, durch die Menge

$$F_V = \{\vec{x}|\vec{x} = \vec{x}_P \in V_O^3, P \in F\}.$$

$\boxed{\text{Jetzt}}$ wird die Figur um den Vektor $\vec{a}$ verschoben (jeder Punkt). Was wird dann aus F_V. Die neue Menge sei

$$F_{V,\vec{y}} = \{\vec{x}|\vec{x} \in V_O^3, \vec{x} = \vec{x}_P + \vec{a}, P \in F\}$$

---

19. September!

Kap. 5 $\boxed{\text{Lineare}}$ Gleichungssysteme

5.1 Zugehöriges Begriffssystem (Heute)
5.2 Ein Lösungskalkül (Heute!!)
5.3 Allgemeine Resultate

- Bestimmungsgleichung: m Gleichungen für n Unbestimmte
- Lösung (raten oder über ein Verfahren -Kalkül- bestimmen, definierende Eigenschaft ist nur: Erfüllt die Bestimmungsgleichung) Lösungsmenge (erfasst nur das Resultat, nicht der Weg dahin)
  - Vorgabe einer Bestimmungsgleichung (Unbestimmte sind stumme Variable!)
- Lineare Gleichungen Inspektion: "*Unbestimmte in 1. und 0. Potenz*" Siehe Kap.1.2.4 Typ 2x-3y+z=7
  - Vorgabe eines linearen Gleichungssystems (versch. Formen, Gleichungsform, Normalform, Matrixform...)
  - Zur Festlegung benötigt man: Eine $m{\times}n-Matrix$ M und den Inhomogenitätenvektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
  - Vektorschreibweise, Normalform $\boxed{\boxed{\mathrm{M}.\vec{x} = \vec{b}}}$
- Einschug Matrix, $\boxed{\text{Abbildungsinterpretation der Matrizen!!!}}$
  - "Zeile × Spalte *Merkregel!!!*
  - Rechnen mit Matrizen
  - Kurze Vorabinformation über die geometrische Interpretation der Lösungsmengen (als Figuren im $\mathbb{R}^n$)
  - Linearitätseigenschaft der Matrixabbildung (bisher ausgelassen)
  - Idee der inversen Matrix: 2×2 Fall gerechnet!
- Nochmals: Lineare Gleichung und deren Lösungen ("Aschenputtelvergleich")
- Mathematik sucht gerne allgemeine Aussagen über IL, ohne die Lösung selbst zu berechnen - Kap. 5.3 - Morgen.
- Fallunterscheidung: Äußere Parameter in M oder $\vec{b}$.

– Fallunterscheidung - Verzweigung - des Lösungsweges

– Verzweigung der Lösungsmenge

M,$\vec{b}$ Vorgegeben. M vom Typ m$\times n$
Bilde dazu die Bestimmungsgleichung $\boxed{M.\vec{x} = \vec{b}}$
Wähle eine Element $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$
Bilde $\vec{y}$ =M.$\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ nach der Regel Zeile$\times$*Spalte*
Vergleiche mit $\vec{b}$
Gilt $\vec{y} = \vec{b}$ dann (der Vektor $\vec{x}$) "ins Töpfchen" IL=IL$_{M,\vec{b}}$.
Anderfalls.„„,"ins..."
Also IL$_{M,\vec{b}} = \{\vec{u}|\ \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, M.$\vec{u} = \vec{b}\}$
.....
Unterscheide: Benötigt man (irgend)eine solche Lösung oder alle?
Erinnerung an die zugehörige Lösungsstrategie bei m=n=1:
G(x)=0....$\Rightarrow$ ....$x = ...$

Man rechnet zulässig, bis man nach x umgestellt hat. **Und dann testet man, ob jeder Schritt rückwärts zulässig ist.** Bei der Endformulierung läßt man den 1. Teil in der Regel fort.

Das allgemein Eliminationsschema aus Kap. 5. Genau ansehen, sorgfältig arbeiten, Nebenrechnung und Konzept abtrennen,
Es sah vielfach sehr schwach aus und es war dann auch nur wenig Bemühung zu sehen!!!
Die Hauptschritte:

- Schrittweise Elimination
- Nur noch eine Gleichung für mindestens eine Unbestimmte
- Rollenwechsel (Unbestimmte wird zu freiem Parameter)
- Rückeinsetzen
- Ergebnis vektoriell schreiben - zunächst als Tupel, dann geometrisch
- Zahl der freien Parameter inspizieren.

---

m$\times n-$Matrix:
"m$\cdot n-$Zahltupel, das anders geschrieben ist"

★ Begriffssystem "Matrix:
Matrix, i-j-te Matrixkomponente M$_{ij}$. / i-te Zeile der Matrix, j-te Spalte der Matrix / Diagonale der Matrix. (Weg zur Komponente M$_{ij}$)
Formale Schreibweisen

$$M = (M_{ij}) = (M_{ij})_{\substack{i=1,.,m \\ j=1,..n}}$$

★ Die Merkregel "Zeile mal Spalte ". Damit wird aus M und dem formalen Vektor $\vec{x}$ die linke Seite des Gleichungssystems, also M.$\vec{x}$
Zeile $\times$ Spalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ ... + ... + ... \end{pmatrix}$$

Ein gegebenes Gleichungssystem in Matrixform schreiben:

2x-3y+w=7z x-5+w=2-z	wird	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Erstes Beispiel für das Schema:

$$\boxed{\begin{array}{lll} 2x+3y-z=0 & ....1 & ..7 \\ x+4y+z=0 & ....2 & ..5 \end{array}}$$

z raus: $\boxed{\text{3x+7y=3}}$ Ende Elimination. y frei $\underline{x = -\frac{7}{3}y+1}$ z=2x+3y-1=2 $\left(-\frac{7}{3}y+1\right)+3y-1=-\frac{5}{3}y+1$

Vektoriell Parametrisierung einer Geraden:

$$\boxed{\vec{x}_L(y) = \begin{pmatrix} 1-\frac{7}{3}y \\ y \\ -1-\frac{5}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}}$$

Die Nachmittagsbeispiele!

□ ♠(5.1.31) **Verständnistest**: Geben Sie alle Lösungen der Gleichung M$\vec{x} = \vec{0}$ an, wenn M die folgende Matrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

▼ Das zugehörige Gleichungssystem lautet

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{0x+1y+0z=0} \\ \text{0x+0y+0z=0} \\ \text{0x+2y+0z=0} \end{array}} \quad \text{Erfüllt für alle } \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{mit a,b frei wählbar.}$$

Das war wieder **schwach!!!**▲

$$♠\boxed{\begin{array}{ll} \text{3x+7y=4} & +(1) \\ \text{2x- y =1} & +(7) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{17x=11} \quad \underline{x=\tfrac{11}{17}} \quad y=2\cdot\tfrac{11}{17}-1=\tfrac{4}{17}}$$

Eindeutige Lösung $\vec{x}_L = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} x+y+z+w=3 \\ 2x-y+3z-2w=-1 \end{array} \quad \text{y raus!}$$

$$\boxed{\text{3x+4z-w=2} \quad \underline{\text{x,z frei}} \quad \text{und } \underline{\text{w=3x+4z-2}}}$$

3-x-z-w=$3-x-z-(3x+4z-2)=5-4x-5z$

$$y=5-4x-5z$$

$$\boxed{\vec{x}_L(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ 5-4x-5z \\ z \\ 3x+4z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

♠ $\boxed{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z-x=3 \end{array}}$ Bilde (2)-(1) (y raus):

x-z=1

z-x=3 Unerfüllbar!

System unlösbar! Und es ist $\ell = 2$,. da eine Matrixzeile abhängig!

♠ $\boxed{\begin{array}{l} \text{x-2y+z/3+7w=1} \\ \text{y/3+7z-3w=2} \\ \text{z+w=0} \\ \text{2w=4} \end{array}}$

▼ Hier ist das Ende des Eliminationsprozesses bereits verfügbar. Man erhält nacheinander w=2, z=-2, y=3(2-7z+3w)=66 x=$\frac{359}{3}$. Erwartungsgemäß ist hier $\ell = 4$ und k=0.

♠ $\boxed{\begin{array}{l} \text{y/3+7z-3w=2} \\ \text{z+w=0} \\ \text{x-2y+z/3+7w=1} \\ \text{x+w=2} \end{array}}$ Hier wird man sofort x und z eliminieren: $\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{3}y - 10w = 2 \\ -2y + \frac{17}{3}w = -1 \end{array}}$

.Ergebnis $\vec{x}_L = \frac{1}{163}\begin{pmatrix} 359 \\ -12 \\ 33 \\ -33 \end{pmatrix}$

■ 4) Im Rahmen einer Klausuraufgabe im 2. Semester war folgendes Gleichungssystem in α, β, γ zu lösen. Infolge unzulänglicher Rechenkompetenz entstanden zahlreiche Fehler. Rechnen Sie!

♠ $\boxed{\begin{array}{l} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}}$.

$$\begin{array}{c} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}$$

▼ Zunächst α, dann β raus. Und dann Rückeinsetzen. Ergebnis

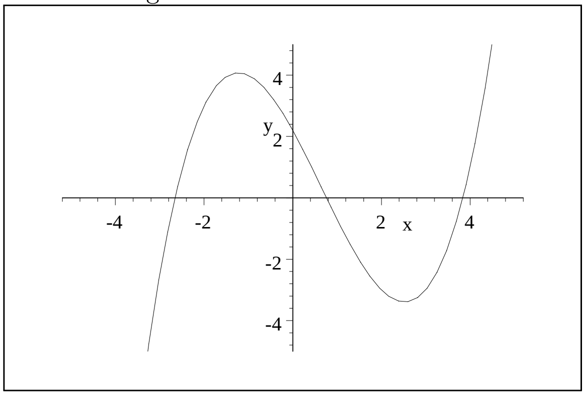
$$\vec{x}_L = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -48A^{-4} + 120A^{-2} + 8A \\ -16A^{-4} + 10A^{-2} + 6A \\ 4A^{-4} - 5A^{-2} + A \end{pmatrix}$$

■ 6) ♠ Von einem Polynom p(x)=a$_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ wisse man, dass p(-1)=4, p(-2)=3, p(2)=-3 und p(3)=-3 gilt. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 auf und lösen Sie dieses.

▼ Das Gleichungssystem (4 Gleichungen für 4 Unbestimmte!)

$$\begin{array}{c} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 4 \\ a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -3 \end{array} \qquad \vec{x}_L = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 132 \\ -158 \\ -33 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Das ergibt das Polynom p(x)=$\frac{1}{60}\left(132-158x-33x^2+17x^3\right)$ mit dem folgenden Graphen, der offensichtlich durch die vorgegebenen Punkte geht:



▲

Im nächsten System zuerst y raus. Im folgende Schritt läßt sich eine Verzweigung nicht mehr vermeiden. Wir eliminieren x.

$$♠\boxed{\begin{array}{l}\text{ax+2z=2}\\ \text{5x+2y=1}\\ \text{x-2y+bz=3}\end{array}}\boxed{\begin{array}{l}\text{ax+2z=2}\\ \text{6x+bz=4}\end{array}}\boxed{(ab-12)\,z=4a-12}$$

★Typischer Fall: ab≠ 12. Dann folgt $\boxed{\text{z=}\frac{4a-12}{ab-12}}$ und dann $\boxed{\text{x=}\frac{2b-8}{ab-12}}$ und $\boxed{\text{y=}\frac{ab-10b+28}{ab-12}}$

★ Nun der Sonderfall ab=12. Hierfür lautet die letzte Bedingung $\boxed{\text{0z=4a-12}}$. Eine weitere Fallunterscheidung ist nötig: ◊ Ist a≠ 3, dann ist das System unlösbar.

◊ Ist a=3 und natürlich ab=12, also b=4, dann ist z frei. Das Rückeinsetzen gibt x=$\frac{2}{3}(1-z)$ und schließlich y=$\frac{1}{3}(10z-7)$.

Die Lösung insgesamt:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2-2z\\-7+10z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\0\end{pmatrix}+\frac{z}{3}\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}$$

	für ab≠12	$\vec{x}_L=\frac{1}{ab-12}\begin{pmatrix}2b-8\\ab-10b+28\\4a-12\end{pmatrix}$	k=1
Lösung	ab=12 und a≠ 3	Unlösbar!	
	ab=12 und a=3 und a=4 (folgt)	$\vec{x}_L(z)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\0\end{pmatrix}+\frac{z}{3}\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}$	k=1

▲

Das allgemeine 2×2 − *System* und die inverse Matrix

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$	ax+by=A cx+dy=B	d -a	-c a

Zuerst y raus und x bestimmen, dann von vorne x raus und y bestimmen! Gibt (ad-bc)x=dA-aB und (ad-bc)y=-cA+aB.
Sofern ad-bc$\neq$ 0 ist folgt

$$\vec{x}_L = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dA-aB \\ -cA+aB \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Ist ad-bc$\neq$ 0, dann läßt sich die Gleichung M.$\vec{x} = \vec{b}$ einfach durch Anwenden der so eingeführten inversen Matrix M^{-1} lösen!
So wie 2x=3 durch Multiplikation der Gleichung mit $\frac{1}{2}$ gelöst wird. Oder analog: $2\vec{x} = \vec{b}$

20. September

Zum Aufwärmen:

- Was ist ein Vektorraum? (Antwort: In einem Satz!)
- Welche Verknüpfungen besitzen bzw. kennen wir für Matrizen?
  - Matrix und Distributivgesetz! In welchem Zusammenhang könnte diese Frage sinnvoll/wichtig sein?
- Sie haben ein lieares m$\times n - System$ vorgegeben. Was kann man nach Ihren bisherigen Kenntnissen und Erfahrungen über die Lösungsmenge bereits sagen, bevor sie berechnet worden ist? Insbesondere: Geometrische Interpretation im $\mathbb{R}^n_K$!
- (a$^2 - 2)x = a + b$ (x unbestimmt, a,b äußere Parameter) Lösung???
- Unterschied zwischen "Lösungsmenge" und "(einer) Parametrisierung der Lösungsmenge"?

Verstehen und Einhalten eines nützlichen Schemas
Beispielrechnung. Wenn man sich an die Regeln hält, ergibt sich ohne weitere Rechnung. Mehr Platz und Arbeit wird nicht benötigt!

$$\begin{aligned} \alpha - 4\beta + 16\gamma &= A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma &= A^{-2} \quad \text{Das gegebene System} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma &= A \end{aligned}$$

Ab hier:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} & - & \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} & + & - \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A & & + \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 2\beta - 12\gamma = A^{-2} - A^{-4} & -4 \\ 8\beta + 32\gamma = A - A^{-2} & +1 \end{array}}$$

$$80\gamma = 4A^{-4} - 5A^{-2} + A \qquad \underline{\gamma = \frac{1}{80}(A - 5A^{-2} + 4A^{-4})}$$

$$\begin{aligned} 2\beta &= \frac{12}{80}(A - 5A^{-2} + 4A^{-4}) + \frac{80}{80}(A^{-2} - A^{-4}) \\ &= \frac{1}{80}\left(12A + 20A^{-2} - 32\right) = \frac{1}{20}\left(3A + 5A^{-2} - 8\right) \\ &\underline{\beta = \frac{1}{40}(3A + 5A^{-2} - 8A^{-4})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2}{40}(3A+5A^{-2}-8A^{-4})-\frac{4}{80}(A-5A^{-2}+4A^{-4})+\frac{20}{20}A^{-2}\\ &= \frac{1}{20}(2A+30A^{-2}-12A^{-4}) \quad \underline{\alpha=\frac{1}{10}(A+15A^{-2}-6A^{-4})}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{k=0, eindeutige Lösung. } \textbf{Fertig.}}$ Noch zusätzlich Matrix- und Vektorschreibweise

$$\vec{x}_L=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}(A+15A^{-2}-6A^{-4})\\ \frac{1}{40}(3A+5A^{-2}-8A^{-4})\\ \frac{1}{80}(A-5A^{-2}+4A^{-4})\end{pmatrix}$$

$$=\frac{A}{80}\begin{pmatrix}8\\6\\1\end{pmatrix}+\frac{A^{-2}}{80}\begin{pmatrix}120\\10\\-5\end{pmatrix}+\frac{A^{-4}}{80}\begin{pmatrix}-48\\-16\\4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{80}\begin{pmatrix}8&120&-48\\6&10&-16\\1&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\A^{-2}\\A^{-4}\end{pmatrix}$$

Über ein Beispiel einen allgemeinen Sachverhalt verstehen!

Gleichungen mit äußeren Parametern: Wo werden die äußeren Parameter (bei der Vorgabe) auftreten? $M.\vec{x}=\vec{b}$. Was ist zu erwarten? Zu beachten?

■ Machen Sie aus den folgenden 4 Gleichungssystemen **ein einziges mit einem äußeren Parameter**, lösen Sie dieses und bestimmen Sie so die Lösungen der vier Systeme und unendlich vieler weiterer.

2x+3y=4 3x+6y=5	2x+3y=6 4x+6y=5	2x+3y=2 2x+6y=5	2x+3y=-2 +3y=5

▼ Mit etwas Probieren findet man das System, das für a=2,3,1 und -1 die 4 Systeme gibt:

2x+3y=2a	-2	alternativ	2x+3y=2(b-1)
(a+1)x+6y=5	1		bx+6y=5

Wir eliminieren y.

(a-3)x=5-4a	Die entscheidende Gleichungsform, die Verzweigung (Fallunterscheidung) bewirkt!

Für a=3 ist es **unlösbar** (0x=-7). Das ist gerade das zweite der Systeme. Für a$\neq$ 3 dagegen folgt

$$\boxed{x=\frac{5-4a}{a-3} \qquad y=\frac{2}{3}\,\frac{a-5+a^2}{a-3}}.$$

Einsetzen der Werte für a gibt die gesuchten Lösungen. Für a=2 etwa wird x=3 und y=-$\frac{2}{3}$. ▲

> Das Beispiel zeigt, (a) weshalb bei einem äußeren Parameter eine Verzweigung zu erwarten ist und (b) wie man damit umzugehen hat!

Über ein Beispiel einen allgemeinen Sachverhalt verstehen!
Kap. 1.1.2

- **Kap. 5.3: Allgemeine Resultate über die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme**

- Begriffssystem: "Homogene" ($\vec{b}=\vec{0}$) und "inhomogene Gleichung" ($\vec{b}\neq\vec{0}$), "zugeordnetes homogenes System". (Gilt nicht für "nicht linear")
- M.$\vec{x}=\vec{0}$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems hat immer die folgende Form ($\vec{x}_{LH}$ ist eine Parametrisierung der Lösungsmenge IL. $\boxed{\text{k}}$=Zahl der benötigten freien Parameter, k=0 ist möglich und besonders wichtig!!)

$$\boxed{\boxed{\vec{x}_{LH}(\alpha_1,..,\alpha_k)=\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{a}_i=\alpha_1\vec{a}_1+..+\alpha_k\vec{a}_k}} \qquad \alpha_i \text{ frei i } =1,...,\text{k}$$

$$\boxed{\text{M}.\vec{a}_i=\vec{0}} \quad \text{für } i \quad = \quad 1,..,,k$$

  Im (besonders wichtigen) Fall k=0 ("eindeutig lösbar") ist nur $\vec{0}$ Lösung. Also IL=$\{\vec{0}\}$. Ein homogenes System ist immer lösbar, da $\vec{0}\in\mathbb{R}^n$ stets Lösung ist.
- M.$\vec{x}=\vec{b}$ mit $\vec{b}\neq\vec{0}$. Inhomogenes System. Das System ist entweder $\boxed{\text{unlösbar}}$ oder lösbar. Dann gibt es mindestens eine Lösung $\vec{x}_S$ des Systems. Man erhält eine Parametrisierung $\vec{x}_{LIn}$ der Lösungsmenge wie folgt:

$$\boxed{\vec{x}_{LIn}(\alpha_1,..,\alpha_k)=\vec{x}_S+\vec{x}_{LH}(\alpha_1,.,\alpha_k)}$$

$$\boxed{\vec{x}_{LIn}(\alpha_1,..,\alpha_k)=\vec{x}_S+\alpha_1\vec{a}_1+..+\alpha_k\vec{a}_k}$$

$$\text{mit} \quad \boxed{\text{M}.\vec{x}_S=\vec{b}} \quad \text{und} \quad \boxed{\text{M}.\vec{a}_i=\vec{0}} \quad \text{i=1,2,..,k}$$

  $\vec{x}_{LH}$ ist eine Parametrisierung der zugeordneten homogenen Gleichung. Und k die zugehörige Zahl freier Parameter. Un im Falle k=0 ist $\vec{x}_S$ die einzige Lösung. IL=$\{\vec{x}_S\}$.

- - Die geometrisch vektorielle Interpretation (der Lösung der inhomogenen Gleichung im lösbaren Fall) : Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wird um $\vec{x}_S$ parallel verschoben.
  - Die Regel $\boxed{\text{k}+\ell=n}$ (ℓ =Zahl der unabhängigen Bedingungen). Nutzen: k interessiert! ℓ erhält man mathematisch. Also k=n-ℓ. (*Rang)*
  - Nutzung der Resultate bei der Rechenkontrolle.

Die Aufgaben im Skript zur Abrundung des Verständnisses!!
Haben welche Funktion? Welchen Zweck?

In der nachfolgenden Aufgabe soll ein und dasselbe System auf mehrere Weisen gelöst werden, die zu unterschiedlichen Parametrisierungen der Lösungsmenge führen.

Dabei handelt es sich um folgendes $2\times3-$System (x,y,z Unbestimmte und a äußerer Parameter):

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ax+2y+3z=1}\\ \text{x-ay+4z=2}\end{array}}$$

Da ein äußerer Parameter auftritt, erwarten wir Verzweigungen des Lösungsweges. Und für den typischen Fall erwarten wir k=1, also einen freier Parameter. Die Lösungsmenge stellt dann geometrische eine Gerade im Raum dar. Jetzt die Aufgabenformulierung.

Weg a) Eliminieren Sie im ersten Schritt x. Dann z als freien Parameter wählen.

Weg b) Eliminieren Sie jetzt im ersten Schritt z und nehmen Sie einmal x und einmal y als freien Parameter.

c) Zeigen Sie, dass die Lösungsmengen aus a) und b) übereinstimmen, dass die scheinbaren Unterschiede durch unterschiedliche Parametrisierungen derselben verursacht sind.

$\boxed{\text{Weg a)}}$ Zuerst x eliminieren, z frei. Erwartung: Frühe Verzweigung, ist aber nicht der Fall.

ax+2y+3z=1	1	x raus
x-ay+4z=2	-a	

$\boxed{(2+a^2)y + (3-4a)z = 1-2a}$ Keine Verzweigung!

$$\underline{z \text{ frei }} \text{ und } \underline{y = \frac{1-2a}{2+a^2} + \frac{4a-3}{2+a^2}z}$$

Rückeinsetzen:

$$x = 2 + ay - 4z = 2 + a\left(\tfrac{1-2a}{2+a^2} + \tfrac{4a-3}{2+a^2}z\right) - 4z = \left(2 + a\tfrac{1-2a}{2+a^2}\right) + z\left(a\tfrac{4a-3}{2+a^2} - 4\right)$$
$$= \tfrac{4+2a^2+a-2a^2}{2+a^2} + z\tfrac{4a^2-3a-8-4a^2}{2+a^2} = \underline{\tfrac{4+a}{2+a^2} + z\tfrac{-3a-8}{2+a^2}}$$

Zusammenfassen (erfasst alle Fälle!)

$$\boxed{\underline{\vec{x}_L(z) = \begin{pmatrix} \frac{4+a}{2+a^2} + z\frac{-3a-8}{2+a^2} \\ \frac{1-2a}{2+a^2} + \frac{4a-3}{2+a^2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} 4+a \\ 1-2a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{2+a^2}\begin{pmatrix} -3a-8 \\ 4a-3 \\ 2+a^2 \end{pmatrix}}}$$

Inspektion zeigt: Aufpunkt liegt in der x-y-Ebene (z=0). .
Unten benötigen wir den Fall a=$\frac{3}{4}$. Also 2+a^2 $= \frac{41}{16}$

$$\vec{x}_{L,a=\frac{4}{3}}(z) = \frac{16}{41}\begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{16z}{41}\begin{pmatrix} -\frac{41}{4} \\ 0 \\ \frac{41}{16} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Weg b)}}$ Zuerst z raus

ax+2y+3z=1	-4	z raus
x-ay+4z=2	3	

$\boxed{\text{x(3-4a)+y(-3a-8)=2}}$

Für $\boxed{a \neq -\frac{8}{3}}$ $\underline{y = \frac{2-x(3-4a)}{-3a-8} = \frac{x(3-4a)-2}{3a+8}}$ $\underline{\text{x frei}}$

$$3z = 1 - ax - 2\frac{x(3-4a)-2}{3a+8} = \frac{(1-ax)(3a+8)-2(x(3-4a)-2)}{3a+8} = -3\frac{-a-4+x(a^2+2)}{3a+8}$$

$$\underline{z = \frac{a+4-x(a^2+2)}{2a+8}}$$

$$\vec{x}_L(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x(3-4a)-2}{3a+8} \\ \frac{a+4-x(a^2+2)}{2a+8} \end{pmatrix} = \frac{1}{3a+8}\begin{pmatrix} x(3a+8) \\ x(3-4a)-2 \\ a+4-x(a^2+2) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3a+8}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ a+4 \end{pmatrix} + \frac{-x}{3a+8}\begin{pmatrix} -3a-8 \\ (-3+4a) \\ (a^2+2) \end{pmatrix}$$

ERgibt das dieselbe Lösungsmenge? Bei der alten Parametrisierung lag der Aufpunkt in der x-y-Ebene. Wir parametriseiren um mit Hilfe der folgenden Umformung:

$\vec{y}_L(x) = y_L(x_0) + (y_L(x) - y_L(x_0)) = y_L(x_0) + (x - x_0)\vec{e}$. Wir wählen x_0 so, dass der Aufpunktvektor die gewünschte eigenschaft hat. Hier z=0, woraus $\boxed{x_0 = \frac{a+4}{a^2+2}}$ folgt. Das gibt für $\vec{y}_L(x_0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{x(3-4a)-2}{3a+8} \\ \frac{a+4-x(a^2+2)}{2a+8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+4}{a^2+2} \\ \frac{\frac{a+4}{a^2+2}(3-4a)-2}{3a+8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+4}{a^2+2} \\ -\frac{2a-1}{a^2+2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+2} \begin{pmatrix} a+4 \\ 1-2a \\ 0 \end{pmatrix}$$ Das ist der alte Aufpunkt

Jetzt ist noch ausgelassenene Fall a=-$\frac{8}{3}$ zu rechnen. Haben wir aber ausgelassen!

Auch in dem weiteren Fall, bei dem y frei gewählt wird, ist einen **Fallunterscheidung** erforderlich. Zuerst der Sonderfall, in dem y nicht frei wählbar ist Start war $\boxed{x(3-4a)+y(-3a-8)=2}$

$\boxed{\text{Fall 1 } \boxed{a=\frac{3}{4}}}$ Gibt Bedingungsgleichung: $\boxed{0x+\frac{-41}{4}y = 2}$

$\underline{\text{x frei und } y=\frac{-8}{41}}$ Rückeinsetzen gibt $\underline{z=\frac{19}{41} - \frac{1}{4}x}$

Zusammen: Gibt Zwischenform

$$\boxed{\vec{y}_L(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{-8}{41} \\ \frac{19}{41} - \frac{1}{4}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8}{41} \\ \frac{19}{41} \end{pmatrix} + \frac{x}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Umparametrisierung "Gezielter Aufpunktwechsel". Allgemein gilt:

$$\vec{y}_L(x) = \vec{y}_L(x_0) + (\vec{y}_L(x) - \vec{y}_L(x_0)) = \vec{y}_L(\vec{x}_0) + (x - x_0)\vec{e}$$

$$\vec{y}_L(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ -\frac{8}{41} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x-x_0}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ mit $\frac{19}{41} - \frac{1}{4}x_0 = 0$. Also $\boxed{x_0 = \frac{4\cdot 19}{41}}$

Das gibt:

$$\vec{y}_L(u) = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot 19}{41} \\ -\frac{8}{41} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x-x_0}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot 19}{41} \\ -\frac{8}{41} \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Und das ist die alte Parametrisierung! $2+a^2 = \frac{41}{16}$

$\boxed{\text{Fall 2: } \boxed{a \neq \frac{3}{4}}}$ auf Weg b)

$\boxed{x(3-4a)+y(-3a-8)=2}$ Division möglich: $\underline{x=\frac{2}{3-4a} + y\frac{3a+8}{3-4a} \quad \text{y frei}}$ und

$$4z = 2 - x + ay = 2-\left(\frac{2}{3-4a} + y\frac{3a+8}{3-4a}\right) + ay = \left(2 - \frac{2}{3-4a}\right) + y\left(-\frac{3a+8}{3-4a} + a\right)$$

$$= \frac{4-8a}{3-4a} + y\frac{(-4)(2+a^2)}{3-4a} \qquad \underline{z = \frac{1-2a}{(3-4a)} + y\frac{(-1)(2+a^2)}{3-4a}}$$

Ergebnis vektoriell zusammengefasst:

$$\boxed{\vec{z}_L(y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3-4a} + y\frac{3a+8}{3-4a} \\ y \\ \frac{1-2a}{(3-4a)} + y\frac{(-1)(2+a^2)}{3-4a} \end{pmatrix} = \frac{1}{3-4a} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-2a \end{pmatrix} + \frac{y}{3-4a} \begin{pmatrix} 3a+8 \\ 3-4a \\ -1(2+a^2) \end{pmatrix}}$$

Beschreibt das dieselbe Lösungsmenge? Umparametrisierung, die den Aufpunkt in die x-y-Ebene verschiebt! Es muss a_z=0 muss entstehen).Dritter Teil der Aufgabenstellung!

$$\vec{z}_L(y) = \frac{1}{3-4a}\begin{pmatrix} 2+y_0(3a+8) \\ 0+y_0(3-4a) \\ (1-2a)-y_0(2+a^2) \end{pmatrix} + \frac{(y-y_0)}{3-4a}\begin{pmatrix} 3a+8 \\ 3-4a \\ -1(2+a^2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y_0 = \frac{1-2a}{2+a^2} \quad u=\frac{y-y_0}{3-4a}$$ Es folgt

$$2+\frac{1-2a}{2+a^2}(3a+8) = -\frac{-12+4a^2+13a}{2+a^2} = \frac{-(a+4)(-3+4a)}{2+a^2}$$

$$\frac{1-2a}{2+a^2}(3-4a) = \frac{3-10a+8a^2}{2+a^2} = \frac{(-1+2a)(-3+4a)}{2+a^2}$$

$$\vec{w}_L(u) = \frac{1}{3-4a}\begin{pmatrix} \frac{-(a+4)(-3+4a)}{2+a^2} \\ \frac{(-1+2a)(-3+4a)}{2+a^2} \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3a+8 \\ 3-4a \\ -1(2+a^2) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{w}_L(u) = \frac{1}{(2+a^2)}\begin{pmatrix} 4+a \\ 1-2a \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3a+8 \\ 3-4a \\ -1(2+a^2) \end{pmatrix}}$$

Das ist die alte Gleichung nur mit anderem Parameter $u=\frac{z}{2+a^2}$. Und das gilt auch für $a=\frac{3}{4}$.
