- Qualitativ - quantitativ: Die Notwendigkeit physikalisch geometrische Ojekte zu quantifizieren. Freiheitsgrae und ihre Anzahl.
- Geometrische Pfeile
- Tupel ($\mathbb{R}^n$)
- Quantifizierung: Gemeinsame Koordinatenvereinbarung + spezielle Zahlangaben
  - Quantifizierung geometrischer Pfeile über Wege bestimmten Typs
  - Polare und kartesische Koordiantensysteme
  - Zeichnerische Darstellung in drei Dimensionen
  - Freie und gebundene Vektoren
- Verbindung geometrischer Eigenschaften mit den Zahlangaben!
- Erste Übungen zur Mengensymbolik
  - Im Kurs benutzte Bezeichnungen: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^3_K$, V^3_O und V^3 .
  - Koordinatenvektor (eines geom. Pfeiles) und Ortsvektor eines Punktes.

Einige Beispielfragen

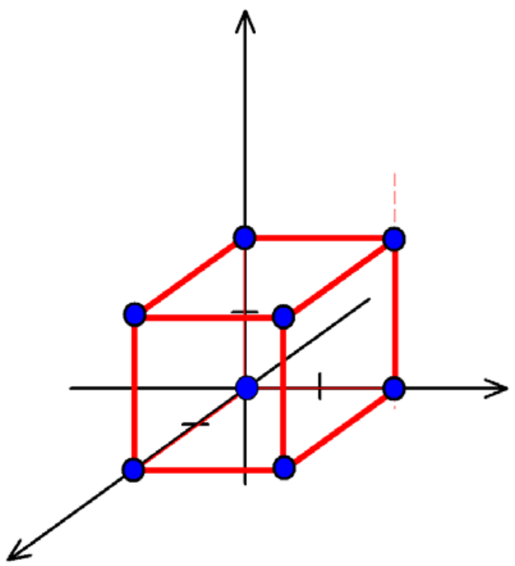
□

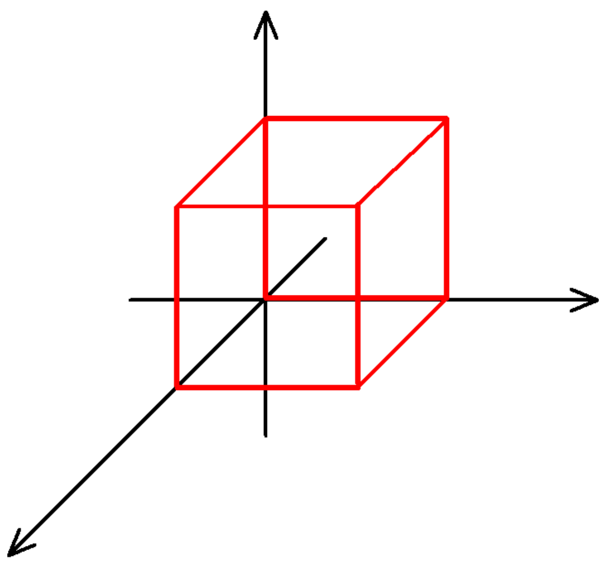
(2.4.13) Gegeben ein Koordinatensystem K mit einem geometrischen Pfeil $\vec{a}$ und Koordinatenvektor $\vec{a}^K = (a_1, a_2, a_3)$.

Überlegen Sie mit Hilfe des vollen Quaders, wieviele achsenparallele Wege vom Ursprung zum Endpunkt es im allgemeinen gibt. Wie sind die Flächendiagonalen (als Wege) zu interpretieren?

▼ Vom Ursprung aus kann man in alle drei Achsenrichtungen gehen. Das sind drei Möglichkeiten. Hat man eine davon gewählt, kann man noch in eine der zwei verbleibenden Richtungen. Insgesamt gibt das 6 Möglichkeiten. Für die letzte Wahl gibt es dann nur noch eine Möglichkeit. Also 6=3·2 · 1 achsenparallele Wege. ▲

□ (2.4.13) Sei $\vec{a}^K = (2, 2, 2)$. Zeichnen Sie den zugehörigen Pfeil. Wie wählt man **zeichnerisch** die Längeneinheit für die x-Koordinate? Für welche Wahl sieht die perspektivische Darstellung eines Würfels besonders *würfelig* aus?





Im linken Bild ist die in den Raum zeigende x-Richtung um einen Faktor von etwa 0.8 verkürzt. Diese Richtung erscheint immer noch etwas lang. Hat man kariertes Papier, kann man die x-Richtung in Richtung der Diagonalen legen und der Diagonalen die Länge 2 geben. Der Verkürzungsfaktor ist dann $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$. Das rechte Bild zeigt die entstehende Würfeldarstellung. ▲

□ (2.4.13) Wie erkennt man bei gegebenem Koordinatenvektor $\vec{x}^K$, dass der zugehörige Punkt hinter der Zeichenebene, unter der Horizontalebene bzw. im rechten Halbraum liegt?

▼ $\vec{x}^K = (x, y, z)$. x ist die "x-Koordinate von $\vec{x}^K$" usw. Ist diese negativ, liegt der Pfeil hinter der Zeichenebene. Ist z negativ, liegt der Pfeil unter der Horizontalebene. Der Pfeil liegt in der rechten Halbebene, sofern y positiv ist. ▲

□ (2.4.22) $\vec{F}$ aus dem Beispiel ist als Kraft ein freier Vektor. Also darf man parallel verschieben. Andererseits darf man das nicht, denn dann greift die Kraft an einer anderen Stelle an. Wo liegt der Argumentationsfehler?

▼ Der geometrische Pfeil $\vec{F}$ ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs, in den man $\vec{F}$ beispielsweise zu Rechenzwecken parallel verschieben kann. Die durch $\vec{F}$ beschriebene Kraftwirkung hat jedoch in P anzusetzen. ▲

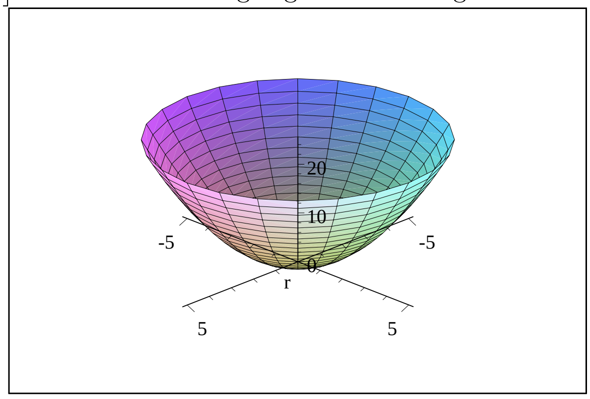
■ Was für eine Figur (räumlicher Körper) wied durch die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3_K$ beschrieben? Immer mit den Inhalt von $\boxed{\text{xxx}}$ betrachten und verswtehen. Gesucht ist eine geometrisch verbale Beschreibung.

1. $\mathrm{K}_R = \{(x,y,z) \| \boxed{\mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 \leq R^2}\}$
2. K=$\{(x,y,z) \| \boxed{0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b, z \geq 0}\}$ "," steht hier immer für "Und".
3. $\mathrm{R}_1 = \{(x,y,z) \| \boxed{(0 \leq x \leq a, \text{ oder } 0 \leq y \leq b), z \geq 0}\}$
   (a) $\mathrm{R}_2 = \{(x,y,z) \| \boxed{0 \leq x \leq a, \text{ oder } (0 \leq y \leq b, z \geq 0)}\}$
4. P=$\{(x,y,z) \| \boxed{z \geq x^2 + y^2}\}$

■ Umkehrung: Gegeben ein Kreiskegel im Koordinatensystem K. Die Spitze liege im Ursprung, die Kegelachse verlaufe in Richtung der positiven z-Achse: Die Höhe des Kegels sei sei H und der Radius des Endkreises sei R.

K(R,H)=$\{(x,y,z) \| \boxed{?????}\}$

Zu P: $[r, \theta, r^2]$ Das Innere der Figur gehört zu Menge mit dazu!



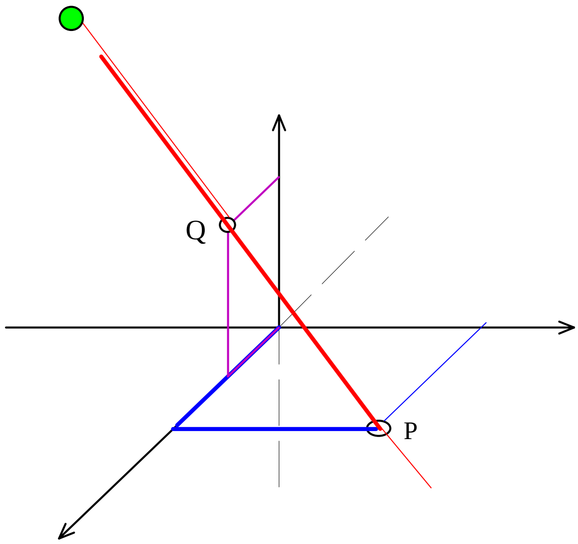


Figure 1:

R_1 und R_2 unterscheiden sich in der Beklammerung: (AoderB)undC bzw. Aoder(BundC). Das Analogon zum Assoziativgesetz gilt hier nicht: Die Mengen sind tatsächlich unterschiedlich.

Ergänzung zu Figur und Frage:

Ein Koordinatensystem legt einen bestimmten Wegtyp fest, der vom Ursprung zum Endpunkt des darzustellenden geometrischen Pfeiles führt. Die zugehörigen Koordinaten bestimmen den genauen Umfang der einzelnen Wegstücke.

Wir haben bereits zwei Wegtypen kennengelernt: *Achenparallele und polare Wege.* Beide sowohl in zwei wie in drei Dimensionen. In drei Dimensionen gibt es einen weitern Typ, die *Zylinderkoordinaten.*

- Beginne mit einem kartesischen Koordinatensystem. Die z-Achse heißt Zylinderachse.
- In der x-y-Ebene werden ebene Polarkoordinaten r und θ vorgegeben.
- Diese werden ergänzt durch die z-Koordinate.
- Der zugehörige Koordinatenvektor ist $[r, \theta, z]$

Zu Zylinderkoordinaten gehöriger Wegtyp.

14.9.

Aufwärmübung:

■ Rekonstruieren Sie die verschiedenen Formen der Geradengleichung samt der zugehörigen geometrischen Bedeutung der auftretenden äußeren Parameter.

■ Skizzieren Sie die Raumgerade, die durch die Punkte P und Q bestimmt wird mit Koordiantenvektoren $\vec{x}_P^K = (2, 2, 0)$ und $\vec{x}_Q^K = (1, 0, \frac{3}{2})$. Wo etwa trifft diese Gerade die y-z-Ebene?

Mit Hilfe der Vektorrechnung kann man zwischen den folgenden drei Bereichen wechseln:

- (G) Geometrisch-physika*l*ischen Konfigurationen im Konfigurationsraum
- (F) Der Darstellung solcher Konfigurationen durch Formeln und Gesetzen, mit denen man dan mathematisch analytisch arbeiten kann. (Folgerungen ziehen)
- (Q) Der quantitativen Beschreibung der behandelten Objekte.

Wichtig ist, dass man zwischen diesen Bereichen problemlos wechseln kann. (in alle Richtungen). Dieser Sachverhalt wurde nachmittags am Beispiel der Formel für die Flugparabel ausführlich konkretisiert.

Wir haben das am Beispiel der Flugparabelformel konkretisiert!

Zugehöriges Hilsmittel sind die beiden Grundegeln, die zwischen V_O^3 und $\mathbb{R}_K^3$ vermitteln. Die Übergangsformeln wurden nachmittags besprochen und andeutungsweise bewiesen.

$$(\vec{x}+\vec{y})^K = \vec{x}^K + \vec{y}^K \qquad (\alpha\vec{x})^K = \alpha\vec{x}^K$$

Wie üblich fällt es zunächst vielfach schwer, diese Formeln zu verstehen. Daher sei nochmals auf Kap. 1.1.3 (Begriffsysteme) verwiesen.

Jetzt ein Beispiel für die Beziehung zwisvchen Geometrie, Formel und Quantifizierung:

(G) Zwei (verschiedene) Punkte P und Q legen im Raum eine Gerade g fest..
(F) Wähle Ursprung. Dann hat man deren Ortsvektoren $\vec{x}_P$ und $\vec{x}_Q$ und die Gerade wird parametrisiert durch die Formel (aus Kapitel 4):

$$\vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha(\vec{x}_Q - \vec{x}_P).$$

(Q) Routinemäßig kann man zu einem vollen kartesischen Koordinatensystem ergänzen und zu den Koordinatenvektoren übergehen

$$\vec{x}_g^K(\alpha) = \vec{x}_P^K + \alpha(\vec{x}_Q^K - \vec{x}_P^K)$$

Damit kann man quantitativ rechnen. Gilt beispielsweise $\vec{x}_P^K = (1,2,0)$ und $\vec{x}_Q^K = (0,1,3)$, dann folgt

$$\vec{x}_g^K(\alpha) = (1,2,0) + \alpha((0,1,3) - (1,2,0)) = (1-\alpha, 2-\alpha, 3\alpha)$$

Das liefert alle Punkte der Geraden genau einmal.

Die bei der Konfigurationsraumbeschreibung benutzten **Mengen** und zugehörige **Bezeichnungskonventionen**

E^3	V_0^3	V^3	$\mathbb{R}_K^3$
P	$\vec{x}_P$	$\vec{v}$	$\vec{x}_P^K = (x,y,z)$ $\vec{v}^K = (v_1,v_2,v_3)$
Punkte	Ortsvektor von P Geb. Vektor	geom. Pfeil (freier Vektor)	Koordinatenvektoren und deren Koordinaten

---

Inhalt von Kap. 3

Der Inhalt dieses Kapitels:

- 3.1 Terme
- 3.2 Verknüpfungen
- 3.3 Das Rechnen mit Vektoren
- 3.4 Terme und Formeln mit Vektoren

3.1 Fortsetzung der Unterscheidung von *Quadratischer Term*und *Quadratisches Polynom:* **Unterscheide Rechenausdruck (Term) und Zuordnung!**

3.2 Spezielle für algebraische Überlegungen benötigte **Zuordnungen** sind die *algebraische Verknüpfungen.* Vom Typ "Aus zwei mach eins". Zusammen mit den Buchstaben bilden Sie die Bausteine der Rechenausdrücke. In 3·(a·.x)+b komen zwei solche Bausteine vor + (einmal) und · zweimal. Verdeutlichung über Verlaufsdiagramme.

3.3 Die Verknüpfungen des Zahlrechnens - Die Körperaxiome
Übertragung auf unsere Vektorräume - Zugehörige Rechenregeln
Die Vektorraumaxiome
Die Gebrauchsregeln der Vektorrechnung, insbesondere das Wechseln zwischen V_0^3 und $\mathbb{R}_K^3$

Einige Formeln, die allein aus den Vektorraumaxiomen folgen: (3.3.38-39)

$$0\vec{x} = \vec{0} \quad \alpha\vec{0} = \vec{0} \quad (-1)\vec{x} = -\vec{x}$$

Die erste Geichung ist im Skript bewiesen. Die dritte beweist man dann wie folgt:

$$\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0}+\vec{0}) = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}$$

Jetzt auf beiden Seiten das (existierende) Inverse -($\alpha\vec{0}$) hinzuaddieren Gibt $\boxed{\alpha\vec{0} = \vec{0}.}$

$\vec{0}$ =$0\vec{x} = (1-1)\vec{x} = 1\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{x} + (-1)\vec{x}$ -$\vec{x}$ hinzuaddieren
-$\vec{x} = -\vec{x} + \vec{0} = -\vec{x} + \vec{x} + (-1)\vec{x}$
$\boxed{-\vec{x} = (-1)\vec{x}}$

Ausführlich bewiesen wurde, dass sich $\alpha\vec{x} = \vec{b}$ für $\alpha \neq 0$ nach $\vec{x}$ auflösen läßt: $\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b}$.

Wichtig: Fingerübungen zum komponentenweisen Rechnen.
Im Skript etwa (3.3.53)

Gesucht der Koordinatenvektor $\vec{x}^K$, der folgende Bestimmungsgleichung erfüllt:

$$3(\vec{x}^K + 2\vec{a}^K) - 7(\vec{b}^K - 2(\vec{x} - \vec{a}^K) = \vec{x}^K + (2\vec{a}^K - 3\vec{b}^K)$$

wobei $\vec{a}^K = (1,2,3)$ und $\vec{b}^K = (0,1,2)$. Und $\vec{x}^K = (x,y,z)$.
Achtung: Zahlen hier erst am Ende einsetzen! Zuerst allgemein rechnen:
Systematisches Einsammeln gleichartiger Vektoren gibt **sofort**:

$$\begin{aligned} (3+2-1)\vec{x}^K &= (2 - 2\cdot 3 + 7\cdot 2)\vec{a}^K + (-3+7)\vec{b}^K \\ 4\vec{x}^K &= 10\vec{a}^K + 4\vec{b}^K = (10,24,38) \\ \vec{x}^K &= \frac{1}{2}(5,12,19) \end{aligned}$$

Nicht zulässige "Rechenausdrücke" für Vektoren wie in (3.3.37) hätten noch besprochen werden sollen!

17.9. 2007

Geometrie	Formel, Rechnung		Quantifizierung
Physik E^3	V^3, V^3_O		$\mathbb{R}^3_K$
"Skizze"$\rightleftarrows$	Vektorraum (V,+,·) Gebrauchsregeln	(..)	$(..)^K$

(V,+,·) bedeutet: 1 Menge V mit "Vektoren" genannten Elementen. Dazu der Körper $\mathbb{R}$ und zwei (algebraische) Verknüpfungen $\begin{array}{l} V\times V \to V \\ (\vec{a},\vec{b}) \longmapsto \vec{a}+\vec{b} \end{array}$ und $\begin{array}{l} \mathbb{R}\times V \to V \\ (\alpha,\vec{x}) \longmapsto \alpha\cdot\vec{x} \end{array}$. Einschränkende Rechenregeln (Axiome) sind:

(V,+) ist kommutative Gruppe
(V,·) erfüllt $\begin{array}{l} \alpha\cdot(\beta\cdot X) = (\alpha\beta)\cdot\vec{x} \\ 1\cdot\vec{x} = \vec{x} \end{array}$
Verbindung + und · $\begin{array}{l} \alpha\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\cdot\vec{x} + \alpha\cdot\vec{y} \\ (\alpha+\beta)\cdot\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\cdot\vec{x} \end{array}$

Gruppe (G,∘) : .....
Das gibt die folgenden Gebrauchsregeln für den Umgang mit Vektoren: :

- Was die Addition und die Multiplikation von Vektoren mit Zahlen anbelangt, so kann man mit Vektoren genauso rechnen wie mit Zahlen, sofern man nur die folgenden Punkte beachtet:
  - Jedes Produkt, das als Summand auftritt, muß genau einen Vektor als Faktor enthalten und das Ergebnis so einer Produktbildung ist ein Vektor.
  - Durch Zahlfaktoren (ungleich Null) kann man teilen.
  - Durch einen Vektor darf man nie teilen.

☐ Welche der folgenden Gleichungen ist unzulässig und wieso? Alle Größen mit Pfeil sind als Vektoren (desselben Raumes) zu interpretieren, alle ohne Pfeil als Zahlen.

$2\left(3\vec{x}+\vec{a}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right) = \vec{x}-7$		$3\vec{x}(7-\vec{b}) = \vec{a}$
$3(\vec{x}7-\vec{b}) = \vec{a}$		$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{\vec{a}}{x}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{a}{\vec{x}}$		$(2+a)(3-b)(\vec{x}-\vec{a}) = \frac{\vec{x}}{(2-a)}$

Bei den korrekten Gleichungen: Welche Umformungen und Vereinfachungen liegen nahe?

Einstieg in das Kapitel 4 in der Reihenfolge des Skriptums, nicht in der der Veranstaltung, die etwas anders lief:

1.) $\boxed{\text{Linearkombinationen und "Zentralformel" Skriptum.}}$

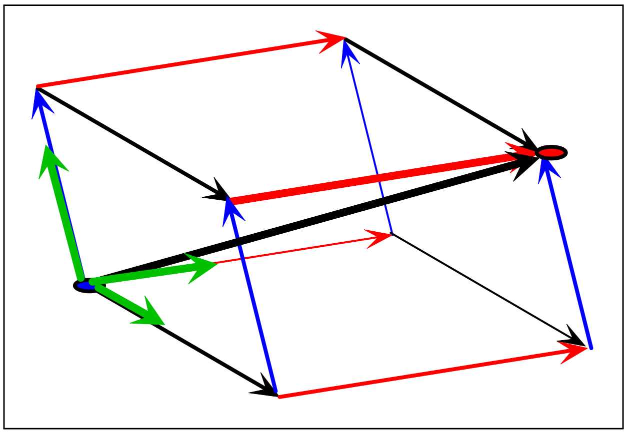
Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gegeben. Dazu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Bilde

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{x}$$

Hier: Von links nach rechts. Klar.

Aber es geht auch umgekehrt in folgendem Sinn: $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ geeignet gegeben. Dann liegen α, β und γ fest, sind eindeutig bestimmbar! *Schluss von der Summe auf den Summanden.*

☐ Fügen Sie in der folgenden Figur Bezeichnungen ein. Wie groß sind hier etwa α, β, γ? Wie erhält msn diese Zahlen geometrisch?

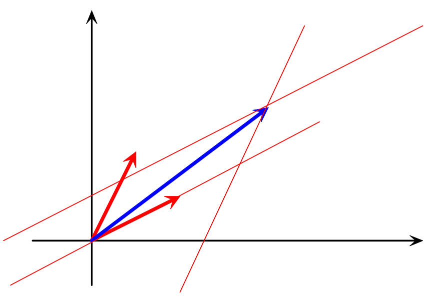


Rechnerisch geht es in beiden Fällen wie folgt vor:

- Starte mit einem gegebenem kartesischen Koordinatensystem K und gebe alle Vektoren in $\mathbb{R}^3_K$ bzw. $\mathbb{R}^2_K$ vor.
- Schreibe (n=3) die Gleichung $\vec{x}^K = \alpha\vec{a}^K + \beta\vec{b}^K + \gamma\vec{c}^K$ in Tupelform.
- Koeffizientenvergleich gibt 3 Gleichungen für α, β, γ.
- Deren Lösung liefert die gesuchten Größen, die Zerlegung.

Beispiel: $\vec{x}^K = (4,3)$ und $\vec{a}^K = (1,2)$ und $\vec{b}^K = (2,1)$

Die graphische Lösung geht über:



Fügen Sie selbst die Bezeichnungen ein und lesen Sie α und β ab.

Die rechnerische Lösung:

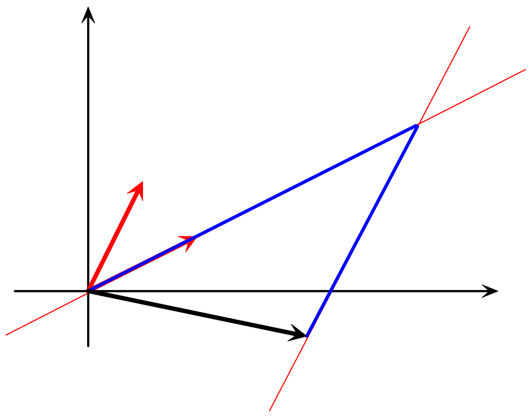
$$\begin{aligned}(4,3) &= \alpha(1,2)+\beta(2,1)\\(4,3) &= (\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Gibt:

4=α+2β	2=3α	$\alpha = \frac{2}{3}$	$\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$
3=2$\alpha + \beta$	5=3β	$\beta = \frac{5}{3}$	

Das stimmt mit der Figur gut überein!

☐ Anders herum: $\vec{a}^K = (1,2)$ und $\vec{b}^K = (2,1)$ Konstruiere graphisch $+3\vec{b}^K - 2\vec{a}^K$: (Auch hier: Bezeichnugen selbst einfügen!!)



Rechenübung mit
$\vec{a}^K$ =(1,2,0), $\vec{b}^K$ =(0,3,0), $\vec{c}^K$ =(1,1,3) und $\vec{x}^K = (5,4,6)$
Lösung: ....

2) $\boxed{\text{Schwerpunkt}}$.

Konfiguration: Gegeben N Massenpunkte mit Massen m_i und Ortsvektoren $\vec{x}_i$ wobei i=1,2,...,N.

Der Schwerpunkt $\vec{x}_S$ dieser Konfiguration ist ein Punkt mit folgender Eigenschaften: Vereinigt man alle Massen in diesem Punkt, punktsystem, dass ein gutes idealisierendes Modell des Gesamtsystems ergibt. Den Ortsvektor $\vec{x}_S$ des Schwerpunktes erhält man dann über folgende Vektorformel:

$$\vec{x}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{x}_i \quad \text{wobei M=}\sum_{i=1}^{N} m_i$$

Beispiele berechnen.

Eigenschaften: Siehe Skriptum, insbes.: Ist tatsächlich ein geb. Vektor!

Bezug zur Zentralformel bei drei Massen:

$$\vec{x}_S = \underbrace{\frac{m_1}{M}}_{\alpha}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{x}_2 + \frac{m_3}{M}\vec{x}_3$$

Bewiesen wurde: Dieser Punkt liegt in der von den drei Punkten aufgespannten Ebene!

Parametrisierung aller Punkte dieser Ebene über die Dreipunkteform, die man noch etwas umformt, **so dass die Form der Zentralformel entsteht:**

$$\begin{aligned}\vec{x}_E(u,v) &= \vec{x}_1 + u(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + v(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)\\ &= (1-u-v)\vec{x}_1 + u\vec{x}_2 + v\vec{x}_3\\ &= \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3 \quad \text{mit } \alpha+\beta+\gamma = 1\end{aligned}$$

Man sieht: Wählt man in der Zentralformel α, β, γ so, dass $\alpha + \beta + \gamma = 1$, dann erhält man einen Punkt in der Ebene. Und im Schwerpunktsfall ist tatsächlich $\frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M} + \frac{m_3}{M} = 1$.

D.h. S liegt in der Ebene der drei Punkte!

Bisher parametrisierte geometrisch- physikalische räumlichen Figuren und die Interpretation der zugehörigen äußeren Parameter

- Gerade g $\quad \vec{x}_g(u) = \vec{a} + u\vec{e}$ wobei......
- Ebene E $\quad \vec{x}_E(u,v) = \vec{a} + u\vec{e} + v\vec{f}$ wobei.....
- Flugparabel $\quad \vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 T + \frac{1}{2}\vec{g}T^2$ mit T=t-t_1 und....
  - Dazu: $\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + \vec{g}T$

Behandelt: Vorgabeproblem: *Was muss jeweils an äußeren Parametern gegeben, damit man die Parametrisierung hinschreiben kann?*

- Übergang der Formeln zwischen V_0^3 und $\mathbb{R}_K^3$. *Beide Richtungen!!*
- Zweipunkteform der Geraden
$$\vec{x}_g(u) = \vec{x}_P + u(\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$$
- Dreipunkteform der Ebene
$$\vec{x}_E(u,v) = ...$$

Angenommen man hat eine bestimmte Flugparabel $\vec{r}(t)$ gefunden. Was für Fragen kann man stellen bzw. liegen nahe? *Da fehlte viel vorstellende Phantasie!!!*

- Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=7 ? Usw.
- Wann und wo trifft er die Horizontalebene bzw. die Ebene mit z=H.
- Wo liegt der Scheitelpunkt?
- Wann und wo hat die vektorielle Geschwindigkeit eine bestimmte Eigenschaft?
- Wie groß ist die vektorielle Geschwindigkeit für t=7??
- Wo und wann trifft er eine gegebene Ebene. Unter welchen Winkel schlägt er in dieser Ebene ein?
- .....usw. .... (Z.B. auch: Wie groß ist der zurückgelegte Weg zwischen zwei Zeiten (Bogenlänge)?)

18.9. 2007

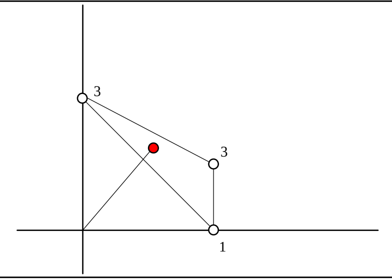
Was läuft im Kurs unbefriedigend???

- **Zu wenig Fragen** von Ihrer Seite. Insbesondere zum Skript! (Siehe Fragen zur Flugparabel! D.h. auch zu wenig "richtige" Nacharbeit). Und dann: **Kampf dem Vergessen!**
- Wechsel allgemeine **Regel-Beispiel** funktioniert noch nicht. (Addition geometr. Pfeile allgemein - Zugehörige neue Beispiele)
- Übersicht: *Wo geht was ein*?

- Heue: Aufgabenformulierung usw. über Tagebuch, aufgabenstellung nicht abschreiben, höchstens Aufgabenstichworte. Aber mitüberlegen, fragen und rechnen - bzw. zu rechnen versuchen.

Rekonstruktionsübung zum Aufwärmen (sollte ohne Nachschlagen beantwortet werden!):

- Formel für den Schwerpunkt von drei Massenpunkten? (Was ist vorzugeben? Was findet man?)
- Unterschied zwischen *Ortsvektor und Koordinatenvektor*?
- Formeln für die Parametrisierung von Geraden und Ebenen im Raum. Bedeutung der zugehörigen äußeren Parameter.
- Formel für die Flugparabel. Bedeutung der äußeren Parameter.?
- Was benötigt man, um ein physikalisches System aus zwei Massenpunkten - dessen Zustand - vernünftig zu beschreiben? (Nicht: *Wie berechnet man das?*) Wo steckt die gesamte Information drin?
- Rechenbeispiel Schwerpunktformel: $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ und $m_3 = 3$. Weiter $\vec{x}_1^K = (0,2,0)$ und $\vec{x}_2^K = (0,0,2)$ und $\vec{x}_3^K = (0,2,1)$. Konfiguration zeichnen, Schwerpunkt bestimmen:



$$\vec{x}_S^K = \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1^K + m_2\vec{x}_2^K + m_3\vec{x}_3^K)$$
$$\vec{x}_S^K = \frac{1}{7}(0,8,9)$$
$$= (0,1.14,1.3)$$

- Verstehe und beweise: *Die Koordinaten des Schwerpunktvektors sind gerade die gewichteten arithm. Mittelwerte der Koordinaten.* Im Falle gleicher Massen darf "gewichtet" fortgelassen werden. Wie sieht die Schwerpunktformel im Falle gleicher Massen aus?

▼ N gleiche Massen m. Dann ist die Gesamtmasse M=Nm und die Zahl m kann gekürzt werden:

$$\begin{aligned}\vec{x}_S^K &= \frac{1}{N}(\vec{x}_1^K + \ldots + \vec{x}_N^K)\\ &= \Big(\underbrace{\frac{1}{N}(x_1 + .. + x_N)}_{\text{arithm. Mittel der x-Koord.!}}, \boxed{\tfrac{1}{N}(y_1 + .. + y_N)}, \boxed{\tfrac{1}{N}(z_1 + .. + z_N)}\Big)\end{aligned}$$

- Was für Figuren können wir bereits parametrisieren? Welche wichtigen Figuren können wir noch nicht parametrisieren?

▼ Es fehlt der Kreis! eine mögliche Parametrisierung ist

$$\vec{x}_{Kreis}^K(\varphi) = (0, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

Wo liegt dieser Kreis? Wie wird daraus eine Spirale?

- Schreiben Sie die folgende Ebenenparametrisierung in geometrischer Form. Was kann man über die Lage der Ebene sagen?

$$\vec{x}_E^K(u,v) = (u, 2v, 2+v)$$

- Was versteht man allgemein unter einer Schnittaufgabe? Sagen wir im physikalischen Raum E^3? (Wieder nicht: Wie löst man...)

Das Schema aus (4.6.9) wurde vereinfacht an die Tafel geschrieben und dann für alle Beispiele benutzt. Es sollte gezeigt werden, wie nützlich das Verständnis eines solchen allgemeinen Verfahrens ist. Als Verdeutlichung von Kap 1.2.

$\boxed{\text{Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene E}}$

Beide Figuren seien durch eine Parametrisierung gegeben (festgelegt):

$$\begin{aligned}\vec{x}_g^K(\alpha) &= (0,0,2)+\alpha(0,1,3) \text{ und}\\ \vec{x}_E^K(u,v) &= (1,0,0)+u(1,0,0)+v(0,-1,1)\end{aligned}$$

- Ungefähre geometrische Lage der beiden Figuren?
- Die einzelnen Schritte formulieren.
- Dann nacheinander durchgehen.

Schnittbedingung:

$$(0,\alpha,2+3\alpha)=(1+u,-v,v)$$

$$\begin{array}{ll} 0=1+u & u=-1\\ \alpha=-v & \alpha=-\frac{1}{2}\\ 2+3\alpha=v & v=\frac{1}{2}\end{array}$$

Einsetzen: $\vec{x}_S^K=\vec{x}_g(-1/2)=(0,-1/2,1/2)=\vec{x}_E^K(-1,1/2)$

Schnitt zweier Ebenen E und F im Raum.

- Was ist vorzugeben? Allgemein - und in diesem speziellen Fall
  - Konkretes numerisches Beispiel (Welche äußeren Parameter?)
  - $\vec{x}_E^K(u,v)=(1+u,-v,v)$ und $\vec{x}_F^K(\alpha,\beta)=(\alpha,\alpha+\beta,3-\beta)$

$\vec{x}_E^K(-4,3-\beta)=(-3,\beta-3,3-\beta)=(-3,-3.3)+\beta(0,1,-1)$

usw.
$\vec{x}_F^K(-3,\beta)=(-3,-3+\beta,3-\beta)$ stimmt

- Das Problem größter Flugweite bei der Flugparabel (als Funktion des Abschusswinkels)

Festlegung der Parabel
$\vec{r}(t)=\square+t\square+\frac{1}{2}\square t^2$ t=T sinnvoll.
$\vec{r}_1=(0,0,0)$ und $\vec{v}_1=V\cdot(0,\cos(\alpha),\sin(\alpha))$
$\vec{g}^K=(0,0,-g)$ Das gibt

$$\boxed{\vec{r}(t)=(0,t V\cos(\alpha),\underbrace{tV sin(\alpha)-\frac{1}{2}gt^2}_{z(t)=0})}$$

Gibt über z(t)=0 als

$$
\begin{aligned}
tV sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\
t_1 &= 0 \text{ und } \boxed{\text{t}_2\text{=}\tfrac{2V}{g}\sin(\alpha)} \\
\vec{r}(t_2) &= (0, \frac{2V^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha), 0) \\
&= (0, \frac{V^2}{g}\sin(2\alpha), 0)
\end{aligned}
$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ wird der größte Wert angenommen.
★ Jetzt die Kugelstoßeraufgabe bis zur zu maximierenden Funktion rechnen: Was ist wie abzuändern?

$$\boxed{\vec{r}(t) = (0,\text{tV}\cos(\alpha)\ ,\text{H}+tV sin(\alpha) - \tfrac{1}{2}gt^2)}$$

$$H + tV\sin(\alpha)\boxed{\text{-}\tfrac{1}{2}\text{g}}t^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
t^2 - 2t \cdot \frac{V}{g}\sin\alpha - \frac{2H}{g} &= 0 \\
t_{12} &= \frac{V}{g}\sin\alpha \pm \sqrt{\frac{V^2}{g^2}\sin^2\alpha + \frac{2H}{g}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W &= y(t_2) = V\cos\alpha\left(\frac{V}{g}\sin\alpha + \sqrt{\frac{V^2}{g^2}\sin^2\alpha + \frac{2H}{g}}\right) \\
&= \frac{V^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha + V\cos\alpha\sqrt{\frac{V^2}{g^2}\sin^2\alpha + \frac{2HV^2g}{g^2V^2}} \\
&= \frac{V^2}{g}\left(\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2Hg}{V^2}}\right) \\
&= \frac{V^2}{g}\left(\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + Q}\right) \quad \text{mit Q=}\frac{mHg}{(\frac{m}{2}v^2)}
\end{aligned}
$$

Kegelschnitte
Was ist womit zu schneiden?
Können wir das im Prinzip?

Vgl. Kap. 4.6d

---

2 Ebenen in 4 Dimensionen schneiden:
$\vec{x}_E(u,v) = (1, u, u+v+1, v)$
$\vec{x}_F(a,b) = (a, a-2b, 1, 2+b)$

1	=a	u=	1-2b						
u	=a-2b	u+v	=0	0=3-b	$\boxed{\text{a=1}}$	$\boxed{\text{b=3}}$	v=5	u=-5	
u+v+1	=1	v=	2+b						
v	=2+b								

Also ein eindeutiger Schnittpunkt. Das liefert uns Information über die Geometrie in 4 Dimensionen. Siehe auch die Aufgabe zum vierdimensionalen Würfel in den Aufgaben zu Kap. 2.

Zwischenmusik

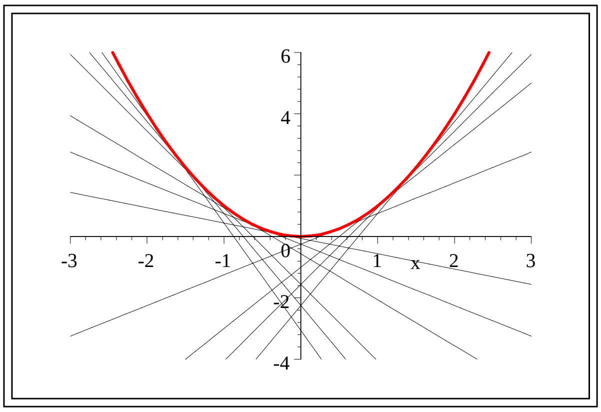
Was ist eine "Geradenschar"? Oder eine "Kurvenschar"?

Beispiel

Bestimme die $\boxed{\text{Schar aller Tangenten an die Parabel } y=x^2}$ über deren Geradengleichung

$$y-a^2 = (2a)(x-a) \quad \text{a ä.P.}$$

$\boxed{y=2ax-a^2}$ Beispiel einer Geradenschar. Die Figur zeigt die Parabel mit einigen der Geraden dieser Schar!



$\boxed{\text{Schnitt zweier Geradenscharen in der Ebene}}$

Es ist über vektorielle Parametrisierungen zu rechnen.

$y = mx + 2$ mit $y=2x+b$ Gleichungsbeschreibung!

Erwartung: Das sind eigentlich unendlich viele Aufgaben, die auf einen Schlag gerechnet werden sollen. **Aber es sind einige Fallunterscheidungen erforderlich!**

1. Vorerwartung zum Resultat: Was für Fälle werden auftreten?
2. Einstieg: Was braucht man?? Was ist gegeben?

$\vec{x}_m(u) = (0,2) + u(1,m) = (u, 2+mu)$
$\vec{x}_b(v) = (0,b) + v(1,2) = (v, b+2v)$
u=v
2+mu=b+2v 2+mu=b+2u $\boxed{(m-2)u=b-2}$

Fall a) $m \neq 2$ Es folgt u=$\frac{b-2}{mi-2} = v$
Fall b) m=2 Jetzt sieht die zu lösende Gl wie folgt aus $\boxed{0u=b-2}$
Fall b1) b=2 $\boxed{0u=0}$ u frei
....b2) $b \neq 2$ unlösbar

Eine einfach Tontaubenaufgabe:
Zwei in der Ebene verlaufende Geschoßbahnen mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit.
Die Abschußzeit des einen ist so zu bestimmen, dass man einen Treffer erhält

$$\vec{T}(t) = \vec{A} + \vec{V}t \quad \text{und} \quad \vec{g}(t) = \vec{B} + \vec{W} \cdot (t - t_A)$$

Kommentar zum Problemtyp!!??!!
Was für Gleichungstyp?
Geschickte Wahl des Koordinatensystems ?
Rollen der verbleibenden Buchstaben?

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \vec{A}^K = (A_1, A_2) \quad \vec{V}^K = (V_1, V_2) \quad \vec{W}^K = (0, W)$$

Das ist über die Koordinatenwahl erfolgt.

$$\vec{T}^K(t) = (A_1 + V_1 t, A_2 + V_2 t)$$
$$\vec{g}^K(t) = (0, W \cdot (t - t_a))$$

$$A_1 + V_1 \boxed{t} = 0 \qquad \text{t=-}\tfrac{A_1}{V_1} \quad \text{für } V_1 \neq 0 \quad \text{Hurrah}$$
$$A_2 + V_2 \boxed{t} = W(\boxed{t - t_A}) \qquad (\text{W-V}_2)t - A_2 = W t_A \quad \text{W} \neq 0$$

$$t_A = \frac{1}{W}\left(-(W - V_2)\frac{A_1}{V_1} - A_2\right)$$

Diskussion des Resultates: Wird die Tontaube wirklich zur Zeit t=0 gestartet? Nicht notwendig! Was bedeutet es, wenn der Abschuss des Geschosses vor dem der Tontaube erfolgt?
Zur Koordinatenwahl: Das geht auch, wenn der Schütze nicht senkrecht nach oben schießt. Die Erdbeschleunigung kommt in dieser Aufgabe nicht vor!
