11. Oktober!

Zuerst die eine Gruppe von Integralen und dann die Substitution des elliptischen Integrales.

$\mathrm{E}_1 = \int_0^1 dx(2+3x)^4$	$\mathrm{E}_2 = \int_1^2 \frac{dx}{(2-3x)^3}$	$\mathrm{E}_3 = \int_0^1 \frac{dx}{(2-3x)^3}$
$\mathrm{F}_1 = \int_a^x du(1+ux)^7$	$\mathrm{F}_2 = \int_{-1}^1 \frac{xdx}{(1+3x^2)^7}$	$\mathrm{F}_3 = \int_0^x du \frac{\cos u}{\sin^4(u)}$
$\mathrm{S}_1 = \int dt\ \cos(\mathrm{at})\sin(\sin(\mathrm{at}))$	$\mathrm{S}_2 = \int \frac{dte^{-xt}}{(1+e^{-xt})}$	$\mathrm{S}_3 = \int da\ \sin^2(xa)$
$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\ \mathrm{x}\sqrt{1-4x^2}$	$\mathrm{I}_2 = \int_0^1 dx\ \mathrm{x}\sqrt{1-4x^2}$	$\mathrm{I}_3 = \int \frac{dt(at+b)}{(t+1)^2}$
$\mathrm{I}_4 = \int \frac{dx}{2x^2-3x+5}$	$\mathrm{I}_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$	$\mathrm{I}_6 = \int_0^A \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}}$
$\mathrm{R}_1 = \int \frac{1+x+x^2}{(x+1)(x-1)}$	$\mathrm{R}_2 = \int dx x^a (\ln x)^2$	$\mathrm{R}_3 = \int dte^{-t}(e^{2t} - 2e^{-2t})$

$\boxed{\mathrm{E}_1 = \int_0^1 dx(2+3x)^4}$ Definiert, $0 \leq E_1 \leq 5^4$ / Mit $1/\alpha$

$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(2+3x)^5|_0^1 = \frac{1}{15}\left(5^5 - 2^5\right) = \frac{1031}{5}$

$\boxed{\mathrm{E}_2 = \int_1^2 \frac{dx}{(2-3x)^3}}$ Definiert! Negativ! $-1 \leq E_2 < 0$ Mit $1/\alpha$

$\mathrm{E}_2 = \frac{1}{-3}\frac{1}{-2}(2-3x)^{-2}|_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) = -\frac{5}{32}$

$\boxed{\mathrm{E}_3 = \int_0^1 \frac{dx}{(2-3x)^3}}$ Nicht definiert, da Pol bei $\frac{2}{3}$im Integrationsbereich!

$\boxed{\mathrm{F}_1 = \int_a^x du(1+ux)^7}$ Definiert Positiv, für x>a und ux>-1. Mit $1/\alpha$

$\mathrm{F}_1 = \frac{1}{x}\frac{1}{8}(1+ux)^8|_{u=a}^x = \frac{1}{8x}\left((1+x^2)^8 - (1+ax)^8\right)$

$\boxed{\mathrm{F}_2 = \int_{-1}^1 \frac{xdx}{(1+3x^2)^7}}$ Definiert, Wert Null, da ungerade Funktion über symm. Bereich inegriert. Berechnung mit U.K.

$\mathrm{F}_2 = \frac{1}{6}\frac{1}{-6}(1+3x^2)^{-6}|_{-1}^1$.....

$\boxed{\mathrm{F}_3 = \int_0^x du \frac{\cos u}{\sin^4(u)}}$ Integrand bei x=0 wie $\frac{1}{u^4}$, Nicht definiert! Stammfunktion über UK.

$\int du \frac{\cos u}{\sin^4(u)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 u}$

$\boxed{\mathrm{S}_1 = \int dt\ \cos(\mathrm{at})\sin(\sin(\mathrm{at}))}$ Mit U.K.

$\mathrm{S}_1 = \frac{1}{a}(-1)\cos(\sin(at))$

$\boxed{S_2 = \int \frac{dte^{-xt}}{(1+e^{-xt})}}$ Mi U.K.!

$S_2 = \frac{1}{-a}\ln(1+e^{-xt})$

$\boxed{S_3 = \int da\ \sin^2(xa)}$ Definiert, Umformung Untegrand$1/\alpha$ oder U.K.

$S_3 3 = \int da\ sin^2(xa) = \int da\frac{1}{2}(1-\cos(2ax)) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4x}\sin(2ax)$

$\boxed{I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\ \mathrm{x}\sqrt{1-4x^2}}$ Definiert, $0<I_1<\frac{1}{2}$ mit UK.

$I_1 = \frac{1}{-8}\frac{2}{3}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{1/2} = \frac{2}{-24}(0-1) = \frac{1}{12}$

$\boxed{I_2 = \int_0^1 dx\ \mathrm{x}\sqrt{1-4x^2}}$ Existeirt nicht.

$\boxed{I_3 = \int \frac{dt(at+b)}{(t+1)^2}}$ Existiert Umformung!

$\int \frac{dt(at+b)}{(t+1)^2} = \int dt\frac{a(t+1)+b-a}{(t+1)^2} = a\int\frac{dt}{t+1} + (b-a)\int\frac{dt}{(t+1)^2}$

$= a\ln|t+1| + (b-a)(-1)\frac{1}{t+1}$

$\boxed{I_4 = \int \frac{dx}{2x^2-3x+5}}$ Umformung! $\mathrm{x}^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 0$

$\int \frac{dx}{2x^2-3x+5} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} = \frac{8}{31}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{16}{31}}(x-\frac{3}{4})\right)^2+1}$

$= \frac{8}{31}\sqrt{\frac{31}{16}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{16}{31}}(x-\frac{3}{4})) = \frac{2}{31}\sqrt{31}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{1}{31}}(4x-3))$

$\boxed{I_5 = \int_?^? \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}}$ gerade, also $\int_0^y dx$ für $0<\mathrm{y}\leq 2$. Dann Substitution $x = 2\sin t$. (1) dx=dt2cost (2)

und $\int_0^y dx \to \int_0^{\frac{1}{2}asn(y)} dt$

Also $I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}asn(y)} \frac{dt\cdot 2\cos(t)}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = ...$ Also besser **gleich direkt**:

$I_5 = \frac{1}{2}\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)|_0^y = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$

$\boxed{I_6 = \int_0^A \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}}}$ U.K. Existiert uneigentlich

$\int_\varepsilon^A \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}} = 2\int_\varepsilon^A du\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{u}}} = 2\cdot 2\sqrt{1+\sqrt{u}}|_\varepsilon^A$ ε nach Null!

$I_6 = 4\sqrt{1+\sqrt{A}}$

$\boxed{R_1 = \int \frac{1+x+x^2}{(x+1)(x-1)}}$ Partialbruch nach Abspaltung:

$\frac{(x^2-1)+x+2}{x^2-1} = 1 + \frac{x+2}{x^2-1}$ Ansatz $\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ Gibt A=$\frac{1}{-2}$ und B=$\frac{3}{2}$. Zusammen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x+x^2}{(x+1)(x-1)} &= \int dx 1 + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\
&= x + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \\
&= x + \ln\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}
\end{aligned}$$

$\boxed{R_2 = \int dx x^a (\ln x)^2}$ Ableiten nach Parameter oder partiell integrieren! Aber a>-1!!!

$$\begin{aligned}
\int dx x^a (\ln x)^2 &= \left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}\cdot(\ln x)^2\right] - \int dx \frac{1}{a+1}x^{a+1} 2\frac{\ln x}{x} \\
&= [...] - \frac{2}{a+1}\int dx x^a \ln x \\
&= [...] - \frac{2}{a+1}\left(\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\ln x\right] - \frac{1}{a+1}\int dx x^{a+1}\frac{1}{x}\right) \\
&= [...] - \frac{2}{(a+1)^2}\left(x^{a+1}\ln x - \frac{1}{a+1}x^{a+1}\right) \\
&= \frac{x^{a+1}\ln^2 x}{a+1} - \frac{2x^{a+1}\ln x}{(a+1)^2} + \frac{2x^{a+1}}{(a+1)^2} \\
&= x^{a+1}\left(\frac{\ln^2 x}{a+1} - \frac{2\ln x}{(a+1)^2} + \frac{2}{(a+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{R_3 = \int dt e^{-t}(e^{2t} - 2e^{-2t})}$ Existiert! U.K! oder Direkt

$\int dt e^{-t}(e^{2t} - 2e^{-2t}) = -\int dt(-e^{-t})(\frac{1}{(e^{-t})^2} - 2(e^{-t})^2)$

$= -\left(-\frac{1}{e^{-t}} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right) = e^t + \frac{2}{3}e^{-3t}$

Oder besser: $\int dt e^{-t}(e^{2t} - 2e^{-2t}) = \int dt(e^t - 2e^{-3t}) = ...$

Ein elliptisches Integral:

Was ergibt die Substitution x=a+(b-a)sin$^2\varphi$ für das Integral $\int_u^o \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ wobei p(x)=(x-a)(x-b)(x-c) ist und $\boxed{a<b<c}$ sowie a<u<o<b?

Die Substitution:

1. x=a+(b-a)sin$^2\varphi$ Für a<x<b ist offensichtlich p(x)>0. Dabei geht φ von 0 (x=a) nach $\frac{\pi}{2}$ (x=b) und die Funktion ist inverteirbar. Die Grenzen liegen in diesem Bereich. $\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ wird sonst nicht benötigt.
2. dx=d$\varphi\cdot$ 2(b-a)sinφ cosφ (Nicht zu fassen, das klappt z.T. immer noch nicht!)
3. $\int_u^o dx \to \int_\Phi^\Psi d\varphi$ gemäß 1.)

Jetzt muss p(x(φ)) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x-a &= (b-a)\sin^2\varphi \\ x-b &= (a-b)+(b-a)\sin^2\varphi = (b-a)(-\cos^2\varphi) \\ x-c &= (a-c)+(b-a)\sin^2\varphi = (a-c)\left(1-\frac{b-a}{c-a}\sin^2\varphi\right) \end{aligned}$$

Es ist auf die Vorzeichen zu achten. Speziell ist b-a>0, c-a>0 usw. Jetzt alles einsetzen gibt mit $k^2 = \frac{b-a}{c-a}$ und $0<k^2<1$:

$$\int_u^o \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \frac{2(b-a)}{(b-a)(\sqrt{c-a})}\int_\Phi^\Psi \frac{d\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$$

Also insgesamt:

$$\boxed{\int_u^o \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{c-a}}\int_\Phi^\Psi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}$$

Eine bemerkenswerte Umformung!