$$J_1 = \int dx \frac{x}{1+x^4} = \int dx \frac{x}{1+(x^2)^2} = ....$$
$$J_3 = \int dx \frac{x^3}{1+x^4} = ...$$
$$J_2 = \int \frac{x^2}{1+x^4} dx = \text{(Partialbruch)}$$

$$J_3 = \int dx \frac{x^4}{1+x^4} = \int dx \frac{\left(x^4+1\right)-1}{x^4+1} = ... \qquad J_n = \int dx \frac{x^n}{x^4+1} ?????$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{x^2}$ | Dir. | $\frac{2}{9} \leq I_1 \leq 2$ | $\frac{2}{3}$ | |
| $I_2 = \int_1^3 \frac{dx}{(1-2x)^2}$ | $1/\alpha$ | $\frac{2}{25} \leq I \leq ..$ | $\frac{2}{5}$ | |
| $I_3 = \frac{-1}{4} \int_1^3 dx \frac{-4x}{(1-2x^2)^3}$ | UK y=1-2x$^2$ | | | |
| $I_4 = \frac{1}{2} \int_1^3 dx \frac{2e^x}{(1+2e^x)^2}$ | UK y=1+2e$^x$ | | | |

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \int_1^3 dx x^{-2} = -1 \left[x^{-1}\right]_1^3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{(1-2x)^2} dx = -\frac{1}{2}(-1)(1-2x)^{-1}|_1^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}+1\right) = \frac{2}{5}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I_5 = \int_0^\pi dt \sin(t)$ | Dir | | | |
| $I_6 = \int_0^{\frac{1}{2}T} dt \sin(\omega t) \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$ | $1/\alpha$ | | | |
| $I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}T} \frac{dt \cos(\omega t)}{1+\sin^2(\omega t)} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$ | UK | | | |
| $I_8 = \int_0^{\frac{1}{2}T} \frac{dt \cos(\omega t)}{4-\sin^2(\omega t)} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$ | UK,PB | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I_9 = \int_0^A dt e^{-at}$ | $1/\alpha$ | | | |
| $I_{10} = \int_0^A dt\ te^{-at}$ | Part.I | | | |
| $I_{11} = \int_0^A dt\ te^{-at^2}$ | UK | | | |
| $I_{12} = \int_0^A dt\ t^3 e^{-at}$ | $3\times partiell$ | | | |

$$\int_0^A t^3 e^{-at} dt = -\frac{e^{-aA}a^3A^3+3e^{-aA}a^2A^2+6e^{-aA}aA+6e^{-aA}-6}{a^4}$$
$$\frac{-1}{a^4}\left(e^{-aA}\left(a^3A^3+3a^2A^2+6aA+6\right)-6\right)$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I_{13} = \int dx \frac{1}{x^2-a^2}$ | Partialbr | | | |
| $I_{14} = \int dx \frac{1}{x^2+a^2}$ | atn, direkt | | | |
| $I_{15} = \int dx \frac{1}{x^2-2x+1}$ | Umf, Dir | | | |
| $I_{16}(a) = \int dx \frac{1}{x^2-2x+a}$ (Fallunter-scheidung) | 3 Fälle! | | | |

Weiter Beispiele für Umkehrung Kettenregel

$$K_1 = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-a\sqrt{t}} \qquad K_2 = \int du a^u = \int du e^{u \ln(a)}$$
$$K_3 = \int ds \frac{e^{atn(s)}}{1+s^2} = \int ds \left(\frac{1}{1+s^2}\right) e^{atn(s)} = e^{atn(s)}$$

$$g'(s) = \frac{1}{1+s^2} \quad g(s)=atn(s)=y \quad f(y)=e^y = F(y)$$

Beachte: Durch die Substitution t=x$^2$ wurde aus $\int dx e^{-ax^2}$ das Integral

$$\int e^{-ax^2} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-at} dt$$

Das ist also im Gegensatz zu $K_1$ nicht harmlos!

| | | |
|---|---|---|
| $E_1 = \int_0^1 dx(2+3x)^4$ | $E_2 = \int_1^2 \frac{dx}{(2-3x)^3}$ | $E_3 = \int_0^1 \frac{dx}{(2-3x)^3}$ |
| $F_1 = \int_a^x du(1+ux)^7$ | $F_2 = \int_{-1}^1 \frac{xdx}{(1+3x^2)^7}$ | $F_3 = \int_0^x du \frac{\cos u}{\sin^4(u)}$ |
| $S_1 = \int dt\ \cos(at)\sin(\sin(at))$ | $S_2 = \int \frac{dte^{-xt}}{(1+e^{-xt})}$ | $S_3 = \int da\ \sin^2(xa)$ |
| $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\ x\sqrt{1-4x^2}$ | $I_2 = \int_0^1 dx\ x\sqrt{1-4x^2}$ | $I_3 = \int \frac{dt(at+b)}{(t+1)^2}$ |
| $I_4 = \int \frac{dx}{2x^2-3x+5}$ | $I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$ | $I_6 = 2\int_0^A \frac{du}{2\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}}$ |
| $R_1 = \int \frac{1+x+x^2}{(x+1)(x-1)}$ | $R_2 = \int dx x^a(\ln x)^2$ | $R_3 = \int dte^{-t}(e^{2t}-2e^{-2t})$ |

---

Einige weitere Aufgaben und Beispiele:

■ 1) Berechnen Sie das folgende Integral einmal direkt über "Umkehrung der Kettenregel" und einmal mit Hilfe der Substitution u=cost :

$$I = \int_0^\pi \frac{dt\ \sin(t)}{1+3\cos^2(t)}$$

■ 2) Wandeln Sie das folgende Integral mit der ( Eulerschen ) Substitution u=x+$\sqrt{x^2-x-2}$ in ein lösbares Integral um. Über welche x>0 darf integriert werden?

$$J = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-2}}.$$

a) Geben Sie eine numerische Abschätzung des Integrales ( 0$\leq J \leq A$ Wert von A?)

■ 3) Diskutieren Sie die Substitution u=tan($\frac{x}{2}$) . Was leistet Sie?

▼ Man kann dadurch rationale Funktionen von sin und cos in rationale Funktionen umwandeln

Die dazu benötigten Schritte:

(1) u=tan$\left(\frac{x}{2}\right)$ x=2tan$^{-1}(u)$ sinx=$\frac{2u}{1+u^2}$ und cosx=$\frac{1-u^2}{1+u^2}$

Der Weg zu (1):

a) sin(y)=$\frac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$ und cosy=$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$ wurde berechnet. Also

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ und $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ Noch Wurzeln!

b) Es galt sin(x)=2sin($\frac{x}{2}$)cos($\frac{x}{2}$) sowie cos(x)=$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$.

c) Einsetzen gab die wurzelfreien Formeln aus (1). Test:

$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} + \frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2} = 1$ Stimmt!

▲▲

■ 4) Berechnen Sie I(A)=$\int_0^A dx\ \sqrt{1+x^2}$ mit Hilfe der Substitution x=sh(u)=$\frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$.

a) Wie ist die Substitution abzuändern für $\int_0^A dx\ \sqrt{1+ax^2}$ mit a>0?

b) Probieren Sie es alternativ mit der Substitution $\sqrt{a+bx+cx^2} = xt + \sqrt{a}$, die natürlich wieder von Euler ist.

c) Was ergibt die (erste) Substitution für das Integral $\int_0^1 dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ , was für $\int_0^1 dx(1+x^2)^2$ ?

■ 5) Durch direkte Integration findet man $\int_{-1}^2 dxx^2 = ... = 3$. Verifizieren Sie das. Mit der Substitution u=x$^2$ dagegen folgt

$$\int_{-1}^2 dxx^2 = \int_1^4 du\frac{u}{2\sqrt{u}} = .. = \frac{7}{3}.$$

Was ist passiert??

---