9.Oktober: Integrationstechnik.

Unterschiedliche Integraqtionswege können zu unterschiedlichen Stammfunktionen führen. Daher Vorsicht mit der Schreibweise $\int dx f(x)$. Das wurde am Beispiel von F(x)=$\int dx \sin(x)\cos(x)$ gezeigt. eine Stammfunktion wurde auf drei Weisen bestimmt:

1. $\mathrm{F}_1(x) = -\int dx \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)} \cdot \cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$ (f(y)=y, g(x)=cosx)

2. $\mathrm{F}_2(x) = \int dx \underbrace{(\cos x)}_{g'(x)} \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos^2 x)$ (f(y)=y, g(x)=sinx)

3. $\mathrm{F}_3(x) = \int dx(\cos x)\cdot \sin x = \frac{1}{2}\int dx \sin(2x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$
$$= \frac{1}{4}(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}(1-2\cos^2 x)$$

■ 1) Einige Umformungen des Integranden. Was folgt jeweils?

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} &= \frac{1}{\cos(x)} \\ \tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin(x)\cdot\frac{1}{\cos x} \\ & \frac{1}{1+e^x} \text{ mit } \mathrm{e}^{-x} \text{ erweitern!} \end{aligned}$$

Z.B. (Umkehrung Kettenregel):

$$\int dx \tan(x) = -\int dx \frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln|\cos(x)|$$

■ 2) Berechnen Sie mit partieller Integration folgende Integrale

$\int_0^T dt t e^{at}$	$\int_0^a dx x^2 \sin x$	$\int_0^A dx atn(x)$	$\int_0^A dx asn(x)$

Etwa:

$$\int_0^T dt \underset{weg}{t}\, e^{at} = \left[t\cdot\frac{1}{a}e^{at}\right]_0^T - \int_0^T dt\cdot 1\cdot\frac{1}{a}e^{at} = ...$$

und

$$\int_0^A dx atn(x) = \int_0^A dx 1\cdot atn(x) = [x atn(x)]_0^A - \int_0^A dx x\cdot\frac{1}{1+x^2} = ...$$

Notizen zu den Partialbrüchen:
Einfache reelle Nullstellen:

$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ gibt A=-B=$\frac{1}{2}$.

Also $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)$

Zwei einfache komplexe Nullstellen:

Der Rechner lieferte:

$$\frac{1}{(x^2+1)((x-1)^2+4)} = \frac{1}{10}\frac{2+x}{x^2+1} - \frac{1}{10}\frac{x}{x^2-2x+5}$$

Unsere Rechnung

- Ansatz: $\frac{1}{(x^2+1)((x-1)^2+4)} = \frac{A_1(x-0)+B_1}{(x-0)^2+1} + \frac{A_2(x-1)+B_2}{(x-1)^2+4}$
- Bestimmung (x^2+1).... Nullstelle ist x=i

$$\frac{1}{2}\frac{2+i}{5} = \frac{1}{-2i+4} = \frac{1}{(i-1)^2+4} = A_1 i + B_1$$

$$\boxed{B_1 = \frac{1}{5} \quad A_1 = \frac{1}{10}}$$

und:

$(x-1)^2 + 4 \qquad x=1+2i$

$$\frac{1}{2}\frac{(-1-2i)}{5} = \frac{1}{2}\frac{1}{-1+2i} = \frac{1}{-2+4i} = \frac{1}{(1+2i)^2+1} = A_2(2i) + B_2$$

$$\boxed{B_2 = -\frac{1}{10} \quad A_2 = -\frac{1}{10}}$$

Ergebnis: $\boxed{\frac{1}{(x^2+1)((x-1)^2+4)} = \frac{1}{10}\left(\frac{x+2}{x^2+1} - \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2+4}\right)}$

Probe: $\frac{1}{10}\left(\frac{x+2}{x^2+1} - \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2+4}\right) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}$ Stimmt!

Die Stammfunktion:

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+1)((x-1)^2+4)} = \frac{1}{10}\left(\int dx \frac{x+2}{x^2+1} - \int dx \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2+4}\right)}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\int dx \frac{x}{x^2+1} + \int dx \frac{2}{x^2+1} - \int dx \frac{(x-1)}{(x-1)^2+4} - \int dx \frac{+1}{(x-1)^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2atn(x) - \frac{1}{2}\ln((x-1)^2+4) - \frac{2}{4}atn(\frac{x-1}{2})\right)$$

Mit unserer form des Ansatzes lassen sich alle diese Integrale sofort angeben!

Problem: Faktorisierung des Nenners! Beispiel: I=$\int \frac{dx}{1+x^4}$

Wir bestimmen (raten usw) zunächst die vier Nullstellen. Das sind:

$x^4+1=0$, Solution is: $\left\{x = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}, \left\{x = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}}\right\},$
$\left\{x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$

Sie sind paarweise zueinander komplex konjugiert! Die Linearfaktoren der komplex konjugierten Nullstellen fassen wir zusammen. Allgemein:

$$\begin{aligned}(x-(a+ib))(x-(a-ib)) &= ((x-a)-ib)((x-a)+ib)\\ &= ((x-a)^2+b^2)\end{aligned}$$

Das ist es, was wir für den Partialbruchansatz brauchen!

In unserem Fall (nach einigen Rechenfehlern)

$$\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)\right)$$

$$\left((x-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)\right)\left((x-\frac{1}{2}\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)\right)$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)\right)$$

$\boxed{=(x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}}$ und analog für die beiden anderen

$$\boxed{(x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

Probe: O.k.

$$x^4+1=\left((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\right)\left((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\right)$$

Also

$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{dx}{\left((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\right)\left((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\right)}$

Und jetzt (erst) kann das eigentliche Partialbruchschema starten!!

Ansatz:

$\frac{1}{\left((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\right)\left((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A_1(x+\frac{1}{2}\sqrt{2})+B_1}{(x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{A_2(x+\frac{1}{2}\sqrt{2})+B_2}{(x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}}$

usw.!!!
