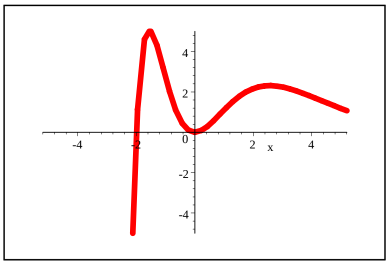
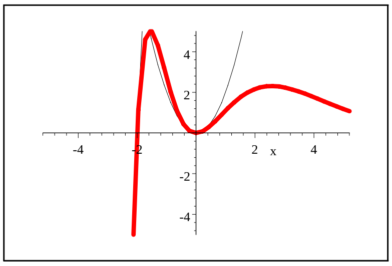
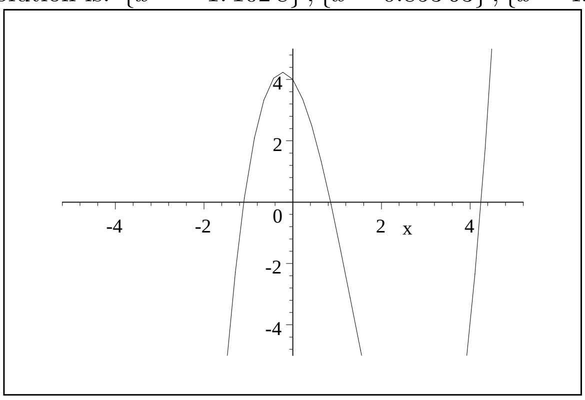
Kurvendiskussion von $\boxed{\text{f(x)}=x^2e^{-x}(2+x)}$

- Überall definiert $\quad\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
- keine Symmetrie
- Dominanz e^{-x} : bei $\pm\infty$ und 2x^2 bei x=0
- Nullstellen x=0, x=-2
- Vorzeichen -/+ Wechsel bei -2
- Verhalten bei 0 wie x^2 $(1\cdot(2+0))$
- Verhalten bei -2 wie $4e^2(x+2)=29.5(x+2)$
- Skizze!
- Offen: Lage der Extremwerte - **Art liegt fest!!**
- 



- Ableitung $\boxed{\frac{d}{dx}x^2e^{-x}(2+x)=-xe^{-x}\left(-4-x+x^2\right)}$ (Produktregel, Ausklammern!)
  - **Nullstellen** x=0, x^2-x-4, Solution is: $\left\{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}\right\},\left\{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}\right\}$
  - Werte: ..Bei Bedarf.
- Wendepunkte.... 3 Stück!!!
  Näherungsweise bestimmen

2.Ableitung$=\frac{d}{dx}xe^{-x}\left(-4-x+x^2\right)=-4e^{-x}+2xe^{-x}+4x^2e^{-x}-x^3e^{-x}$
$\boxed{\text{f}''(x)=-e^{-x}\left(4-2x-4x^2+x^3\right)}$
Nullstellen des Polynomfaktors:
$\boxed{4-2x-4x^2+x^3=0}$, Solution is: $\{x=-1.1028\},\{x=0.85363\},\{x=4.2491\}$



Näherungsweise Berechnung mit Newton: $\boxed{\Delta x = -\frac{f(x)}{f\ '(x)}}$ Wie merken??
Ziel: Nullstelle in der Nähe von x=1 bestimmen:

- y=x$^3 - 4x^2 - 2x + 4$ y' =3x$^2 - 8x - 2$

$$\Delta x = -\frac{f(x)}{f\ '(x)} = -\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{3x^2 - 8x - 2}$$

- Für x=1 (Start): $\Delta x = -\frac{-1}{-7} =$ $\boxed{x_1 = \frac{6}{7} = \boxed{0.857}14}$
- Nächster Schritt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6}{7} \quad \Delta x = \frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{3x^2 - 8x - 2} = \frac{4}{1141} \\ x_2 &= \frac{6}{7} + \frac{4}{1141} = \frac{982}{1141} = 0.860\,65 \end{aligned}$$

statt 0.85363..... exakt

-

$$\begin{aligned} x &= \frac{982}{1141} \quad \Delta x - \frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{3x^2 - 8x - 2} = -\frac{34\,658\,984}{4948\,794\,263} \\ x_3 &= \frac{982}{1141} - \frac{34\,658\,984}{4948\,794\,263} = \frac{4224\,513\,642}{4948\,794\,263} = \boxed{0.853\,6}5 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{1+x^4} = -2x\frac{-1+x^4}{(1+x^4)^2} = 2x\frac{1-x^4}{(1+x^4)^2}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = 2\frac{1+3x^8-12x^4}{(1+x^4)^3}$$

Sonntagsübungen

■ 3) Was für eine geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben:

$$p = (\mathbb{R}_K^3, (x,y,z) \mapsto (x,y,0), \mathbb{R}_K^3)\ ?$$

Was ergibt sich für $p \circ p$?
▼ p beschreibt die senkrechte Projektion auf die x-y-Ebene.
Beachte: p(y,x,z)=..... p(x+y,0,x+y+z)=...... Also

$$(p \circ p)(x,y,z) = p(p(x,y,z)) = p(x,y,0) = (x.y,0).$$

D.h. $\boxed{\text{p}\circ p = p}$.
Denkfigur: Zwei Abbildungen sind gleich, wenn sie als Tripel gleich sind. Und das heißt:....
▲
■ 4) Welche geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben

$$r = (\mathbb{R}_K^2, (x,y) \mapsto (-y,x), \mathbb{R}_K^2)\ ?$$

Bestimmen Sie $r\circ r$ rechnerisch und geometrisch? Existiert die inverse Abbildung zu r? Wenn ja, wie sieht sie aus?

▼ r beschreibt eine Drehung (im positiven Sinn) um $\frac{\pi}{2}$.. Es folge r(r(x,y))=r(-y,x)=(-x,-y)=-(x,y). Das ergibt den entgegengestztten Vektor. Also $\boxed{\mathrm{r}\circ r = -id_{\mathbb{R}^2_K}}$.

D.h die inverse Abbildung ist einfach p$^{-1} = p\circ p\circ p$. (Vgl. komplexe Zahlen, Multiplikation mit i.)
▲

■ 8) "Vorstellungsskizze" : Gegeben der Einheitskreis und darauf ein Punkt P mit Polarwinkel θ. Weiter sei S der "Startpunkt" auf dem Kreis zum Winkel $\theta = 0$. Wir können P und S einmal durch den zugehörigen Bogen auf dem Einheitskreis verbinden oder durch die (kürzere) Verbindungsstrecke. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der folgenden Zuordnung

$$\theta \mapsto \text{Länge des Verbindungsbogens-Länge der Verbindungsstrecke}$$

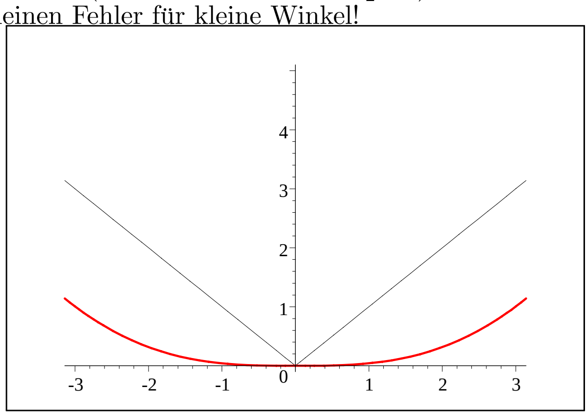
Gehen Sie aus von der anschaulichen Vorstellung dieser Größen. Leiten Sie anschließend einen Rechenausdruck für den Funktionswert her.

▼ Zur Skizze: Zeichne $\theta \longmapsto \theta.$ als Orientierung. Für $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ liegt der Wert auf dieser Geraden. Für $\theta = \pi$ ist der Wert $\pi - 2 \approx 1.14$, also viel weniger. Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ ist er $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \approx 0.16, also$ sehr klein. Für $\theta - Werte$ außerhalb müßte man weiter überlegen.

Eine Skizze gibt sofort für die Verbindungstrecke $2\sin\frac{\theta}{2}$. Also ist die gesuchte Funktion :

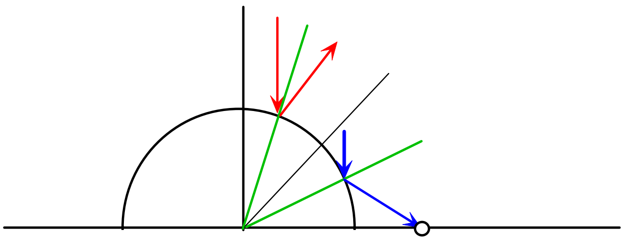
$\theta \longmapsto \theta - 2\sin\frac{\theta}{2}$. Damit folgt:: $\left([-\pi,\pi], \longmapsto |\theta| - 2|\sin\frac{\theta}{2}|, \mathbb{R}\right)$

Man erhält einen sehr kleinen Fehler für kleine Winkel!



---

1) Polarparametrisierung der Punkte der oberen Kugelhälfte: $\vec{x}^P(\theta,\lambda) = R\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\lambda\\ \sin\theta\sin\lambda\\ \cos\theta\end{pmatrix}$. Die folgende skizze zeigt die Geometrie der Konfiguration:



Als Parameter wählen wir besser den Abstand r des einfallenden Strahles von der Polarachse. Es ist r=R$\sin\theta$. Also $\sin\theta = \frac{r}{R}$ und $\cos\theta = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 - r^2} \geq 0$.

Das gibt die folgende Parametrisierung der Punkte der Kugeloberfläche:

$$\boxed{\vec{y}(\mathrm{r},\lambda) = \begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ \sqrt{R^2 - r^2} \end{pmatrix}}.$$

2) Der einfallende Strahl hat den Richtungsvektor $-\vec{e}_3$. Dann ergibt sich der Richtungsvektor des reflektierten Strahles (gemäß $\vec{r} = \vec{e} - 2\vec{p}$, $\vec{p}$ parallele Komponente zu $\vec{e}$) zu:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\frac{-\sqrt{R^2 - r^2}}{R^2} \begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ \sqrt{R^2 - r^2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R^2} \begin{pmatrix} 2r\cos\lambda \\ 2r\sin\lambda \\ \frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \end{pmatrix}$$

Der Vorfaktor kann im Richtungsvektor fortgelassen werden. Es bleibt:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 2r\cos\lambda \\ 2r\sin\lambda \\ \frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \end{pmatrix}$$

3) Dann ist $\vec{x}_{ref}(\alpha) = \vec{y}(r,\lambda) + \alpha\vec{R}$ eine Parametrisierung der reflektierten Geraden. In Tupelform:

$$\vec{x}_{ref}(\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ \sqrt{R^2 - r^2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2r\cos\lambda \\ 2r\sin\lambda \\ \frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 + 2\alpha)\cos\lambda \\ r(1 + 2\alpha)\sin\lambda \\ \frac{(R^2 - r^2) + \alpha(R^2 - 2r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \end{pmatrix}$$

4) Der Schnitt mit der Horizontalebene (z=0) erfolgt bei $\boxed{\alpha_S = \frac{R^2 - r^2}{2r^2 - R^2}}$. Da nur $\alpha_S \geq 0$ zugelassen ist, muss $\boxed{\frac{1}{2R^2} \leq r^2 \leq R^2}$ gelten! Also $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

Eingesetzt gibt das den Schnittpunkt: (1+2$\alpha_S = \frac{R^2}{2r^2 - R^2}$) :

$$\boxed{\boxed{\vec{x}_{ref}(\alpha) = \frac{rR}{2r^2 - R^2} \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Das stimmt nit der geometrischen Vorerwartung für die beiden Grenzfälle r=R und r=$\frac{1}{\sqrt{2}}R$ überein!.Nur für die dazwischen liegenden r triffr der reflektierte Strahl physikalisch die Ebene.

$\boxed{\text{f(x)}=\frac{x^2}{1+x^4} \quad \text{Kurvendiskussion}}$

- Für alle x definiert.
- Nullstelle bei x=0 mit Approximation $\approx x^2 \cdot \frac{1}{1+0}$
- Gerade Funktion.
- Geht nach Null für große x.(Angenähert wie $1/\mathrm{x}^2$)
- Ist für x>0 stets positiv.
- Also wenigstens ein Maximum für x>0.
- $\boxed{\text{Zusammenfassende Skizze!}}$......

- Ws bleibt: Lage des Maximums (x>0) und der beiden Wendepunkte. Gezielt bestimmen:
  $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{1+x^4} = 2x\frac{1-x^4}{(1+x^4)^2}$ und $\frac{d}{dx}\frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = 2\frac{3x^8-12x^4+1}{(1+x^4)^3}$. 3
- Also liegt das Maximum bei x=1 mit Wert $\frac{1}{2}$. **Sehr flach!!!!**
- Die Wendepunkte ergeben sich über $u^2 - 4u + \frac{1}{3} = 0$ $(u_{12} = 2 \pm \sqrt{4-\frac{1}{3}} = x_{12}^4)$ *Nur* die positiven Lösungen $\boxed{x_1 = \sqrt[4]{2-\sqrt{4-\frac{1}{3}}}} = 0.540$ *und* $\boxed{x_2 = \sqrt[4]{2+\sqrt{4-\frac{1}{3}}}} = 1.41$
- Der Graph: