Tagebuchbereich zum Vorkurs Mathematik 2007

Die Bernoullische Ungleichung:

Sei x>-1 und n=1,2,3,,... **Dann** gilt

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$$

Beweis mit vollständiger Induktion.

Die Ungleichung ist trivial für n=1. Sie sei jetzt bereits bewiesen für k=1,....,n-1. Insbesondere gilt also:

$$(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x \qquad (*) \text{ oder } A_{n-1}$$

Damit zu zeigen:

$$(1+x)^n \overset{(?)}{\geq} 1+nx \qquad (A_n)$$

Wir rechnen zulässig wie folgt:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \quad \text{Termumformung} \\ &\geq (1+(n-1)x)(1+x) \quad \text{mit } (*) \text{ und.da } (1+x) \geq 0.. \\ &= 1+nx+(n-1)x^2 \quad \text{Termumformung} \\ &\geq 1+nx \quad \text{Also gilt tatsächlich } A_n \text{ nämlich } \boxed{(1+x)^n \geq 1+nx.} \end{aligned}$$

11.9. **Aufwärmübungen** :

Bestimmen Sie mit (Hilfe der rekursiven Formel) $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ für n=1,2,3,... und (dem Anfangswert) $W_0 = \frac{\pi}{2}$ eine explizite Formel für W_{2p} (p=1,2,3,...).

Kurze gleichwertige Formulierung:

Es gelte $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ und $W_0 = \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie W_{2p} für p=1,2,3,...

"Termumformung" und "Gleichungsumformung" und "Äquivalenzumformung einer Gleichung". Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Jede Termumformung liefert eine gültige Gleichung
- Jede Gleichungsumformung entsteht aus einer Termumformung
- Eine Termumformung einer Seite einer Gleichung liefert eine Gleichungsumformung

Welche $\boxed{\text{allgemeinen Rechenregeln für Zahlen}}$ rechtfertigen die folgenden $\boxed{\text{Termumformungen}}$? (3 Stück). Dabei werden auch Gleichungsumformungen benutzt. Welche zusätzliche Bedingung (für a) ist noch erforderlich?

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = |a|\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Es ist die allgemeine Methode aus (1.2.30) zu benutzen:

Man startet mit einer gültigen Gleichung.

An dieser nimmt man sukzessive zulässige Termumformungen oder zulässige Gleichungsumformungen. Steht dann am Ende die gesuchte (behauptete, zu beweisende) Gleichung, ist selbige bewiesen!

Starten Sie mit der gültigen Gleichung

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Kap. 1.2: Wie rechnet man mit Zahlen?

- Grundregel (Axiom) - Gebrauchsregel
- Distributivgesetze (Beispiel einer Grundregel, eines Axioms)
- Funktion: Herleitung weitere gültiger Termumformungen bzw. Formeln
- Gebrauchsregel "Jeder mit Jedem".
  - Übung: Drei Faktoren ....
  - Bilanzierungsschema ....
- Anwendungsmethoden
  - Gleichungsumformung
  - Gezieltes Ausklammern
- **Binomialsatz**
  - Problem und Formbestimmung, Einführung einer Bezeichnung
  - Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten
  - Explizite Formel für die Binomialkoeffizienten Beweis: Siehe Beispielaufgaben
  - Übungsaufgaben und Hypothese zur Verallgemeinerung
- Zu merkende Formeln.

□ (1.2.11) Gezieltes **Ausklammern**: Klammern Sie so aus, dass die rechts angegebene Form entsteht:

$$\frac{4x^3}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} - \frac{12x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{8}{x}\sqrt{x^2+a^2} = \frac{...}{....} \text{ [Polynom in x]}$$

Hinweis: Auszuklammern ist der Faktor $\frac{4}{x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$. **Können Sie eine allgemeine Regel abstrahieren,** so dass die Form der rechten Seite entsteht? Was bringt es, wenn man aus $\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b + \frac{3}{4}c$ den Faktor $\frac{1}{12}$ ausklammert?

▼ A sei abkürzende Bezeichnung für den Ausdruck.

Man sollte die "höchsten Nennerpotenzen" und eventuelle gemeinsame Zählerfaktoren ausklammern. Dann muß man **in jedem Summanden (im Kopf) so erweitern**, bis die höchsten Nennerpotenzen erreicht sind. Bei uns ist der höchste Nennerfaktor vom Wurzeltyp $\sqrt{(x^2+a^2)^3}$. Den wollen wir zunächst ausklammern. Das geht vielfach in einem Schritt. Wir deuten den Zwischenschritt an mit $\boxed{\text{Kasten}}$ um den jeweiligen Erweiterungsfaktor. Beachte: $\sqrt{(x^2+a^2)^3}$ $=(\mathrm{x}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4x^3}{\boxed{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}} - \frac{12x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{8}{x}\sqrt{x^2+a^2} \\ &= \frac{4x^3\boxed{1}}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} - \frac{12x\boxed{\sqrt{x^2+a^2}^2}}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3} + \frac{\frac{8}{x}\sqrt{x^2+a^2}\boxed{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3}}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\left[4x^3 + 12x(x^2+a^2) + \frac{8}{x}(x^2+a^2)^2\right] \end{aligned}$$

Jetzt sehen wir, dass wir auch noch $\frac{1}{x}$ hätten ausklammern müssen! Wir nehmen $\frac{4}{x}$. Mit derselben Methode finden wir

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{x\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\left[x^3\boxed{x} + 3x(x^2+a^2)\boxed{x} + 2(x^2+a^2)^2\boxed{1}\right] \\ &= \frac{4}{x\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\left[6x^4 + 7x^2a^2 + 2a^4\right] \end{aligned}$$

Die angegebene Endform erhält man über eine kleine Nebenrechnung. So wie hingeschrieben ist die Rechnung zu lang. Viele der Zwischenschritte lassen sich mit etwas Konzentration im Kopf ausführen, wenn man sich an die gegebene Regel hält "Erweitern, bis überall der gewünschte Hauptnenner entsteht". In unserem Fall würde der schriftlich formulierte Teil dann so aussehen (mit entsprechend kurzer Bearbeitungszeit):

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{4x^3}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} - \frac{12x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{8}{x}\sqrt{x^2+a^2} \\ &= \frac{4}{x\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\left[x^4 + 3x^2(x^2-a^2) + 2(x^2+a^2)^2\right] \\ &= \frac{4}{x\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\left[6x^4 + 7x^2a^2 + 2a^4\right] \end{aligned}}$$

Ein Beispiel einer Gleichungsumformung, bei dem "der Weg zurück" nicht durchgeht. die unzulässige Stelle ist markiert.

$$\begin{array}{ll} \Downarrow & \sqrt{x}+x=1 \\ \Downarrow & \sqrt{x}=1-x \\ \Downarrow & x=1-2x+x^2 \quad \Uparrow \text{ unzulässig!!!} \\ \Downarrow & \mathrm{x}^2-3x+1=0 \\ & \mathrm{x}_{12}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array}$$

Die numrische Berechnung gibt

$$\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=4.236\ldots\neq 1$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}=1.0$$

D.h. eine der beiden Resultate ist keine Lösung der Ausgangsgleichung!

Aufwärmübungen 12.9.

Welche **zwei ev. drei Formeln** sollten Sie sich im Zusammenhang mit dem Stichwort *Bionomialsatz* merken (auswendig und verstanden) ?

■ **Rekonstruieren Sie diese beiden Formel**

Didaktisches Stichwort: *Rekonstruieren ist besser als Wiedererkennen!*

■ Berechnen Sie $\binom{8}{3}$ und $\binom{8}{5}$

■ Beweisen Sie $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$. Welche geometrische Interpretation hat diese Gelichung im Pascalschen Dreieck?

□ Beweisen Sie $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

■ Suche nach einem bestimmten Term: In den nachfolgenden Ausdrücken soll jeweils der "nächste auftretende Beitrag (sortiert nach wachsenden Potenzen von x)" bestimmt werden:

$(1+\mathrm{x})^n=1+..?$	$(1+3\mathrm{x}^2)^n=1+\ldots$	$(2+\mathrm{ax})^n=2^n+\ldots$	$\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{x}+\mathrm{x}^2\right)^3=1+\ldots$
$(1+2\mathrm{x})^n=1+2nx+\ldots$	$(1+2\mathrm{x}^2)^7=1+14\mathrm{x}^2+\ldots)$	$(\frac{1}{x}+\mathrm{x}^2)^5=x^{-5}+\ldots$	$(\frac{1}{x}+2\mathrm{x})^5=\mathrm{x}^{-5}+10\mathrm{x}^{-3}+..$

Rekonstruieren ist besser als Wiedererkennen!
(Das ist ein Resultat der Lernpsychologie zum Erzielen besserer Lernergebnisse!)

Arbeitshilfe: Wichtige Formeln oder Sachverhalte sollte man möglichst aus der Erinnerung eigenständig rekonstruieren und das Resultat dann mit dem Original vergleichen.

Das gilt einmal für wichtige Endformeln wie für die beiden zentralen Formeln zum Binomialsatz - und zwar nach der vorlesung oder unmittelbar vor der nächsten.

Und ebenso für die Arbeit in einem Skript, einem Buch einer Mitschrift: Eine Formel oder einen Rechnungsteil durcharbeiten, Text abdecken und auf einem Blatt Papier zu rekonstruieren versuchen. Das Ergebnis mit dem Original vergleichen und eventuelle Unterschiede oder Lücken durchdenken:

Ist etwas noch nicht verstanden? Hat man einen Rechentrick übersehen? Usw.

Die jeweilige Rekonstruktionsarbeit zeitlich sinnvoll begrenzen.

☐ Zwei Formeln sind zum Stichwort "Binomialsatz" unbedingt zu **merken.** Welche beiden sind das?

▼

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!}$$

▲

Nicht besprochen: Beweisen Sie die folgende in (6.3.75) benötigte Umformung ´(Termumformung)

$$P^2 + x^2((1-x^2) - P^2)^2 = (P^2 + x^2)((1-x^2)^2 + x^2 P^2).$$

Links den Binomialsatz auf $(1-(x^2+P^2))^2$ anwenden und umstellen, so daß man P^2+x^2 ausklammern kann!

▼ Die vorgeschlagene Rechnung gibt

$$\begin{aligned} P^2 + x^2(1 - 2(x^2+P^2) + (x^2+P^2)^2 &= (P^2+x^2)\left[1 - 2x^2 + x^4 + x^2 P^2\right] \\ &= (P^2+x^2)\left[(1-x^2)^2 + x^2 P^2\right] \end{aligned}$$

▲

Drei Typen von Gleichungen:

- Defintionsgleichung wie $[n]_k = n(n-1)...(n-k+1)$. Die linkes Seite ist nur eine abkürzende Bezeichnung für die rechte.
- Allgemeingültige Aussage wie $\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!}$. Beide Seiten sind unterschiedlich inhaltlich iterpretiert und ergeben den gleichen Wert.
- Bestimmungsgleichungen wie $\mathrm{x}^2 + 6x - 5 = 0$ oder 2x=3. Gesucht sind all diejenigen Werte von x, die nach Einsetzen eine gültige Gleichung, eine wahre Aussage ergeben. Die Kandidaten müssen einer bestimmten Menge entstammen. Der Buchstabe x hat die Rolle einer Unbestimmten. **Und die Gleichung selbst darf so zunächst nicht als gültige Gleichung angesehen werden!** Sie ist zunächst eine Suchaufforderung. Ist aber x_1 eine Lösung der Gleichung, dann ist $\mathrm{x}_1^2 + 6x_1 - 5 = 0$ eine gültige Gleichung.

Beispiel für die Arbeit mit der Bruchdefinition. Es soll die übliche Hauptnennerformel bewiesen werden. Also

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = \frac{mb+na}{ab}.$$

▼ Sei $\mathrm{x}_S = \frac{m}{a}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Bestimmungsgleichung ax=m und $\mathrm{y}_S = \frac{n}{b}$ die der Gleichung by=n. D.h

$\mathrm{ax}_S = m$	sind gültige, wahre Aussagen.
$\mathrm{by}_S = n$	Multipl. der Gl. mit b bzw. a und Addition gibt
ab(x+y)=mb+na	als gültige Gleichung.

D.h. $\mathrm{x}_S + y_S = \frac{m}{a} + \frac{n}{b}$ - reine Bezeichnungsgl. - ist Lösung der letzten Gleichung. Deren eindeutige Lösung wird aber mit bezeicnnet. Oder $\mathrm{x}_S + y_S = \frac{mb+na}{ab}$. Das ergibt die gesuchte allgemeing. Gleichung.

Beispiel für Hauptenennerbildung

□ In Ausdrücken wie dem nachfolgenden kann man entweder zuerst Hauptnenner bilden und dann die Doppelbrüche beseitigen oder man kann die umgekehrte Reihenfolge wählen.

$$\frac{b}{\left(\frac{a+b}{2a}\right)} + \frac{3-a}{\left(\frac{a-b}{3b}\right)} = ...$$

Meist ist eine bestimmte Reihenfolge vorzuziehen. Welche ist das in unserem Beispiel? Was ergibt sich?

(Erst immer kurz selbst rechnen, dann vergleichen)

▼ Die erste Strategie: **Zuerst** die Doppelbrüche beseiteigen, **dann** Hauptnenner. Das gibt für unser Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{b}{\left(\frac{a+b}{2a}\right)} + \frac{3-a}{\left(\frac{a-b}{3b}\right)} &= \frac{b(2a)}{a+b} + \frac{(3-a)3b}{a-b} = \frac{2ab\boxed{(a-b)} + 3(3-a)b\boxed{(a+b)}}{a^2-b^2} \\ &= \frac{2a^2b - 2ab^2 + 3b(3a+3b-a^2-ab)}{a^2-b^2} = \frac{9ab+9b^2-a^2b-5ab^2}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

Die zweite Strategie: Zuerst Hauptnenner Bilden undann die Doppelbrüche Beseitigen:

$$\begin{aligned} \frac{b}{\left(\frac{a+b}{2a}\right)} + \frac{3-a}{\left(\frac{a-b}{3b}\right)} &= \frac{b\boxed{\left(\frac{a-b}{3b}\right)} + (3-a)\boxed{\left(\frac{a+b}{2a}\right)}}{\left(\frac{a+b}{2a}\right)\left(\frac{a-b}{3b}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(a-b) + \frac{(3-a)(a+b)}{2a}}{\left(\frac{a^2-b^2}{6ab}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{3a+3b-a^2-ab}{2a}}{\left(\frac{a^2-b^2}{6ab}\right)} = \frac{6ab\left[\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{3a+3b-a^2-ab}{2a}\right]}{a^2-b^2} \\ &= ..... \end{aligned}$$

Die erste Strategie ist hier und in der Mehrzahl der Fälle vorzuziehen!

■ 2) Lösen Sie die folgenden Gleichungen, d.h. bestimmen Sie die x, die diese Gleichung erfüllen. Die Gleichungen lassen sich alle auf quadratische Gleichungen zurückführen.

a)

a)	$\frac{1}{x-2} + 2 + \frac{3}{x+2} = 0$	
b)	$2x^4 + 6x^2 - 8 = 2$	u=x^2 als Hilfsgröße
c)	$2^x + 3 + 2^{-x} = 0$	u=2^x als Hilfsgröße

▼ a) Beachte: x$\neq \pm 2$

$\frac{1}{x-2} + 2 + \frac{3}{x+2} = 0$ Mit Hautnenner multipl.

$(x+2) + 2(x^2-4) + 3(x-2) = 0$

$2x^2 + 4x - 12 = 0/\ \ x^2 + 2x - 6 = 0$ $x_{12} = -1 \pm \sqrt{7} \neq \pm 2.$

b) Eine "biquadratische Gleichung":

$2x^4 + 6x^2 - 8 = 2$	$\boxed{u^2 + 3u - 5 = 0}$	für u=x^2
$\underline{x_{12} = \pm\sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{29}}}$	c) $u_{12} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{20}{4}} > 0$	2 Lösungen!

c) u=2^x>0 merken!

$$2^x+3-2^{-x}=0 \qquad u+3-\frac{1}{u}=0 \qquad \text{Mit u multipl.}$$
$$u^2+3u-1=0$$
$$\underline{x_1=\frac{\ln(-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9+4}{4}})}{\ln(2)}} \qquad u_{12}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9+4}{4}} \qquad >0 \text{ nur für pos. Zeichen!!}$$

☐ Bestimmen Sie die Nullstellen von $x^4-10x^2+1=0$. In der Endform kann man die doppelten Wurzeln beseitigen. Beweisen Sie dazu mit Hilfe des binomischen Satzes $\boxed{\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Wie sieht die Linearfaktordarstellung des Polynoms aus?

▼ $x_{12}^2=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt{6}$. Nun ist $5-2\sqrt{6}=0.101..>0$, so dass man 4 reelle Lösungen findet. $x_{12}=\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ und $x_{34}=\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Gilt die behauptete Vereinfachung der Doppelwurzeln? Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2} \qquad \text{behauptet} \qquad (1)$$
$$\left(\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2 \qquad (2)$$
$$5\pm2\sqrt{6}=2\pm2\sqrt{2\cdot3}+3 \qquad \text{Stimmt!} \qquad (3)$$

Wir sind hier argumentativ von (1) nach (3) gelangt. Benötigt wird jedoch der Rückweg. Aus der wahren Ausage (3) soll (1) folgen. Von (3) nach (2) kommen wir durch reine Termumformung. Von (2) nach (1) ist ein Gleichungsumformung durch Wurzelziehen. Das gibt nur $\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (+ oder -.) Da aber beide Seiten positiv sind, ist die negative Wurzel unbrauchbar und die behauptete Gleichung ist korrekt.

Zum Vorgehen: Man rechnet von oben nach unten, um eine Verbindung zwischen der behaupteten Beziehung und einer gültigen Gleichung zu bekommen. Der Beweis verlangt die umgekehrte Richtung. Man geht dazu die Schritte rückwärts durch. Somit hat man folgende erstaunliche Linearfaktordarstellung

$$\boxed{x^4-10x^2+1=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

13.9

Zum Aufwärmen

☐ Bringen Sie das Polynom x^2-4x+3 in die Linearfaktorform.

$$x^2-4x+3=...$$

☐ Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung für x: (Lösungsweg?)

$$x^2+7x+9=3(x+3)$$

☐ Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}i=(1+2+..+i+..(n-1))+n=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad \text{wobei n=1,2,3,...}$$

Kap. 1.6

1.6.1 Beschreibung von Figuren der Koordinatenebene mit Hilfe von Gleichungen (Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten der Punkte der Figur)

Begriffssysteme! Siehe Kap. 1.1.3! In naturw. Texten sollte man zu unterscheidende Dinge nicht mit derselben Bezeichnung versehen. Es ist zu lernen, wie man sie mit sprachlichen Mitteln differenziert. nicht

(1.1.24) Das $\boxed{\text{Begriffssystem "Gerade in einer (festen) Ebene"}}$ wird in Kap. 1.6 besprochen. Die einleitenden Erläuterungen zeigen: Das Teilkapitel befasst sich einerseits mit einem sachlich wichtigen Beispiel, das andererseits Beispiel für die Methode quantitativer Beschreibung von Figuren ist. D.h. das Beispiel ist sehr verallgemeinerungsfähig.

Mit typischer Bezeichnungswahl.

- Die Gerade g (der Ebene E). g ist die Menge (Gesamtheit) all ihrer Punkte. Umgekehrt: Ist eine Punktmenge mit besonderen Eigenschaften!
- Eine Strecke (auf der Geraden). Endpunkte der Strecke. Eine Strecke s ist Teilmenge der Geraden g $s \subset g$. Dagegen ist ein Punkt Element der Geraden. $P \in g$.
- Ein Punkt P der Ebene liegt auf der Geraden g . Also $P \in g$
- Ein Punkt P liegt zwischen zwei Punkten Q und R der Geraden
- Die Richtung der Geraden g
- Koordinatendarstellung der Punkte der Geraden (in der Koordinatenebene).
- Geradengleichung=Bestimmungsgleichung für die Koordinaten der Punkte der Geraden
- Unterschiedliche Formen von Geradengleichungen

$\boxed{\text{Bestimmung von Figuren durch Bestimmungsgleichungen}}$ für die Koordinaten der Punkte

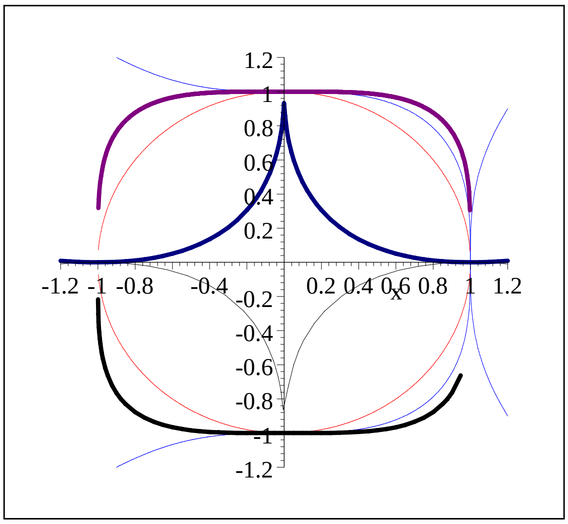
Beispiele:

- Geraden $(y-y_1) = m(x - x_1)$ Für Gerade durch (x_1, y_1) mit Steigung m
- Parabeln $y-b= A(x - a)^2$
- Kreise, Ellipsen, Ovale $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ oder $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$

Verschiedene Formen der Geradengleichung (allgemein, normal, Achsenabschnittsform ...)

(1.6.15-16) besprochen

Die Bilder zu $\left(\frac{|x|}{a}\right)^n + \left(\frac{|y|}{b}\right)^n = 1$ für n=2,3,4 und n=$\frac{1}{2}$.



Besipiele von Aufgaben zum Geradenthema!

■ Die Gerade g sei durch die Geradengleichung y=3x-7 gegeben und der Punkt P habe die Koordinaten $(x_P, y_P) = (3, -5)$.

a) Bestimmen Sie die relative Lage von P zu g.

b) Fertigen Sie eine Skizze der Konfiguration.

c) Welche Achsenabschnitte hat g? Wie lautet die Achsenabschnittsform?

d) Welche Punkte von g haben eine negative y-Koordinate.

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die senkrecht zu g durch P geht. Wo schneidet diese zweite Gerade g?

f) Geben Sie alle Geraden der Ebene an, die durch P gehen.

▼▲

☐ Sei α ein freier Parameter. Was für Geraden werden dann durch die Gleichung

$$\cos\alpha \cdot (y+5) = \sin\alpha \cdot (x-3) \qquad \text{beschrieben?}$$

■ y=3x+7 und y=-2x+1 Bestimmen Sie den Schnittpunkt. Bestimmen Sie für beide Geraden die Punkt-Richtungsform der Geradengleichung, wobei der Punkt der bestimmte Schnittpunkt ist.

■ Lösen Sie ganz allgemein für zwei Geraden, welche durch die Gleichungen $y = mx+b$, $y = nx+c$ gegeben sind, die Schnittaufgabe. Formulieren Sie, welche Rollen die Buchstaben bei dieser Aufgabe haben. Verfolgen Sie nunmehr auch genau, wie die geometrisch möglichen Situationen den benötigten Fallunterscheidungen für die äußeren Parameter entsprechen.

■ Für welche Geraden der Koordinatenebene ist der Abstand der beiden Achsenabstände gleich 9?

■ Was für eine Steigung muss eine Gerade durch (-2,4) haben, damit sie durch (3,6) geht?

Definition: Sei a>1 und x>0. Dann ist $\log_a(y)$ Bezeichnung für die eindeutige Lösung der Gleichung $a^x = y$ wobei y äußerer Parameter und x Unbestimmte! Oder $a^{\log_a(y)} = y$. Speziell folgt aus $a^1 = a$ sofort $\log_a(a) = 1$.

Rechenregeln

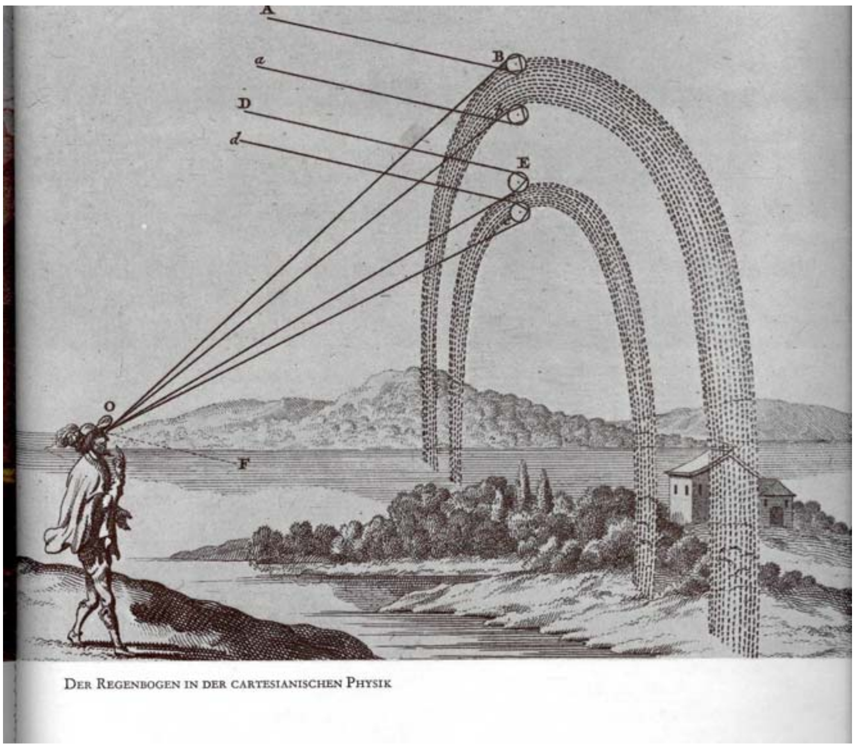
$\log_a(yz) = \log_a(y) + \log_a(z)$	$\log_a(x^K) = K \log_a(x)$
$\log_a(\frac{y}{z}) = \log_a(y) - \log_a(z)$	.

Umrechnung: Logarithmiere ($\log_a$) die Gleichung $a^{\log_a(y)} = b^{\log_b(y)}$. Das gibt nach den Regeln: $\log_a(y) \cdot 1 = \log_b(y) \cdot \log_b(a)$.

Wichtige a-Werte sind a=2, a=e und a=10. Wir schreiben (bezeichnen) meist ln(y) $=\log_e(y)$ und log(y)$=\log_{10}(y)$.

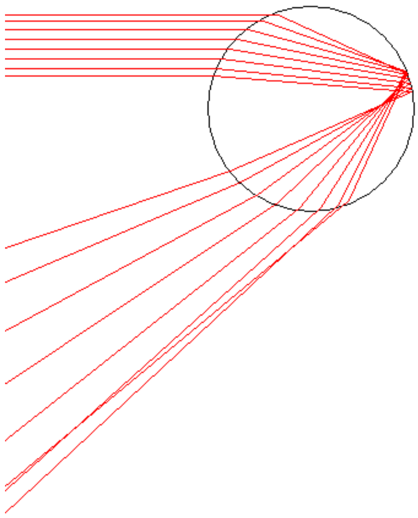
(2.4.19) Erste größere Anwendung des Brechungsgesetzes: Das **?? und seine ??** :

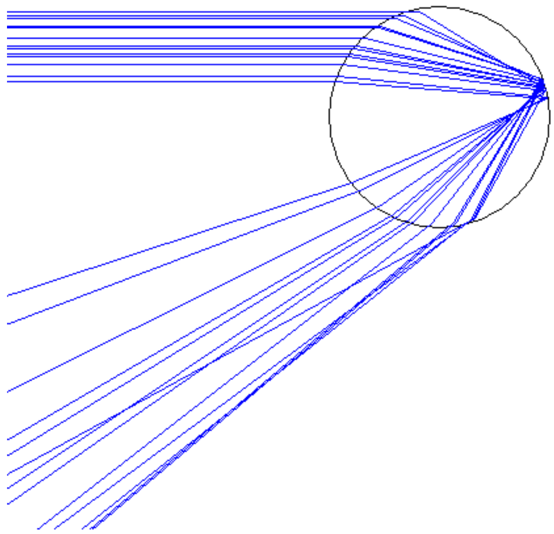
Das Bild zeigt die Erklärung des Regenbogenphänomens. Für uns ist der untere Bogen relevant. Verfolgen Sie den Strahlengang. Das Lichtbündel (am Auge) entsteht über die gemeinsame Wirkung vieler Regentropfen.



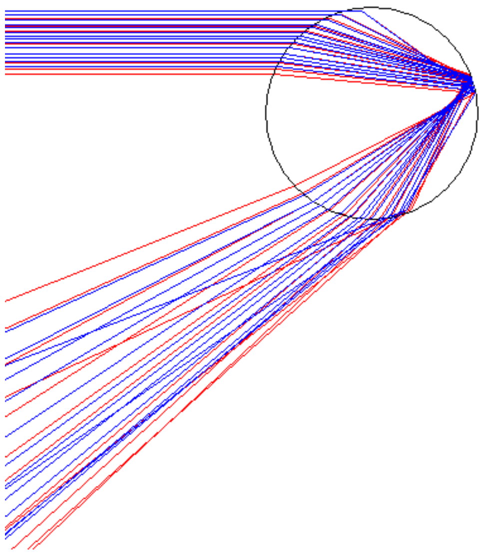
Wir machen eine Computersimulation des Strahlenganges (in einem einzigen Tropfen): Von links fällt ein Bündel paralleler Strahlen ein und trifft auf einen kugelförmigen Regentropfen. Im Schnitt mit der Ebene ergibt das einen Kreis. Die Lichtstrahlen werden gebrochen, an der Rückwand (zumindest teilweise) reflektiert und dann erneut gebrochen. Das Ergebnis ist ein nicht mehr paralleles Bündel. Dabei entsteht die untere Grenze des ausfallenden Bündels **nicht** durch die allerobersten Lichtstrahlen des Einfallsbündels.

Vielmehr liegt ein Minimum des Ausfallswinkels etwas darunter vor. Links haben wir rotes Licht, rechts blaues Licht einfallen lassen. Der Brechungsindex ist für beide etwas unterschiedlich.



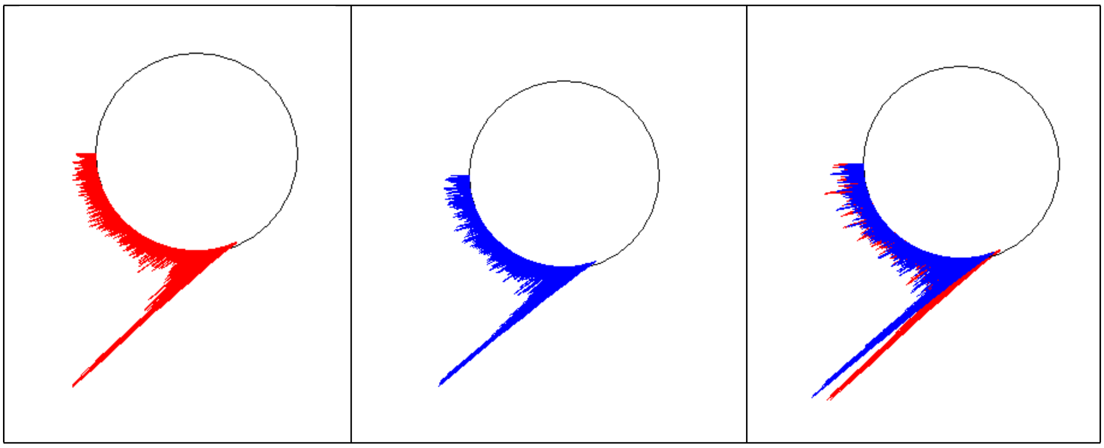


Im nächsten Bild überlagern wir beide Einfallsbündel, um zu sehen, was der unterschiedliche Brfechungsindex bewirkt:



Tatsächlich hat das Minimum des Ausfallswinkels im roten Fall einen etwas größeren Wert al im blauen. Und das liegt nicht an unserer Wahl der gezeichneten Einfallstrahlen. **Aber wir ausfallend**e Strahlen mit **einer Vielzahl überlappender Winkelwerte. Wieso sollte man gerade die zum Minimum gehörigen sehen?**

Dazu machen wir ein weiteres Computerexperiment. Wir wählen die Höhe des einfallenden Strahles gleichverteilt aus und tragen die Lage des ausfallenden Strahles dann histogrammartig am zugehörigen Ausfallswinkel an. D.h. doppelte Höhe im Histogramm - doppelte Anzahl der mit diesem Winkel austretenden Strahlen



Und jetzt sehen wir: Zum Minimum gehören viel mehr Lichtstrahlen als zu den übrigen Winkeln. D.h. dort ist die Intensität des Lichts deutlich höher. Und das Minimum für das rote Licht hat einen größeren Ausfallswinkel als das für das blaue, erscheint daher dem beobachtenden Auge steiler. Und so entsteht durch das Zusammenwirken vieler Tropfen die Farbtrennung im Bogen.