Häusliche Probeklausur

Funktion und Zweck: Konsolidierung des Erlernten, Einschätzung der eigenen Leistungsfähigkeit.

Bearbeitungsdauer: Bis zu drei Stunden. (Sollten Sie danach noch etwas finden oder rechnen und abliefern wollen, das bitte kenntlich machen. Achten Sie auch auf einen Zeitplan. Für eine Einzelaufgabe nicht mehr als 20-30 Minuten. Bearbeiten Sie bitte die Aufgaben in der gegebenen Reihenfolge. Achten Sie auf Recheneffizienz!

Abgabe: Montag

Teilnehmer: Möglichst und gerade auch die, die sich schwach fühlen.

Beantworten Sie die Fragen, die gestellt wurden, keine ausgedachten

Trennen Sie Nebenrechnungen, Konzept usw. von dem was Sie abgeben. Achten Sie auf die kurze, aber genaue **Formulierung**. Verbale Formulierungen sind erwünscht.

Wenn Sie entdecken, dass Sie etwas falsch gerechnet haben und keine Zeit zur Korrektur bleibt, das als Kommentar anfügen. Nicht etwa alles durchstreichen usw.

Sinnvolle Benutzung von **Hilfsmitteln** - Skript, Aufzeichnungen usw. - sind erlaubt, ja erwünscht. Aber beachten Sie "sinnvoll". Das Wesentliche muss immer aus dem Kopf kommen, die Hilfsmittel ergänzen das nur.

Teamarbeit ist hier nicht sinnvoll. Es geht um das, was Sie alleine schaffen.

Bitte Namen, Studienziel und e-mail-Adresse angeben.

■ 1) Vereinfachen Sie mit Hilfe der jeweils zulässigen Rechenregeln die folgenden Rechenausdrücke

$$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = ... \qquad \text{a,b} \in \mathbb{R}$$

$$(x-y)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) - (x+y)\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}(....) + \vec{b}(....)$$

■ 2) Es sei $p(z) = z^2 + z - 5 + 5i$. Bestimmen Sie die beiden Nullstellen p(z)=0 und schreiben Sie p(z) in Linearfaktorform.

■ 3) Für eine Flugparabel gelte.´$\vec{r}^K(-2) = (0,0,0)$ und $\vec{v}^K(-2) = (0,3,4)$ Weiter sei $\vec{g}^K = (0,0,-10)$. Wo und wann trifft die Bahn erneut die Horizontalebene? Wie groß ist die Flugweite? Wie groß ist die Einschlaggeschwindigkeit? Und der Einschlagwinkel (zwischen der Geschwindigkeit und der Normalen zur Horizontalebene)?.Wo und wann hat die momentane Geschwindigkeit die Steigung 1? .

■ 4) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme (x,y Unbestimmte, a,b äußere Parameter)

$$\boxed{\begin{array}{l} 7x-3y=4 \\ 3x+6y=7 \end{array}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{array}{l} 7x+ay=4 \\ 3x+6y=b \end{array}}$$

a) Das erste System kann als Schnitt zweier Geraden in der Ebene interpretiert werden. Bringen Sie die beiden Geradengleichungen in Achsenabschnittsform und skizzieren Sie damit die beiden Geraden. Stimmt der Schnitt mit dem rechnerischen Resultat in etwa überein?

■ 5) Eine Ebene E werde durch eine Parametrisierung gegeben. Bestimmen Sie den Vektor des kürzesten Abstandes vom Ursprung zur Ebene!

a) Formulieren Sie die Vorgehenstrategie.

b) Berechnen Sie den Vektor für E mit $\vec{x}_E^K(u,v) = (1,2,3) + u(1,1,0) + v(0,2,1)$

c) Geben Sie eine Ebenen**gleichung** für E aus b) an. (Nicht Parametrisierung)

■ 6) Bestimmen Sie näherungsweise zeichnerisch $\sqrt{z}$ für z=-2+i.

■ 7) Was (für ein komplexer Widerstand) ergibt sich für die Hintereinanderschaltung zweier Spulen (mit Induktivitäten L_1 und L_2), was für deren Parallelschaltung?

■ 8) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

Für n=1,2,3,... gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Viel Erfolg!

■ 1) Vereinfachen Sie mit Hilfe der jeweils zulässigen Rechenregeln die folgenden Rechenausdrücke

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=... \qquad \text{a,b} \in \mathbb{R}$$

$$(x-y)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-(x+y)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}(....)+\vec{b}(....)$$

▼

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b} &= 2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\\ (x-y)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-(x+y)\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= \vec{a}(-2y)+\vec{b}(-2x)\end{aligned}$$

Meist richtig gerechnet, aber nicht selten unschöne Endform. ▲

■ 2) Es sei $p(z)=z^2+z-5+5i$. Bestimmen Sie die beiden Nullstellen p(z)=0 und schreiben Sie p(z) in Linearfaktorform.

▼ $z_{12}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+5-5i}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{21}{4}-5i}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{21-20i}$

(Nicht verlangte) Polardarstellung bzw. Weiterrechnung:

$$\sqrt{21-20i}=\sqrt[4]{21^2+20^2}e^{i\frac{\alpha}{2}}=5-2i$$

Linearfaktordarstellung

$$p(z)=(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21-20i})((z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21-20i})=(z-5+2i)(z+5-2i)$$

Kommentar: Die beiden Nullstellen sind nicht zueinander konjugiert komplex.▲

$\boxed{5\frac{1}{4} \text{ für } 5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4} \text{ nicht verwenden!}}$ Verwechselungsgefahr mit $5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

■ 3) Für eine Flugparabel gelte.´$\vec{r}^K(-2)=(0,0,0)$ und $\vec{v}^K(-2)=(0,3,4)$ Weiter sei $\vec{g}^K=(0,0,-10)$. Wo und wann trifft die Bahn erneut die Horizontalebene? Wie groß ist die Flugweite? Wie groß ist die Einschlaggeschwindigkeit? Und der Einschlagwinkel (zwischen der Geschwindigkeit und der Normalen zur Horizontalebene)?.Wo und wann hat die momentane Geschwindigkeit die Steigung 1? .

▼ Ablesen gibt: t_1=-2 $\boxed{T=t+2}$ und t=T-2.

$$\begin{aligned}\vec{r}^K(t) &= (0,0,0)+(0,3,4)T+\frac{1}{2}(0,0,-10)T^2=(0,3T,4T-5T^2)\\ \vec{v}^K(t) &= (0,3,4-10T)\end{aligned}$$

Das war der $\boxed{\text{immer}}$ auszuführende 1. Schritt. Hiermit wird der Rest beantwortet! Der Unterschied im Arbeitsaufwand und Erfolg zwischen denen, die sich hieran hielten und den anderen war wieder enorm!

★Treffpunkt Horizontelebene: $4T\text{-}5T^2 = 0$ Also $T_1 = 0$ und $T_2 = \frac{4}{5}$. Die beiden Zeiten: $t_1 = -2$ und $t_2 = \frac{4}{5} - 2 = -\frac{6}{5}$. Damit folgt $\vec{r}^K(-\frac{6}{5}) = (0, \frac{12}{5}, 0)$. Die Flugweite ist $\frac{12}{5}$.

★ Die (vektorielle!) Einschlaggeschwindigkeit ist $\vec{v}^K(-\frac{6}{5}) = (0, 3, 4 - \frac{40}{5}) = (0, 3, -\frac{20}{5})$ $\boxed{\vec{v}_{\text{Ei}\,nschlag} = (0, 3, -4)}$

Damit folgt für den Einschlagwinkel: $\vec{n}^K = (0, 0, 1)$

$\cos\alpha = \frac{-4}{1 \cdot \sqrt{9+16}} = -\frac{4}{5}$ $\boxed{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}$

★ Steigung 1 verlangt $\frac{v_z}{v_y} = 1$. Also $\frac{4-10T}{3} = 1$ oder $\boxed{T = \frac{1}{10}}$.

Das gibt die Zeit $t_S = \frac{1}{10} - 2 = -\frac{19}{10}$. Und damit für den Ort:

$$\vec{r}^K(-\frac{19}{10}) = (0, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} - \frac{5}{100}) = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{7}{20}\right)$$

Hier hat die Tangente die Steigung 1! ▲

"Geschwindigkeit" heißt hier natürlich immer vektorielle Geschwindigkeit. Sie auch "Abstandsvektor"!

■ 4) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme (x,y Unbestimmte, a,b äußere Parameter)

$$\boxed{\begin{array}{l} 7x-3y=4 \\ 3x+6y=7 \end{array}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{array}{l} 7x+ay=4 \\ 3x+6y=b \end{array}}$$

▼

$\boxed{\begin{array}{ll} 7x-3y=4 & +2 \\ 3x+6y=7 & 1 \end{array}}$ $\boxed{17x=15}$ $\underline{x=\frac{15}{17}}$ $3y = \frac{105}{17} - \frac{68}{17} = \frac{37}{17}$ $\underline{y = \frac{37}{51}}$ $\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} 45 \\ 37 \end{pmatrix}}$

Das System mit zwei äußeren Parametern (D.h. es ist eine Fallunterscheidung zu erwarten. Erneut vielfach nicht beachtet) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} 7x+ay=4 & +3 \\ 3x+6y=b & -7 \end{array}} \quad (3a-42)y=12-7b$$

Fall a) $3(a-14) \neq 0$ gibt $\underline{y = \frac{12-7b}{3(a-14)}}$ und

$3x = b - 2\frac{12-7b}{(a-14)} = \frac{ba-24}{a-14}$ $\underline{x = \frac{ba-24}{3(a-14)}}$ Also

$$\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{3(a-14)}\begin{pmatrix} ba-24 \\ 12-7b \end{pmatrix}}$$

Fall b) 3(a-14)=0. Die letzte Gleichung: $\boxed{0y=12-7b}$.

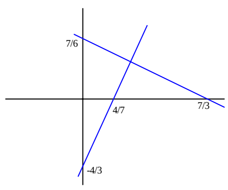
Fall b1) a=14 und $12 \neq 7b$. Das System ist unlösbar.

Fall b2) a=14 und $12=7b$. Dann $\underline{\text{y frei}}$. Und $3x+6y=\frac{12}{7}$. Also $\underline{x = \frac{4}{7} - 2y}$. Zusammen

$$\boxed{\vec{x}_L(y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} - 2y \\ y \end{pmatrix} = \frac{4}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

a) Das erste System kann als Schnitt zweier Geraden in der Ebene interpretiert werden. Bringen Sie die beiden Geradengleichungen in Achsenabschnittsform und skizzieren Sie damit die beiden Geraden. Stimmt der Schnitt mit dem rechnerischen Resultat in etwa überein?

$\boxed{\begin{array}{l} 7x-3y=4 \\ 3x+6y=7 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} \frac{x}{(\frac{4}{7})} + \frac{y}{(-\frac{4}{3})} = 1 \\ \frac{x}{(\frac{7}{3})} + \frac{y}{(\frac{7}{6})} = 1 \end{array}}$



■ 5) Eine Ebene E werde durch eine Parametrisierung gegeben. Bestimmen Sie den Vektor des kürzesten Abstandes vom Ursprung zur Ebene!

a) Formulieren Sie die Vorgehenstrategie.

b) Berechnen Sie den Vektor für E mit $\vec{x}_E^K(u,v) = (1,2,3) + u(1,1,0) + v(0,2,1)$

c) Geben Sie eine Ebenen**gleichung** für E aus b) an. (Nicht Parametrisierung)

▼ ▽ a) Die Vorgehensstrategie: *(Das war eine wichtige Aufgabe! Vielfach flüchtig angegangen!)*

- $\vec{e}$ und $\vec{f}$ seien die Richtungsvektoren der Parametrisierung Bestimmen den Normalenvektor $\vec{N} = \vec{e} \times \vec{f}$.
- Sei g die Ursprungsgerade mit Richtung $\vec{n}$.
- Schneide g mit E. Der Ortsvektor des Schnittpunktes ist der gesuchte Abstandsvektor.

▽b) Die gegebene Parametrisierung ist: *(Jetzt war a) konkret auszuführen!)*

$$\begin{aligned} \vec{x}_E^K(u,v) &= (1,2,3) + u(1,1,0) + v(0,2,1) \\ &= (1+u, 2+u+2v, 3+v) \end{aligned}$$

Also $\vec{N} = (1,1,0) \times (0,2,1) = (1,-1,2)$ und

$$\vec{x}_g(a) = (a, -a, 2a)$$

Schnittgleichungen:

1+u=a - 2+u+2v=-a 3+v=2a	+	1+2v=-2a (-) 3+v=2a (+2)	5=6a $\boxed{a=\frac{5}{6}}$

a genügt. Der gesuchte Abstandsvektor ist $\boxed{\vec{d} = \frac{5}{6}\vec{n} = \frac{5}{6}(1,-1,2)}$.

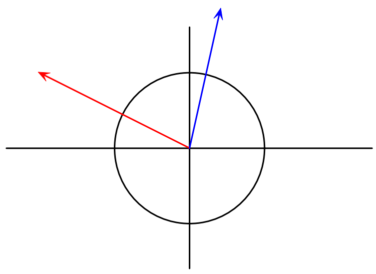
▽ c) Der Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ und der skalare Abstand ist $|\vec{d}| = \frac{5}{6}\sqrt{6}$. Dann liefert $\vec{n} \cdot \vec{x} = |\vec{d}|$ eine Gleichung der Ebene. Also $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \cdot \vec{x} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$. Und das heißt:

$$\boxed{x-y+2z=5}$$

▲

■ 6) Bestimmen Sie näherungsweise zeichnerisch $\sqrt{z}$ für z=-2+i.

▼



$\boxed{\sqrt{-2+i} \approx 0.3 + 1.8i}$

$\sqrt{-2+i} = 0.34 + 1.45i$

▲

■ 7) Was (für ein komplexer Widerstand) ergibt sich für die Hintereinanderschaltung zweier Spulen (mit Induktivitäten L_1 und L_2), was für deren Parallelschaltung?

▼ Hintereinabderschaltung:

$$\boxed{Z_{gesamt}=i\omega(L_1+L_2)}$$

Parallelschaltung

$$\frac{1}{Z_{gesamt}} = \frac{1}{i\omega L_1}+\frac{1}{i\omega L_2}=\frac{1}{i\omega}\frac{L_2+L_1}{L_1L_2}$$

$$\boxed{Z_{gesamt}=i\omega\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}}$$

■ 8) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

Für n=1,2,3,... gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+....+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

▼ Zu beweisen ist $1^2+2^2+....+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle n.

Für N=1 ist die Gleichung korrekt. Sie sei jetzt bereits für n=1,2,,,,,,N-1 bewiesen. Gilt Sie dann auch für N? Wir haben mit lauter zulässigen Termumformungen:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+....(N-1)^2+N^2 &= (1^2+....+(N-1)^2)+N^2 \\
&= \frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)+N^2 \\
&= \frac{N}{6}\left((N-1)(2N-1)+6N\right) \\
&= \frac{N}{6}\left(2N^2+3N+1\right) \\
&= \frac{N}{6}(N+1)(2N+1)
\end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Gleichung für N. Damit ist die Gleichung für alle n bewiesen. ▲

Wichtig war das Ausklammern von N. Sonst wurde es mühsam.

Punkteverteilung
(25 steht beispielsweise für $20<\text{Punktezahl}\leq 25$)

						y				
						y		o		
			x		y	y		o	o	
			x	x	y	y		o	o	o
	x	x	x	x	y	y	o	o	o	o
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

Die Probeklausur war nicht sehr schwierig. Auch zeitlich war kein großer Druck vorgegeben.

Bestanden ist ab etwa 25 Punkten. Dabei ist bis etwa 35 Punkten deutlicher Verbesseungsbedarf angezeigt. Oberhalb 40 ist recht gut, wenn auch praktisch in jedem Fall noch Verbesserungsmöglichkeiten und -bedarf besteht. Verglichen mit anderen Jahren ist das eine recht gute Verteilung.

Unter 25 Punkten ist großer und sinnvoller Arbeitseinsatz gefordert.

Die Verteilung zeigt, dass die Mehrzahl derjenigen, die eigentlich eine Studienvorbereitung dringend benötigen, wieder nicht mitgemacht haben. Sie haben immer Gründe, nicht nachzufragen, nicht mitzumachen usw.