Die Harmonische Reihe

Wie stellt sich **Determinismus in der Mathematik** dar?
Wie stellt man Daten dar?
Wie findet man das Resultat von u**nendlich vielen Schritten?**
Mehrere Wege können zu demselben Ziel führen mit ganz unterschiedlicher Gangbarkeit.
Beispiel: Wie findet man einen Einstieg in ein Problem ?

Deterministisches Verhalten findet sich modellhaft in Mathematik und Physik. Dabei kann der Entwicklungsparameter kontinuierlich (Zeit) oder diskret (Generation) sein . Der schwierigste Fall ist die mehrdimensionale Raum-Zeit.

Hier betrachten wir den einfachen Fall einer diskreten Generationsentwicklung.

Die mathematisch modellmäßige Beschreibung kann über eine **explizite Formel** oder über eine **Rekursionsformel** erfolgen. Wie im Billardbeispiel bereitet die explizite "Endformel" große Probleme.

In mathematischen Systemen ist das Verhalten vielfach vollständig bestimmt/determiniert, uns aber nur schwer zugänglich. Das liegt einerseits an der Unzulänglichkeit unserer Sinnesorgane und der zugehörigen Verarbeitungskapazität des Gehirns, andererseits an der Komplexität dieser Probleme.

Insbesondere ist nicht nur das Resultat von endlich vielen Operationen, einem Bereich, mit dem wir Erfahrung haben, sondern in vielen Fällen auch das Resultat von **unendlich** vielen Operationen, wo wir zunächst keinerlei Erfahrung haben, **festgelegt und mit mathematischen Methoden zugänglich!**

Als Beispiel betrachten wir die sog. "harmonische Reihe", also ein Problem, bei dem unendlich oft ein immer kleiner werdender Summand hinzugefügt wird.

Verbale Problembeschreibung:

♦ Wir starten mit 1, zählen $\frac{1}{2}$ hinzu, dann zum Ergebnis $\frac{1}{3}$ usw.
♦ Und fragen, was am (nicht vorhandenen) Ende geschieht bzw. herauskommt!

Ergibt diese Folge von Zahlen ein eindeutig vorhersagbares Ergebnis, besser **Endverhalten**?
Auch wenn man immer nur endlich viele Beiträge tatsächlich berechnen kann?

Umsetzen in **Formalismus:** Als Einstieg beginnen wir mit den ersten Schritten und führen verallgemeinerungsfähige Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_3 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = s_2 + \frac{1}{3} \\
s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = s_3 + \frac{1}{4} \\
&\quad .....
\end{aligned}
$$

In allgemeinen Formeln:

$$
\underbrace{s_n}_{Bezeichnung} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{n}}_{\text{Bezeichnung mit Rechenweg}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\text{Andere Schreibweise}}
$$

Rekursive Formel $\quad \mathrm{s}_{n+1} = s_n + \Delta s_n = s_n + \frac{1}{n+1} \quad \mathrm{n} \geq 1 \quad \text{und } \mathrm{s}_1 = 1.$

Explizite Formel	Rekursive F. für Änderung			
n$\longmapsto s_n$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1}$ $s_1 = 1$	Änderung = Änderungsrate!	Rel.Änderung $\frac{\Delta s_n}{n}$	?Grenzwertverh.

Die Änderungsrate geht hier nach Null. Die Folge der s_n ist monoton wachsend. Aber ist sie auch beschränkt?

☐ Definiere "beschränkt" und "monoton wachsend" für eine Zahlfolge.

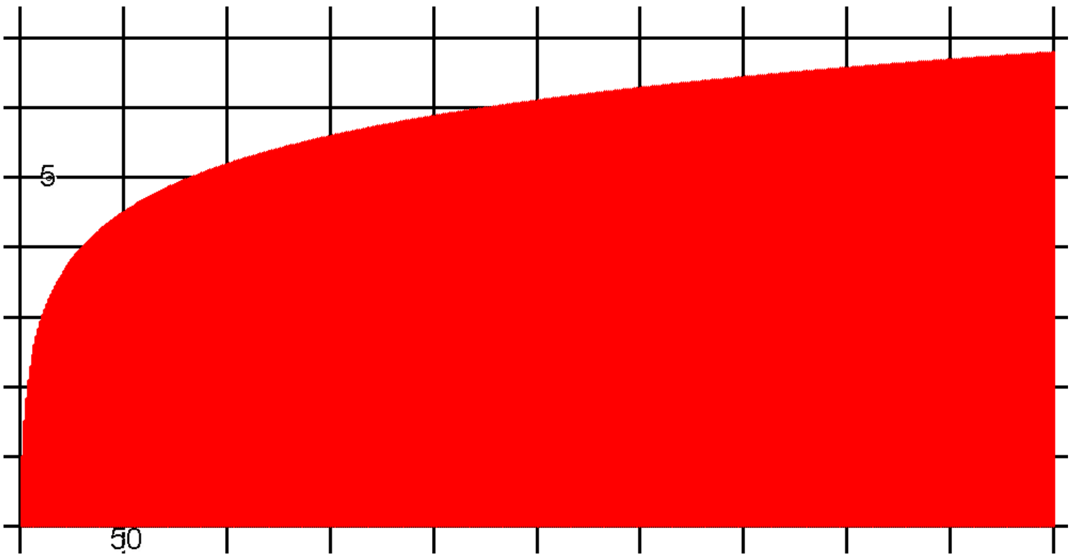
♦ Jetzt wollen wir uns erste **Erfahrungen zum Verhalten** verschaffen:

Das Ergebnis (der Berechnung der ersten Glieder) sollte möglichst so dargestellt werden, dass das Verhalten (der ersten Terme) prägnant wiedergegeben wird . "Erste" meint entweder für "per Hand rechenbar" oder "per Computer zugänglich"

◊Die Tabelle zeigt einige naheliegende Möglichkeiten der Darstellung:

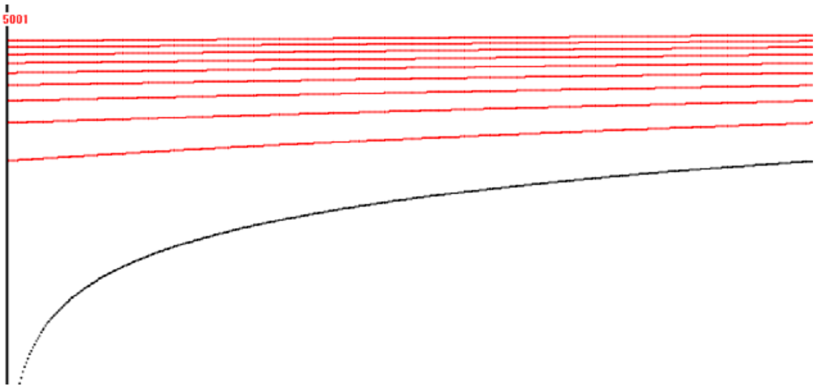
$s_1 = 1$	1	1.0
$s_2 = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1. 5
$s_3 = \frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}$	1. 833 3
$s_3 + \frac{1}{4}$	$\frac{25}{12}$	2. 083 3
$s_4 + \frac{1}{5}$	$\frac{137}{60}$	2. 283 3
$s_5 + \frac{1}{6}$	$\frac{49}{20}$	2. 45
$s_6 + \frac{1}{7}$	$\frac{363}{140}$	2. 592 9
$s_8 + \frac{1}{9}$	$\frac{761}{280}$	2. 717 9
$s_{10} + \frac{1}{10}$	$\frac{7129}{2520}$	2. 829 0
$s_{11} + \frac{1}{12}$	$\frac{7381}{2520}$	2. 929 0

◊ Der Computer liefert folgende Darstellung der Resultate bis n=500 (horizontal ist der Index n , vertikal ist das zugehörige s_n aufgetragen!) :

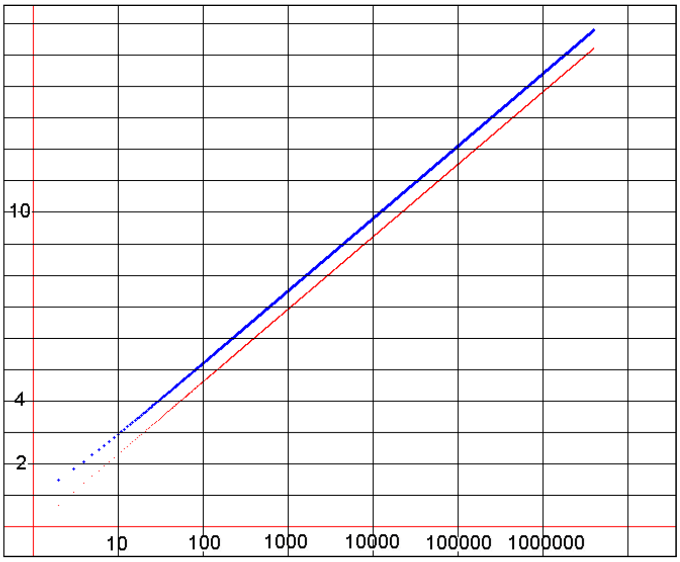


Wie kommt man zum Verhalten noch größerer n? Eine Möglichkeit ist eine **zyklische Darstellung**: D.h. sobald der rechte Bildschirmrand erreicht wird, wird auf linken Seite weitergezeichnet. Die zweite Linie beginnt also bei n=500, die dritte bei n=1000 usw.

Wir beobachten bei n=5000 einerseits immer noch Wachstum, aber es wird mit jedem Durchlauf geringer.



◊ Noch weiter kommt man mit **logarithmischer Auftragung** (hier nur der horizontalen n-Achse). D.h. grob, dass man die Abstände verkürzt, je weiter man kommt. Das Bild zeigt jetzt ein sehr deutliches, eine Extrapolation nahelegendes Verhalten:



Blau ist s_n über log(n) aufgetragen. Und rot ist darunter ln(n) gegen log(n) aufgetragen. Für die ersten n sieht man noch diskrete Punkte. s_{10} liegt etwa bei 3. Die Werte gehen bis etwa n=4.000.000 mit einem s_n von etwas unter 16.

Daher liegt die Vermutung nahe, dass unser s_n sich grob wie ln(n) verhält und damit auch nach unendlich geht.

Die mathematische Analyse bestätigt das. Wir fügen zwei mögliche Beweise an. Der erste ist der übliche, der zweite liefert etwas bessere Resultate.

Die Details der beiden Beweise müssen Sie nicht unbedingt verstehen. Aber Sie sollten verstehen,was bewiesen wird und was das ERgebnis am Ende besagt. Dazu die abschließende GRaphik!

■ $\boxed{\text{Erster Beweis}}$ der Vermutung:

a) Für n>m gilt $s_n > s_m$ (Folge ist streng monoton wachsend)

b) Wir behaupten: $\boxed{s_{2^n} > \frac{1}{2}(n+2).}$ N=2^n gibt n=$\frac{\ln N}{\ln 2}$ und die rechte Seite geht mit n nach Unendlich!

Numerisch z.B. $s_{2^5} = \sum_{k=1}^{2^5} \frac{1}{k}$: $4.06 > \frac{7}{2}$ und $s_{2^{10}} = \sum_{k=1}^{2^{10}} \frac{1}{k}$: $7.5 > 6$

Der Beweis ist in der folgenden Tabelle enthalten:

Für n=1 gilt 1=$s_1 = s_{2^0}$. Weiter ist besipielsweise $s_4 - s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ und $s_8 - s_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ usw. Die erste Zeile gibt solche Differenzen, in der zweiten sind sie einfach ausgeschrieben und beim Übergang zur dritten Zeile werden die Summanden höchstens verkleinert. Und in der untersten Zeile wird die Summe aller bis zu dieser Stelle verkleinerten Summanden gebildet.

$s_1 = s_{2^0}$	$s_{2^1} - s_{2^0}$	$s_{2^2} - s_{2^1}$	$s_{2^3} - s_{2^2}$	$s_{2^4} - s_{2^3}$	$s_{2^5} - s_{2^4}$	...	$s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{9} + .. + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{17} + ... + \frac{1}{32}$	...	$\frac{1}{2^n+1} + \dots \frac{1}{2^{n+1}}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16} + .. + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{32} + ...$	...	
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2} = \frac{1}{2}(2+2)$	$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(3+2)$	$\frac{6}{2} = \frac{1}{2}(4+2)$	$\frac{7}{2} = \frac{1}{2}(5+2)$	...	$\frac{1}{2}((n+1)+2)$

Da diese Abschätzung für jedes n möglich ist, haben wir die Behauptung bewiesen.

Ein $\boxed{\textbf{zweiter Beweis}}$, der etwas mehr liefert, geht wie folgt:

⧫ Für x≥ 1 setzen wir h(x)=$\frac{1}{n}$ für n≤ $x < n+1$. Dann folgt für ganzes N>1:

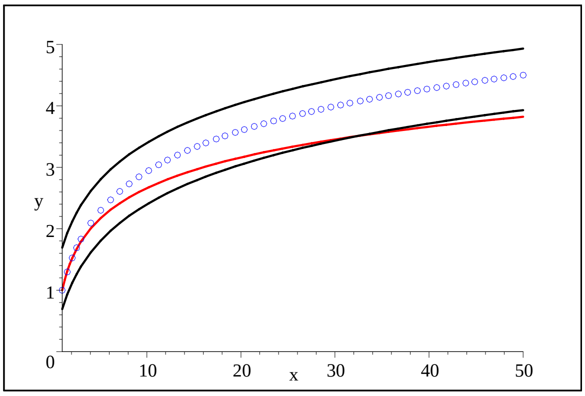
$$\int_1^{N+1} dx h(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} dx h(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} dx \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = s_N$$

Andererseits ist $\frac{1}{x} \le h(x) \le \frac{1}{x-1}$. Über die Monotonie der Integration folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} &\le \int_1^{N+1} dx h(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = s_N \le 1 + \int_2^{N+1} \frac{dx}{x-1} \\
\ln(N+1) &\le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = s_N \le 1 + \ln(N+1) \\
\ln N + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) &\le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(N) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

1	$\ln(2)$	$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$	$1 + \ln(2)$		1.0	0.69315	1.0	1.6931
10	$\ln(11)$	$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$	$1 + \ln(11)$	=	10.0	2.3979	2.9290	3.3979
100	$\ln(101)$	$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$	$1 + \ln(101)$		100.0	4.6151	5.1874	5.6151

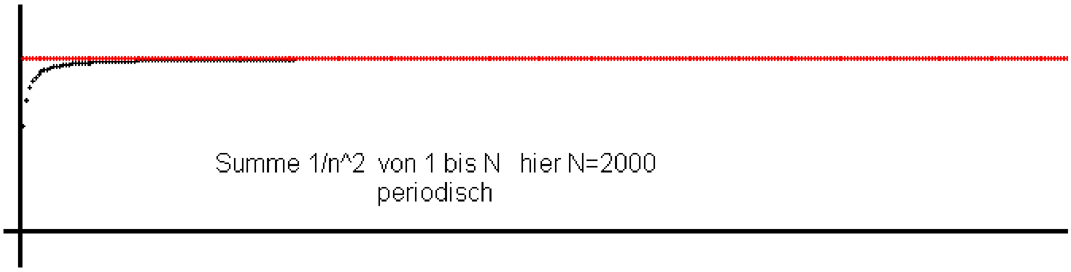
Graphisch Darstellung des REsultates: Blau die Summenwerte, rot die interpolierte Abschätzung des ersten Beweises und schwarz die im zweiten Beweis gefundenen Grenzen, die ja für beliebig große x bewiesen sind. Das Verhalten diser Funktionen ist für x→ ∞ bekannt. und darau folgt dann auch das uns interessierende Verhalten der Reihe. .



Das Verhalten in einem solchen System liegt vollständig fest und ist uns über mathematische Beschreibung - Beobachtungsdatenneahme und analytisches Denken zugänglich!

Zwei weitere Reihen

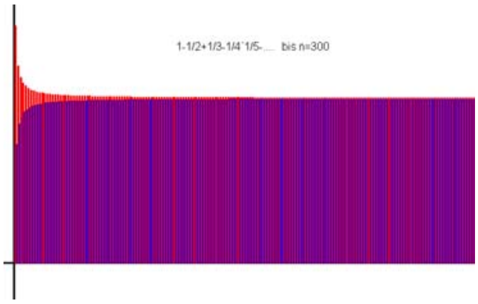
Im Gegensatz zur harmonischen Reihe hat die Reihe $s_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ...$ einen Grenzwert. Wir geben keine Beweis, sondern nur zwei Computerbilder, die das Verhalten der ersten Schritte - einige tausend - veranschaulichen und die die Existenz eines Grenzwertes nahe legen:

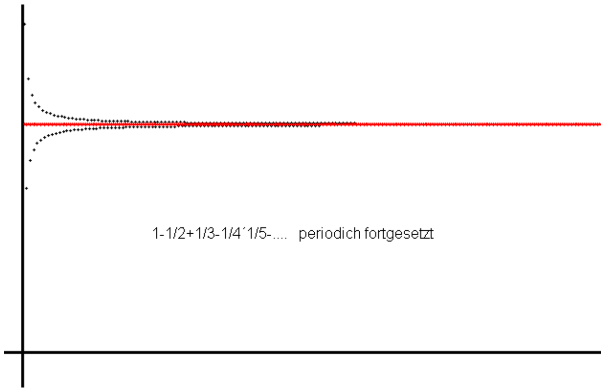


Der Summenwert liegt hier etwa bei 1.65.

Es zeigt sich, dass es zunächst relativ leicht ist, die Existenz eines Grenzwertes mit Hilfe allgemeiner Regeln zu zeigen. Dagegen ist es deutlich schwieriger, dessen genauen Wert zu bestimmen.

Und jetzt die analogen Bilder für die alternierende Reihe $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:





Hier gilt erneut: Zunächst zeigt man die Existenz des Grenzwertes, dann - erneut schwieriger - seinen Wert,