
Vorkurs Mathematik

Teil II Analysis

F. Krause

Kapitel 10

Anwendungen der Ableitungsidee

Der Inhalt dieses Kapitels:

- 10.1 Die Bestimmung glatter Extremwerte
- 10.2 Kurvendiskussion
- 10.3 Der Satz vom beschränkten Zuwachs

Copyright F.Krause

Inhaltsübersicht Kap. 10

- 10.1 Die Bestimmung glatter Extremwerte
- 10.2 Kurvendiskussion
 - 10.2.1 Orientierungsschema zur Kurvendiskussion
 - 10.2.2 Beispiele
- 10.3 Der Satz vom beschränkten Zuwachs
 - 10.3.1 Anwendungsbeispiele
 - * 10.3.1a Monotonie
 - * 10.3.1b Schranken für den Zuwachs
 - * 10.3.1c Globale Fehlerabschätzung für die Tangentenapproximation
 - * 10.3.1d Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz

Aus der Vielzahl möglicher Anwendungen der Ableitungsidee wählen wir drei wichtige und größere Beispiele aus. Sie sind alle einerseits sachlich bedeutsam und zeigen andererseits, wie man die Ableitung nutzt.

10.1 Die Bestimmung glatter Extremwerte

Viele Problemsituationen entstehen aus Fragen des Typs: "Wo ist die Geschwindigkeit am größten?", "Wann ist die Kraft am größten?" oder "Wann ist der Preis am geringsten?". Die reellen Funktionen liefern für diesen Fragentyp ein besonders wichtiges und instruktives Modell. Zusätzlich liefert uns dieser Problemkreis ein weiteres wichtiges Beispiel der Bildung eines angemessenen Begriffssystems.

(10.1.1) Was sind Extremwerte reeller Funktionen? Wir benötigen zunächst eine Begriffsentfaltung und Präzisierung, denn die zu erfassenden Sachverhalte sind recht komplex. Will man alle Fälle korrekt erfassen, muß man den zugehörigen Begriffsapparat sorgfältig einführen.

(10.1.2) Sei $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ eine reelle Funktion. Beachten Sie: Der Definitionsbereich muß keineswegs ganz \mathbb{R} sein. Dann wird man sagen: Ein Extremwert kann entweder Maximum (=Hochpunkt) oder Minimum (=Tiefpunkt) sein. Beschränken wir uns auf ein Maximum. Zunächst wird man versuchsweise sagen: *Ein Punkt $x_m \in D$ gehört zu einem Maximum von f , falls $f(x) \leq f(x_m)$ für alle x aus D gilt.* D.h. falls es keinen Punkt mit größerem Funktionswert gibt. Dann hätte aber z.B. $x \mapsto x + 2 \sin(3x)$ keinerlei Maximum. Da gibt es ja immer noch x -Werte mit noch größerem Funktionswert! (Machen Sie bei Beispielen wie diesem **selbst** eine kleine Skizze!) Also wird man zwischen einem *lokalen* und einem *globalen Maximum unterscheiden*. Globales Maximum wird wie eben definiert. Statt global sagt man auch "absolutes Maximum". Bei lokal wird man wie folgt vorgehen:

Der Punkt $x_m \in D$ führt zu einem *lokalen Maximum* von f , wenn es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, für die $f(x) \leq f(x_m)$ gilt für alle $x \in D$, für die **zusätzlich** $|x - x_m| < \varepsilon$ ist. Statt lokal sagt man auch *relatives Maximum*.

D.h. man läßt nur solche Funktionswerte zum Vergleich zu, **die in der Nähe** des betrachteten Punktes liegen. Und was Nähe bedeuten soll, legt die Zahl $\varepsilon > 0$ fest. Man nennt das Intervall $]x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon[$ auch suggestiv eine " ε -Umgebung des Punktes x_m (auf der Zahlengeraden)". Denn man muß von x_m aus mindestens um eine Strecke der Länge ε weitergehen, um zu einem Punkt zu gelangen, der nicht mehr zur Umgebung gehört. Alle näheren Punkte gehören dazu. **Aber die Größe von ε ist nicht festgelegt.** Sie muß nur positiv sein.

(10.1.3) Jetzt sollte man noch $x_m \in D$, also die Stelle, an der der Extremwert angenommen wird, und den Extremwert selbst auseinanderhalten. Wir nennen x_m daher *Extremstelle* (von f) und $f(x_m)$ den zugehörigen *Extremwert*. Zusammen gibt das einen Punkt $(x_m, f(x_m))$ des Graphen, in dem der Extremwert angenommen wird.

(10.1.4) Es gibt noch weitere, durch das Begriffssystem zu fassende Phänomene. Dazu betrachten wir die beiden Funktionen $g = ([1, 2], x \mapsto \frac{1}{x}, \mathbb{R})$ und $h = (]1, 2[, x \mapsto \frac{1}{x}, \mathbb{R})$. Offenbar hat g in $x=1$ ein absolutes Maximum und in 2 ein absolutes Minimum, also zwei Extremstellen. Beachten sie unsere Forderung: Die zum Vergleich zugelassenen Punkte müssen immer aus D sein. Bei h fehlen diese Randpunkte nun gerade, gehören nicht zum Definitionsbereich. Und das bedeutet, daß h keinerlei Extremstelle besitzt! Wir sehen: Extremstellen können auf dem Rand des Definitionsbereiches liegen oder auch vollständig fehlen.

(10.1.5) Im Zusammenhang mit der Ableitungstheorie interessiert uns eine besondere Art von Extremstelle, die wir *glatte lokale Extremstelle* nennen wollen. Wir nehmen an, daß f in x_m einen Extremwert hat **und** dort auch differenzierbar ist. Daß geometrisch also eine Tangente existiert. **Dann vermuten wir, daß es sich um eine horizontale Tangente handeln muß.**

(10.1.6) Diese Vermutung wollen wir **beweisen**. Beachten Sie dazu zunächst: Eine Extremstelle läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß die Größe $f(x) - f(x_m)$ für alle x aus D und zugleich

$|x - x_m| < \varepsilon$ höchstens ein Vorzeichen hat oder Null ist. Erhält man für jede Wahl von $\varepsilon > 0$ beide Vorzeichen, so kann keine Extremstelle vorliegen.

(10.1.7) Diese Charakterisierung verbinden wir jetzt mit der zweiten Voraussetzung, daß Differenzierbarkeit vorliegt, daß wir also eine Tangentenzerlegung um x_m anschreiben können. Die Zerlegung schreiben wir sogleich in der folgenden Form ($x = x_m + \Delta x$):

$$f(x) - f(x_m) = \Delta x(f'(x_m) + R_f(x_m, \Delta x)).$$

Nun ist aber die Resttermbedingung erfüllt, was bedeutet, daß $R_f(x_m, \Delta x)$ beliebig klein wird. Angenommen die Tangente ist nicht horizontal, also $f'(x_m) \neq 0$. Wir dürfen Δx so nahe an Null heranbringen, wie wir wollen. Beispielsweise können wir verlangen, daß $|R_f(x_m, \Delta x)| < \frac{1}{2}|f'(x_m)|$ gilt (für alle ausreichend kleinen Δx ,) sagen wir für alle $|\Delta x| < \varepsilon_0$. Dann hat in diesem Bereich $f'(x_m) + R_f(x_m, \Delta x)$ immer dasselbe Vorzeichen wie $f'(x_m)$ und ist ungleich Null. Und $f(x) - f(x_m)$ hat wegen der Gültigkeit der Tangentenzerlegung einerseits und wegen des zusätzlichen, sein Vorzeichen wechselnden Faktors Δx in diesem Bereich andererseits immer **beide** Vorzeichen! Und das gilt für alle ε -Umgebungen! **Also kann keine Extremstelle vorliegen!** (Ende des Beweises.)

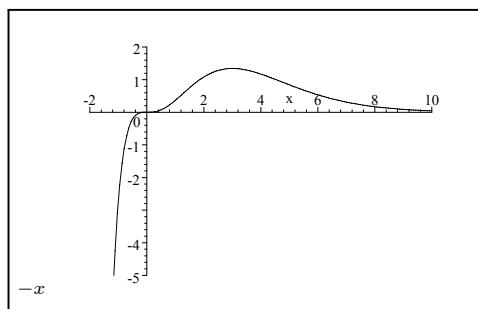
(10.1.8) Beachten Sie zunächst: Erneut haben wir die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung profitabel eingesetzt!

(10.1.9) Was bedeutet unser Resultat? **Soll f in x_m differenzierbar sein und eine glatte Extremstelle haben, dann hat die Ableitung dort notwendig den Wert Null.** Also $f'(x_m) = 0$.

Oder auch: Die Punkte x_e mit $f'(x_e) = 0$ bilden Kandidaten für glatte Extremstellen. Punkte mit Ableitung ungleich Null können aus der Kandidatenliste gestrichen werden. Punkte, in denen die Ableitung nicht existiert und Randpunkte (des Definitionsbereiches) bleiben allerdings Kandidaten für nicht glatte Extremstellen!

Und beachten Sie: Die über $f'(x_e) = 0$ gefundenen Stellen sind immer noch Kandidaten, nicht etwa gesicherte Extremstellen. Das klassische Beispiel hierzu: Im Falle von $h_3 : x \mapsto x^3$ gibt es nur einen solchen Kandidaten mit $h'_3(x_e) = 0$, nämlich $x_e = 0$. Aber wir wissen, daß das keinen Extremwert, sondern einen Sattelpunkt ergibt.

(10.1.10) Beispiel: $F_a = (\mathbb{R}, x \mapsto x^3 e^{-ax}, \mathbb{R})$ mit $a > 0$. Gibt es glatte Extremstellen? Wir bilden $F'_a(x) = (3x^2 - ax^3)e^{-ax} = x^2(3 - ax)e^{-ax}$. Beachten sie die Endform, die sofortiges Auswerten der Bedingung $F'_a(x) = 0$ erlaubt: $x_{e1} = 0$ und $x_{e2} = \frac{3}{a}$. Da x^3 bei $x=0$ dominiert, liegt ein Sattelpunkt vor, dieser Kandidat entfällt. Für $x > 0$ ist $F_a(x) > 0$. Für große x dominiert e^{-ax} . Daher muß x_{e2} zu einem Maximum gehören, das zwischendurch angenommen wird. (Vgl.(8.1.15)). Das Resultat zeigt, wie die Extremstelle mit a kleiner wird. Der zugehörige Extremwert ist $F_a(\frac{3}{a}) = \frac{27}{a^3}e^{-3} \approx \frac{1.34}{a^3}$. Genauer gesagt liegt ein absolutes Maximum vor. Kurz noch der Graph für $a=1$ mit Maximum bei $x_e = 3$:



- Lassen sich alle Funktionen der Kurvenschar F_a durch kleine Transformationen auf den Fall $a=1$ zurückführen?
- Bestimmen Sie die Lage des nach (8.2.34) vorhandenen Minimums der Funktion $x \mapsto x^x$.

- Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ für $\alpha > 0$. Bei $x=0$ liegt immer ein absolutes Minimum vor. (Begründung?) Für welche Werte von α ist das im beschriebenen Sinne glatt? Was ist für die anderen zugelassenen Werte von α ? Zeichnen Sie einige typische Graphen.

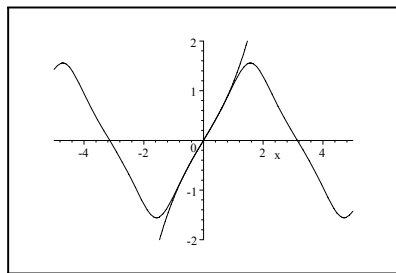
Zusammenfassung: In diesem Abschnitt wurde ein zu merkendes **Begriffssystem** eingeführt und ein nützliches Resultat zur Extremwertbestimmung hergeleitet, das im Bereich konkreter Probleme einzusetzen ist. Wichtig ist dabei, jeweils an die Gültigkeitsvoraussetzungen zu denken. Hauptanwendungsbereich sind die im folgenden Abschnitt besprochenen Kurvendiskussionen.

10.2 Kurvendiskussion

Es geht hierbei typischerweise um folgendes Problem: Gegeben eine reelle Funktion in Form eines Rechenausdruckes. Man möchte das Verhalten dieser Funktion verstehen, möchte die charakteristischen Züge des jeweiligen Verhaltens herausarbeiten und so für weitergehende und neue Fragestellungen eine möglichst günstige Startposition einnehmen. Die Arbeit sollte überdies nicht unnötig aufwendig sein.

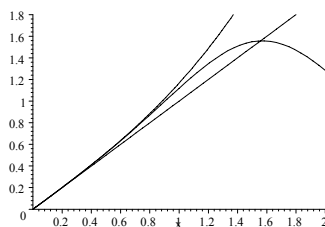
Und schließlich: Die Arbeit soll nicht darin bestehen, eine primitive Imitation der jeweiligen verfügbaren Rechenhilfen zu werden, d. h. im Augenblick: der Computeralgebraprogramme. Also selbst zu einer kleinen und notwendig in den Leistungen armseligen Rechenmaschine zu werden. Vielmehr sollte man anstreben, immer in gewisser Weise **besser** als die Hilfsmittel zu sein, Dinge zu verstehen, die über den Horizont der Hilfsmittel gehen.

(10.2.1) Ein Beispiel: Wir lassen den Graphen der Funktion $f(x)=\tan(\sin(x))$ zeichnen und fragen: "Kann man die Ursache der Form des Graphen um $x=0$ verstehen?" . Wir notieren Information, die bei Inspektion des Rechenausdrucks bzw. des Graphen sofort auffällt.



f ist definiert für alle x aus \mathbb{R}
 f ist ungerade
 $f(x)=x+\dots$ um $x=0$
 Vorzeichen $f(x)-x$???
 f hat Periode 2π
 Erstes Maximum bei $(\frac{\pi}{2}, \tan(1))$
 Wendepunkte bei ??? (2 Stück?)

Unsere Methoden ermöglichen es, zu der gestellten Ursachenfrage etwas Sinnvolles zu sagen, eine schematische Kurvendiskussion geht daran völlig vorbei. So kann man die Lage des ersten Maximums unmittelbar vorhersagen: Infolge der Monotonie des Tangens muß der Sinuswert maximal sein. Und das ist er für $x=\frac{\pi}{2}$. Der Wert ist $\tan(1) \approx 1.557$. Um die Form bei $x=0$ besser zu verstehen, benötigt man dominierende Polynomapproximationen für \tan und \sin . Diese geben wir ohne Begründung an: $\sin(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\dots$ und $\tan y=y+\frac{1}{3}y^3+\dots$. Einsetzen gibt $\tan(\sin(x))=(x-\frac{1}{6}x^3)+\frac{1}{3}(x-\frac{1}{6}x^3)^3+\dots = x+\frac{1}{6}x^3+\dots$. Das ist der bei $x=0$ dominierende Anteil, der über der Winkelhalbierenden liegt. Das zunächst besprochene Maximum zwingt die Kurve dann später unter die Winkelhalbierende. Im Bild ist $y=x+\frac{1}{6}x^3$ noch mit eingezeichnet. Der Schnitt $\tan(\sin(x))=x$ ergibt sich numerisch für $x_S = 1.557\dots$. Das ist fast $\frac{\pi}{2} = 1.570\dots$. Wir fassen das nochmals in einem Bild zusammen.



Zur numerischen Lösung der Gleichung: Vgl. (9.1.61). zur Polynomapproximation höherer Ordnung vgl. Kap. 5.1.3.

Diese Ergebnisse schematisch über eine Wertetabelle zu produzieren zu wollen, ist reine Beschäftigungstherapie und Eingehen auf den Wunsch, die Anstrengungen des Denkens zu vermeiden.

(10.2.2) Wie wollen wir vorgehen? Ziel soll es sein, die jeweiligen wichtigen Informationen effektiv zu erlangen und möglichst gut codiert zusammenzustellen, so daß ein ganzheitliches Bild des Verhaltens der Zuordnung entsteht.

(10.2.3) Hierzu setzen wir zielstrebig unsere bisher entwickelten Methoden und Resultate ein. Insgesamt kann man das wieder in Form eines Orientierungsschemas darstellen, das sich allerdings stark von dem in der Schule gebräuchlichen Schema zur Kurvendiskussion unterscheidet.

(10.2.4) Im Bedarfsfall kann man die nachfolgend zusammengestellten Punkte als eine Art Checkliste verwenden. Dabei können natürlich jeweils mehr oder weniger viele Stichworte **nicht** einschlägig sein. Zusätzlich kann und sollte man fallspezifische Elemente einbringen.

Die für unser erstes Beispiel einschlägigen Punkte haben wir oben bereits neben der Figur angegeben.

10.2.1 Orientierungsschema zur Kurvendiskussion

Wir beginnen mit einer Liste von Punkten, die man beim Vertrautmachen mit dem Verhalten einer Funktion beachten sollte. Im jeweiligen Einzelfall können einige dieser Punkte nicht einschlägig sein, sollten dann übergangen werden. Andere wird man je nach Situation fortlassen, wenn sie zu aufwendig werden. Mit etwas Übung sieht man sofort, welche Punkte jeweils nützlich und wichtig sind. Zur Einübung kann man die Liste jedoch zunächst nach Art einer Checkliste durchgehen. Dies sollte man auch für die nachfolgende diskutierten Beispiele tun. Die inhaltlichen Grundlagen für die angeführten Punkte haben wir bereits besprochen. Hier stellen wir sie nur noch einmal systematisch zusammen.

0♦ Analyse der spezifischen Aufgabenstellung

- Rollenverteilung - äußere Parameter, unabhängige Variable...?
- Spezifische Problemstellungen.

1♦ Inspektion des Rechenausdrucks

- Klassifikation (Polynom, rational,...)
- Bau - Verlaufsdiagramm
- Vereinfachung durch kleine Transformationen?
- Dimensionslose oder geometrische Größen einführbar?
- Sonstige Umformungen des Rechenausdrucks
- Von Aufgabensituation verlangter bzw. maximaler Definitionsbereich? Bild?

2♦ Halbquantitative (ev. geistige) Skizze des Graphen. In dieser Skizze sollten die Resultate und verbleibenden Fragen geeignet eingezeichnet werden, so daß man stets einen ganzheitlichen schnellen Zugriff zu allen bereits erlangten Informationen besitzt.

- Leichte Werte? (Etwa $x=0$?)
- Symmetrieeigenschaften?
- Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften?
- Dominanzargumente ($x \approx 0$, $x \rightarrow \pm\infty$, Nullstellen, Pole sind Kandidaten)

- Besondere Punkte aufspüren (Nullstellen, Extremstellen, Polstellen, Wendepunkte....). Die Existenz derartigen Punkte eventuell zunächst qualitativ feststellen.(Skizze!)
- Unbestimmtheitsstelle etwa $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auffinden und analysieren.
- Durch äußere Parameter bedingte Fallunterscheidungen?

3♦) Was bleibt offen ?

- Was bleibt offen? Welche qualitativ bekannten Punkte sind noch quantitativ festzulegen? (Extremwerte über $f'(x) = 0$, Wendepunkte über $f''(x) = 0$ usw. Die Art der Extremwerte folgt meist bereits eindeutig aus der Qualität)
- Ergibt die Fragestellung weitere fallspezifische zu behandelnde Fragen?

4♦) Gezielte Analyse der in 3) aufgeworfenen Fragen

- Ist ein genauer Graph - Computer - erforderlich. Welcher Bereich? Für welche Werte eventueller äußerer Parameter?
- Rechnerische Bestimmung nach 3) gesuchter Punkte. (Eventuell Newton, Computeralgebrasytem)

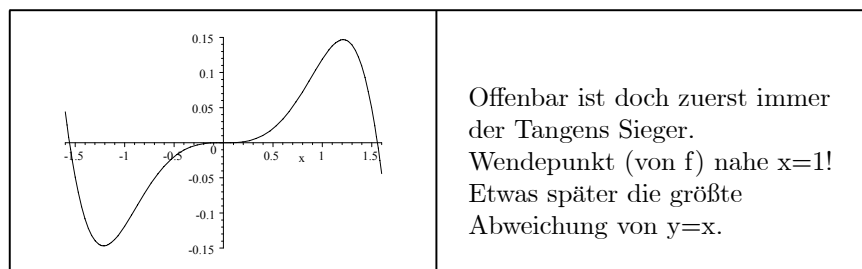
5♦) Beantwortung der spezifischen Fragen der Aufgabenstellung

- Konsistenz-Kontrolle

10.2.2 Beispiele

(10.2.5) Wir besprechen jetzt einige Beispiele, allerdings ohne Einbettung in eine konkretere Aufgabenstellung. Dabei führen wir rechts vom Graphen immer gleich die Punkte an, die man ohne größere Rechnung unmittelbar über die Checkliste erhält, also vor der Behandlung von Punkt 3.)

(10.2.5) Nochmals das Beispiel $y=\tan(\sin(x))$. Wie ist das Verhalten in der Nähe von Null zu verstehen? $\sin x \approx x$, etwas kleiner. $\tan x \approx x$ etwas größer. Also Streit zweier "engegengesetzter Prinzipien". Wer gewinnt? Am Ende sicher der Sinus, da dieser nie den Wert 1 überschreitet. Die Figur deutet an, daß dies zunächst nach dem Start bei $x=0$ auch bereits der Fall sein könnte, dann gewinnt offenbar das Wachstum des Tangens eine Strecke die Oberhand um schließlich doch zu unterliegen. Zur Verdeutlichung und Klärung wird man die Funktion $f(x)-x$ auftragen, also die Abweichung von der Tangentenapproximation. Als Bereich liegt $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ nahe.

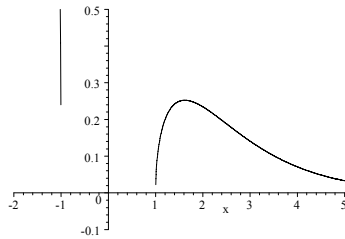


□ $y=\tan(a \cdot \sin(x))$. Was kann man durch geeignete Wahl des äußeren Parameters a erreichen?

(10.2.6) Wir betrachten $f(x) = e^{-x} \sqrt{x^2 - 1}$. Selbst bei sehr kleiner Schrittweite erreicht der (unten mit einem Computeralgebraprogramm) gezeichnete Graph nicht die x-Achse, was tatsächlich der Fall ist. Über Dominanz ergänzt man problemlos das zugehörige Verhalten. Hier

ist es mit unseren Methoden leicht, über Dominanzargumente eine weitgehend korrekte Skizze des Graphen zu erstellen.

Beachtenswert sind die unterschiedlichen Faktoren der beiden Dominanzfunktionen für die Nullstellen, der eine bewirkt das flache Maximum, der andere den viel stärkeren Anstieg bei -1.



Lücke bei $-1 < x < 1$
 Verhalten bei $x=1$: $e^{-1}\sqrt{2}\sqrt{x-1}$
 " bei $x=-1$: $e\sqrt{2}\sqrt{1-x}$
 -" bei $x=\infty$: e^{-x} dominiert (0)
 -" bei $x=-\infty$: e^{-x} dominiert (∞)
 Alle Werte positiv!
 Lage Maximum ?
 2 Wendestellen! ($x_{w1} \approx -1, x_{w2}$)

Es verbleibt die quantitative Bestimmung der Lage des Maximums und eventuell der Lage der beiden Wendepunkte. Jedenfalls ist es unsinnig, über das Vorzeichen der zweiten Ableitung zu prüfen, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Das folgt notwendig aus den bereits vorhandenen Daten.

Ableiten nach der Produktregel gibt :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}e^{-x} + \sqrt{x^2-1}(-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-1}} \{x - (x^2 - 1)\} = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-1}} \{x^2 - x - 1\}$$

(10.2.7) Achtung: Bei Ausdrücken, die über die Produkt- oder die Quotientenregel entstehen sollte man unbedingt folgende Endform anstreben:

1. Soviel ausklammern wie irgend möglich
2. Sind Brüche vorhanden, jeweils den Faktor mit dem höchsten negativen Exponenten ausklammern.

Die entstehende Form ist insbesondere zur Diskussion der Nullstellen geeignet.

(10.2.8) In unserem Fall finden wir zwei Nullstellen. Eine davon fällt in die Definitionslücke und ist daher zu streichen. Die andere $x_E = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.618$ ist die von uns gesuchte. Sie liegt rechts nahe bei der Nullstelle $x=1$. Der zugehörige Funktionswert ist

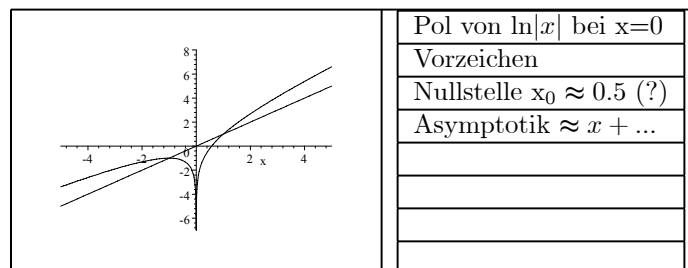
$$f(x_E) = e^{-x_E} \sqrt{x_E} = e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} = .25223$$

Wie die Figur bereits zeigt, ist das Maximum bemerkenswert flach. (Achten sie auf den Maßstab in der Figur!)

- Bestimmen Sie die 2. Ableitung und damit näherungsweise die Lage der Wendepunkte. Anzustrebende Form der 2. Ableitung:

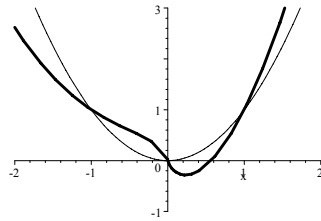
$$f''(x) = \frac{e^{-x}x [\dots]}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

(10.2.9) Beispiel $y = x + \ln(|x|)$. Hier nähert sich die Steigung asymptotisch dem Wert 1, aber die Kurven entfernen sich unendlich weit von der Geraden $y=x$. Es gibt einen schwachen Pol im Ursprung, der durch jeden Potenzfaktor beseitigt wird.



□ Bestimmen Sie eine numerische Näherung für die Lage der Nullstelle.

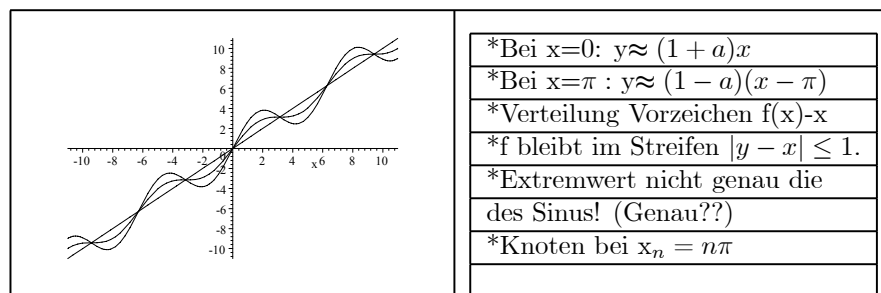
(..) Geändertes Beispiel: $y = x(x + \ln(|x|))$ Der zusätzlich Faktor x beseitigt die Polstelle des Logarithmus und ändert das asymptotische Verhalten .



$f(0)=0$ Dominanz
 Für alle x definiert
 Asymptotik $y=x^2$
 Ableitung bei $x=0$
 unendlich!
 Lage des Minimums?
 Wendepunkt?

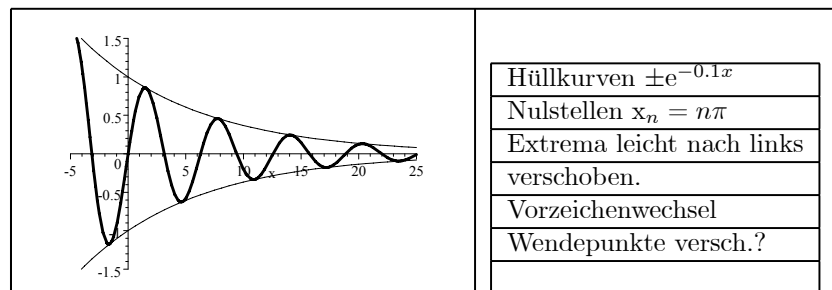
(10.2.10) Beispiel: Die Funktionen $y = x + a \cdot \sin x$ für $a=0,1$ und 2 . Über $\sin(x) \approx x$ wird das Verhalten in den Knotenstellen unmittelbar verständlich. Insgesamt gesehen dominiert das Verhalten von $y=x$. Extremwerte gibt es entsprechend erst ab $a=1$.

$x + \sin x$ und $x + 2 \sin x$ und allgemein $y=x+a \sin x$



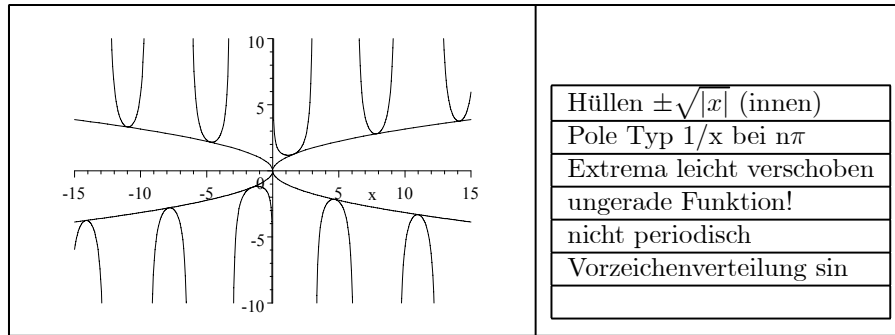
Die zugehörige Ableitung ist $1+a \cdot \cos x$, d.h. man hat $\cos x = -\frac{1}{a}$ zu lösen. Die Wendepunkte liegen in den Knoten.

(10.2.11) Ein weiteres Beispiel zur Multiplikation $y = e^{-0.1x} \sin x$.



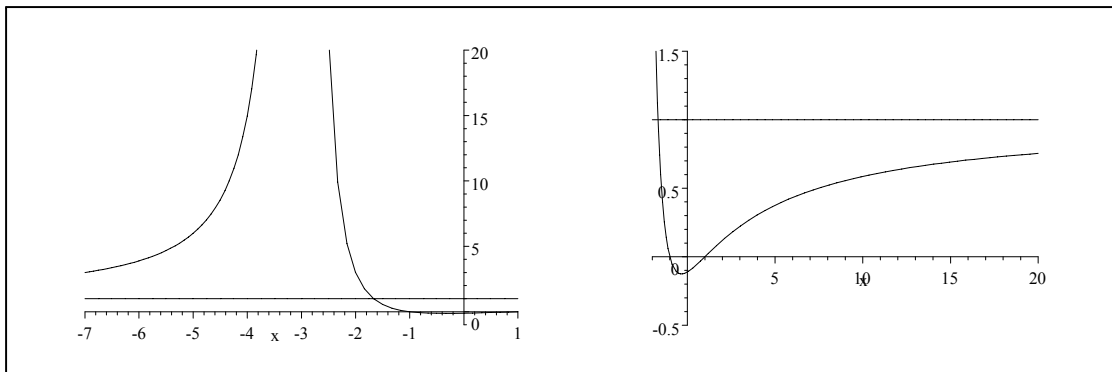
Miteingezeichnet sind die beiden Kurven $\pm e^{-0.1x}$. Deren Wert bestimmt den Wert von f an allen Stellen mit $\sin x = \pm 1$. Umgekehrt ergeben die Nullstellen des Sinus auch Nullstellen von f . Mit dieser Information erhält man bereits die ungefähre form des Graphen von f . Man bezeichnet derartiges als *gedämpfte Schwingung*.

(10.2.12) Und ein Beispiel zur Division. $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sin x}$



Eine ungerade Funktion mit Pol bei $x=0$. (Verhalten ungefähr wie $\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{1}{\pm\sqrt{|x|}}$. Erneut dominiert die Wurzelfunktion an den Stellen mit $\sin x = \pm 1$. Wegen $|\sin x| \leq 1$, also $\frac{1}{|\sin x|} \geq 1$ liegen die Funktionswerte stets außerhalb der Wurzelfunktionen. Die Nullstellen des Sinus ergeben die Pole. Die Extremwerte des Sinus sind nicht genau die von f .

(10.2.13) **Eine Schar rationaler Funktionen:** $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(b+x)^2}$ a und b reell. Quadratischer Pol ohne Vorzeichenwechsel bei $x=-b$ und Nullstellen bei $\pm a$. Der Pol liegt für $|b| > |a|$ außerhalb des Intervalles der beiden Nullstellen. Keine Symmetrie. Wert bei Null ist $-\frac{a^2}{b^2}$. Asymptotisches Verhalten folgt über $\frac{1 - \frac{a^2}{x^2}}{(\frac{b}{x} + 1)^2}$ zu $+1$. Damit liegen die Vorzeichenbereiche fest. Drei Fälle ergeben qualitative Unterschiede im Verhalten: $a > b$, $a < b$ und $a = b$. ($a, b > 0$ soll angenommen werden.) Als Beispiel wählen wir $a=1, b=3$. Man benötigt zwei Figuren, um das Verhalten zu erfassen, eine für den Polbereich und eine für den Nullstellenbereich. Die Annäherung an die Asymptote ist recht langsam!



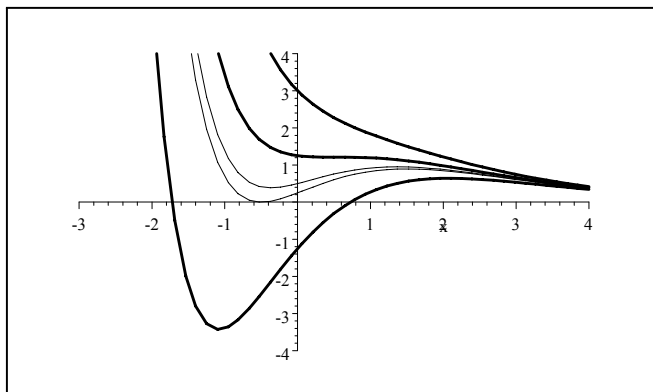
Wo liegt das (eine) Minimum?

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(b+x)^2} \quad f'(x) = \frac{2x(b+x)^2 - (x^2 - a^2)2(b+x)}{(b+x)^4} = 2 \frac{bx + a^2}{(b+x)^3}$$

Der Ort des Minimums ist $x_M = -\frac{a^2}{b} = -\frac{a}{b}a$. Der zugehörige Wert ist $y_M = \frac{\frac{a^4}{b^2} - a^2}{(b - \frac{a^2}{b})^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$.

(10.2.14) Beispiel: $f(x) = e^{-x}(x^2 + x + a)$

Dies ist ein weiteres Beispiel mit einem äußeren Parameter, der zu mehreren qualitativ unterschiedlichen Graphenformen führt.



□ Führen Sie die weitere Diskussion selbst.

(10.2.15) $f(x)=|x|^\alpha \ln(|x|)$. Wir gehen die relevanten Punkte des Schemas durch.

- Es liegt eine gerade Funktion vor. (x durch -x ersetzen)
- Inspektion zeigt: Vorzeichen ist positiv für $|x| > 1$.
- Nullstellen bei $x=1$ und $x=-1$.
- $f(x)<0$ für $|x| < 1$.
- Problemstelle bei $x=0$. Faktor $|x|^\alpha$ geht nach Null, log nach - Unendlich. Wer gewinnt? Die Potenz dominiert, also Nullstelle. Also muß zwischen 0 und 1 ein Minimum liegen (Genaue Lage offen!). (Partner in $x<0$ durch Spiegelung!)
- Verhalten nach Unendlich: Wie $|x|^\alpha$, also vorher auf jeder Seite ein Wendepunkt.

Die gezielte Berechnung des Minimums:

$f'(x) = \alpha |x|^{\alpha-1} \ln(|x|) + |x|^\alpha \frac{1}{x} = \varepsilon |x|^{\alpha-1} (\alpha \ln(|x|) + 1)$ wobei $\varepsilon = \pm 1$ je nach Vorzeichen von x. (Beachten Sie: ε ist die Ableitung von $|x|$! Es genügt für $x>0$ zu rechnen. Dann kann man das Betragszeichen einfach fortlassen!)

Nullsetzen gibt: $|x_m| = e^{-\frac{1}{\alpha}}$. Und Einsetzen $f(x_m) = e^{-1} \ln(e^{-\frac{1}{\alpha}}) = -\frac{1}{e\alpha}$.

Beachten sie, daß x_m i. a. recht klein ist. für $\alpha = \frac{1}{2}$ folgt $x_m = e^{-2} = 0.135\dots$

Und für $\alpha = \frac{1}{5}$ folgt $x_m = e^{-5} = 0.0067\dots$. Also bei ± 0.0067 liegen die beiden Minima mit einer Tiefe $f(x_m) = -\frac{5}{e} = -1.84\dots$. Sofern man nicht genau aufpaßt, wird einem ein Zeichenprogramm die dazwischen liegende Nullstelle nicht zeigen.

□ Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte!

10.3 Der Satz vom beschränkten Zuwachs

(10.3.1) Wir haben bereits mehrfach zwischen lokalen und globalen Eigenschaften unterschieden. Dies sind für die Mathematik und ihre Anwendungen sehr wichtige Begriffsbildungen. Für ein globales Maximum galt etwa die Ungleichung $f(x) \leq f(x_m)$ für alle x des Definitionsbereiches von f. Für ein lokales galt sie nur für irgendeine ε -Umgebung von x_m . Wir müssen jetzt etwas über die Bedeutung dieses harmlosen Wortes "irgendeine" nachdenken.

(10.3.2) Eine Konsequenz sieht so aus: Startet man mit eine Umgebung von x_m , etwa mit $[x_m - r, x_m + r]$ und möchte man für dieses Intervall die Aussage $f(x) \leq f(x_m)$ haben, dann kann man nie sicher sein, daß sie gilt. Man weiß nur, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das die Ungleichung stimmt, **aber dieses ε kann natürlich immer noch tausendfach kleiner sein als das gegebene r**, so daß die Aussage in dem vorgegebenen, zu kontrollierenden Bereich keineswegs überall stimmen muß.

Kurz: eine globale Aussage macht eine Aussage über ein im Szenenbild vorgegebenes Intervall. Eine lokale tut das nicht, macht nur eine Aussage über ein unkontrollierbares nicht vorgebares Intervall. **Alle unsere Resttermaussagen sind nun aber lokal**, also in diesem Sinne nie kontrollierbar. Das ist ein offensichtliches Defizit, da man für viele Probleme schon globale kontrollierbare Aussagen über den Fehler benötigt.

(10.3.3) Wir besprechen daher jetzt einen mathematisch anspruchsvolleren Satz, der tatsächlich eine globale Aussage für ein kontrollierbares Intervall macht.

(10.3.4) Wir beweisen den Satz hier **nicht**, formulieren ihn nur, bemühen uns um genaueres Verständnis seines Gehaltes und leiten eine Reihe nützlicher Konsequenzen her.

(10.3.5) Wir beginne mit einem **physikalischen Modell der Aussage des Satzes**:

Wir stellen uns vor, wir hätten drei Fahrzeuge, etwa Autos, die sich entlang einer Geraden bewegen. Uns interessiert die Bewegung im Zeitraum $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t = t_1$. Das sei unser fest vorgegebenes und zu kontrollierendes Intervall. Die drei Bahnkurven wollen wir mit $t \mapsto s(t)$, $t \mapsto s_+(t)$ und $t \mapsto s_-(t)$ bezeichnen. Uns interessiert der vom ersten Fahrzeug im Zeitraum zurückgelegte Weg, also die Größe $s(t_1) - s(t_0)$.

Aber wir können diesen Weg nicht beobachten, sondern nur die momentanen Geschwindigkeiten, die wir entsprechend $t \mapsto v(t)$, $t \mapsto v_+(t)$ und $t \mapsto v_-(t)$ nennen wollen. Und zwar soll für alle betrachteten Zeitpunkte gelten $v_-(t) \leq v(t) \leq v_+(t)$. Oder auch: Zu - und + gehören zwei Vergleichsfahrzeuge, von denen das eine **immer langsamer** und das andere **immer schneller** ist, als das uns interessierende Fahrzeug. Dann sagt uns unsere phisikylische Vorerfahrung, daß folgende Ungleichung gelten muß

$$s_-(t_1) - s_-(t_0) \leq s(t_1) - s(t_0) \leq s_+(t_1) - s_+(t_0).$$

Oder: **Das immer langsamere Fahrzeug legt den kleinsten Weg, das immer schnellste den größ tenWegzurück.DerinteressierendeWegliegtdazwischen.**

(10.3.6) Nun hat man in Mathematik und Physik die Erfahrung gemacht, daß vorschnelle Verallgemeinerungen von Alltagserfahrungen gefährlich sein können. Im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie hat sich die gerade zum Bereich der Geschwindigkeitsvorstellungen herausgestellt. Und im Bereich der Funktionen hat man auch viele Monstrositäten gefunden. Aber im Fall des soeben beschriebenen Sachverhaltes klappt ein allgemeiner Beweis, auf den wir hier allerdings verzichten. Stattdessen interessiert uns die genauere Formulierung und die Art seiner Anwendung.

(10.3.7) Die Formulierung so eines mathematischen Satzes besteht immer aus einem **Voraussetzungsteil**, der das benötigte Szenenbild wiedergibt. Bei jeder Anwendung muß dieser Teil genau überprüft werden, ist zu verifizieren, daß alle verlangten Sachverhalte vorliegen. Danach kommt ein **Ergebnisteil**, der etwas angibt, aussagt, was unter diesen Umständen gilt. Und zwar unbesehen **immer gilt**. Mit dem man dann weiterarbeiten kann. Anfänger haben mit der Strenge dieses Konzeptes vielfach Schwierigkeiten. Zum Teil verbleiben immer noch untergründige Vorstellungen, das sei alles nur unnötig kompliziert gemacht, eigentlich gehe es nur um einen speziellen Fall (nicht **alle**), bis hin zu der diffusen Vorstellung, es gäbe ja eigentlich gar keine absolute Wahrheit, nichts Sicheres, wozu also die Anstrengung, das genau zu verstehen.

(10.3.8) Formulieren wir also einmal unseren Satz im mathematischen Sinne:

♣ **Der Satz vom beschränkten Zuwachs.**

♠ (1) Es sei $f=(D,x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ überall differenzierbar und $I=[a,b] \subset D$.

(2) g_+ und g_- seien zwei weitere Funktionen mit denselben Eigenschaften.

(3) Für alle $x \in I = [a, b]$ gelte: $g'_-(x) \leq f'(x) \leq g'_+(x)$.

■ **Dann folgt für alle $x \in I$, d.h. x mit $a \leq x \leq b$:**

$g_-(x) - g_-(a) \leq f(x) - f(a) \leq g_+(x) - g_+(a)$

Und speziell

$g_-(b) - g_-(a) \leq f(b) - f(a) \leq g_+(b) - g_+(a)$

Unter ♣ befindet sich eine Bezeichnung des Satzes. Diese soll (hier) den Inhalt möglichst prägnant charakterisieren. Und das Resultat des Satzes ist ja, den interessierenden Zuwachs, die Änderung der Funktionswerte zwischen zwei numerischen Schranken einzuschließen.

Unter ♠ sind dann drei zu erfüllende Voraussetzungen angeführt. Beachten Sie, daß das Szenenbild 3 Funktionen und die beiden Zahlen a und b benötigt.

Unter ■ steht das dann gültige Resultat. Dieses ist jeweils **mit den im Szenenbild eingeführten Größen** zu formulieren, nicht etwa allgemein abzuschreiben, wie immer wieder unter dem Stichwort falsch verstandener Allgemeinheit geglaubt wird.

(10.3.9) Wie wendet man diesen Satz üblicherweise an? Nun man hat zunächst typischerweise f, die Funktion über deren Änderung man etwas wissen möchte. Man hat aber nur Information über die Ableitung f'. Dann versucht man dazu die beiden Funktionen g₊ und g₋ zu finden, eventuell zu raten. Dies muß so geschehen, daß die wichtige unter (3) stehende Ungleichung erfüllt ist. Ist das alles der Fall, darf man das Resultat mit der Konkretisierung für den gewählten Fall abtrennen.

10.3.1 Anwendungsbeispiele

10.3.1a Monotonie

(10.3.10) Es sei F in D differenzierbar, [a,b] ⊂ D und für alle x ∈ [a,b] gelte f'(x) ≥ 0. Die Tangente habe also nie negative Steigung. Was folgt?

Wir wählen g₋(x) = 0 und g₊(x) = f(x). Das ist zulässig! Alle geforderten Bedingungen sind erfüllt. Wir dürfen konkretisieren und finden für alle x mit a ≤ x ≤ b :

$$0 - 0 \leq f(x) - f(a) \leq f(x) - f(a).$$

Die rechte Ungleichung ist trivial. Aber die erste besagt f(a) ≤ f(x). Interpretieren wir a als äußeren Parameter, so folgt: Für alle x₁ und x₂ mit a ≤ x₁ ≤ x₂ ≤ b folgt f(x₁) ≤ f(x₂). D.h

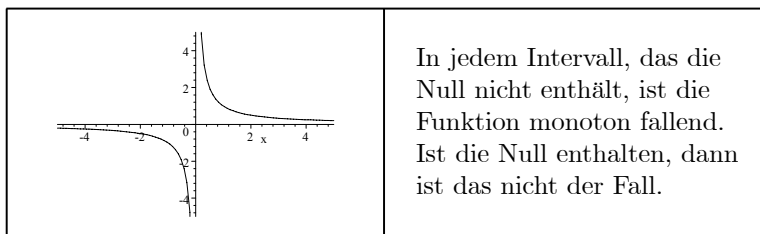
F ist im Intervall [a,b] eine monotone Funktion .

Das ist ein erstes nützliches Resultat. Ein entsprechendes Resultat folgt, wenn f'(x) ≤ 0 im Intervall gilt.

□ Kontrollieren und diskutieren Sie das Resultat an den Beispielen h₂, h₃, exp und sin.

Ergebnis: Gilt in einem Intervall f'(x) ≥ 0, dann ist f dort monoton wachsend. Gilt dort f'(x) ≤ 0, dann ist f dort monoton fallend.

(10.3.11) Wie steht es mit der Funktion x ↦ f(x) = x⁻¹ = 1/x ? Hier ist f'(x) = -x⁻² ≤ 0. Aber der Definitionsbereich enthält die Null nicht. Und das bedeutet, man darf das Resultat nicht auf Intervalle anwenden, die x=0 enthalten. Wir haben ein Beispiel dafür, daß man beim Prüfen der Voraussetzungen Sorgfalt walten lassen muß, wenn man sich keine Fehlschlüsse einhandeln will.



10.3.1b Schranken für den Zuwachs

(10.3.12) Ein zweites Beispiel. Die folgende Situation tritt recht häufig auf und das zugehörige Resultat erweist sich in vielen Situationen als nützlich. Wir nehmen an, wir hätten für die Ableitung f' der uns interessierenden Funktion eine Ungleichung der folgenden Art: $m \leq f'(x) \leq M$ für alle x aus dem Intervall $[a, b]$. Dann können wir $g_+(x) = Mx$ und $g_-(x) = mx$ setzen und erhalten die gewünschte Ungleichung. Alle Bedingungen sind erfüllt und wir dürfen folgern:

$$\boxed{m(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x - a)}$$

Wie die Überschrift andeutet, haben wir **Schranken für den Zuwachs** gewonnen.

10.3.1c Globale Fehlerabschätzung für die Tangentenapproximation

(10.3.13) Jetzt können wir auch eine einfache globale Abschätzung des Fehlers der Tangentenerlegung gewinnen. Für den absoluten Fehler haben wir

$$\Delta x \mapsto F(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$$

Ableiten (nach Δx) gibt $F'(\Delta x) = f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)$. Beachten Sie: $F(0) = 0$. Wir wollen Δx im Intervall $0 \leq \Delta x \leq A$ betrachten. Wir nehmen an, daß in diesem Bereich gilt $m \leq f'(x) - f'(x_0) \leq M$ gilt! Für alle x mit $x_0 \leq x \leq x_0 + A$. Wir können das vorangegangene Resultat anwenden und erhalten wegen $F(0) = 0$:

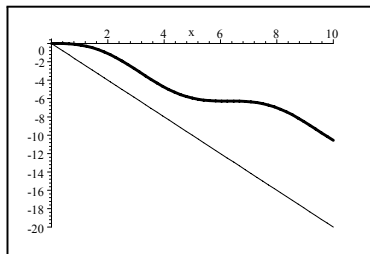
$$\boxed{m\Delta x \leq F(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \leq M\Delta x}$$

Die Beziehung ist bisher nur für positive Δx geführt. Man kann die Argumentation jedoch auch auf negative ausdehnen. Wir wollen das nicht tun, sondern ein konkretes Beispiel ausführen.

(10.3.14) Wir wählen $f = \sin$, $x_0 = 0$. Dann ist $F(\Delta x) = \sin(\Delta x) - \Delta x$. Das ist der exakte absolute Fehler. Und es ist $f'(x) = \cos(x)$. Also $\cos x - 1$. Wir haben $-2 \leq f'(x) - f'(0) \leq 0$. Das gibt uns die Abschätzung

$$-2\Delta x \leq F(\Delta x) \leq 0.$$

Die Figur gibt den exakten Fehler und unsere Abschätzungen $-2x$. Die Abschätzungen sind nicht besonders gut, aber eben global gültig.



10.3.1d Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz

(10.3.15) Diese wichtige und bemerkenswerte Eigenschaft läßt sich mit Hilfe des Satzes vom beschränkten Zuwachs beweisen. Was ist damit gemeint? Wir bilden den Quotienten $\frac{e^x}{x^N}$ und lassen x nach unendlich gehen. Die Behauptung ist, daß der Quotient dies auch tut. Natürlich kann dieser Quotient zunächst sehr klein sein, aber irgendwann wird er zu wachsen beginnen und beliebig groß werden. Im Zusammenhang mit der Verhaltensdiskussion von Funktionen werden Eigenschaften dieser Art vielfach benutzt.

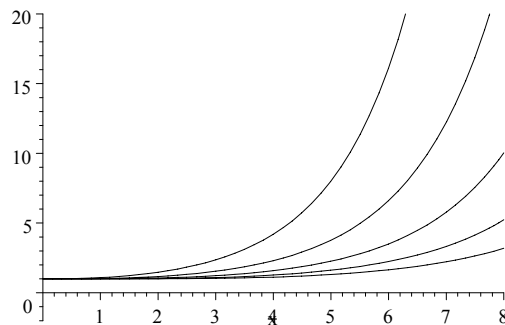
(10.3.16) Zur Herleitung starten wir mit der sicher gültigen Ungleichung $1 \leq e^x = f'(x) \leq e^x$ für $x \geq 0$. Wir wählen $f(x) = e^x$ und $g_-(x) = x$. Für $0 \leq x \leq A$ und A beliebig. Die Voraussetzungen sind erfüllt. Wir benutzen nur die untere Ungleichung und erhalten $x - 0 \leq e^x - 1$. Oder

$x + 1 \leq e^x$. Jetzt wählen wir $g_-(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ neu. Die zugehörige Ungleichung ist erfüllt. Wir folgern: $\frac{1}{2}x^2 + x \leq e^x - 1$ oder $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \leq e^x$. Usw. Am Ende erhalten wir

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1} \leq e^x$$

Das ist für jedes N und jedes $x \geq 0$ eine gültige Ungleichung! Teilen wir jetzt beide Seiten durch x^N , so folgt $x^{-N} + \frac{1}{1!}x^{-N+1} + \frac{1}{2!}x^{-N+2} + \dots + \frac{1}{(N+1)!}x^1 \leq \frac{e^x}{x^N}$. Und die linke Seite geht sicher nach unendlich. Genauer: Alle Summanden gehen nach Null, bis auf den letzten. Der geht nach unendlich, wenn auch eventuell wegen des Vorfaktors $\frac{1}{(N+1)!}$ sehr langsam.

Die ersten Quotienten ergeben folgende Graphen:



(10.3.17) Man kann die Argumentation weiter ausschlachten und erhält dadurch eine größere Zahl nützlicher Gebrauchsregeln

| Für x nach: | und f(x)=: | geht f(x) nach |
|-------------|-------------------------------------|----------------|
| $+\infty$ | $\frac{e^x}{x^N}$ | ∞ |
| $+\infty$ | $x^N e^{-x}$ | 0 |
| $+\infty$ | $x^{-a} \log^k(x) \quad a > 0$ | 0 |
| $+\infty$ | $\frac{x^a}{\log^k(x)} \quad a > 0$ | ∞ |
| 0 | $x^a \log^k(x) \quad a > 0$ | 0 |
| 0 | $\frac{1}{\log^k(x)}$ | 0 |
| | $ x ^a \log^k(x)$ | ∞ |

All diese Regeln lassen sich zum Merken zusammenfassen:

Jede Exponentialfunktion dominiert jede Potenzfunktion und jede Potenzfunktion dominiert jeden Logarithmus!

(10.3.18) Das gilt für die angegebenen multiplikativ gebildeten Terme, aber analog auch für additiv gebildete. So geht $e^x - x^{100}$ nach $+\infty$ für x nach unendlich. Und $x^{-0.1} + 10^6 \log(|x|)$ geht letztlich nach $+\infty$ für x nach Null, auch wenn die negativen Werte des Logarithmus zunächst beträchtlich überwiegen.

Wir haben x nach $-\infty$ in der Tabelle nicht berücksichtigt. Man erhält diese Fälle durch Spiegelung an der y -Achse. So geht $x^N e^x$ nach Null für x nach $-\infty$. Weil $x^N e^{-x}$ nach Null geht für x nach ∞ . Zeichnet man Figuren, ist das häufig nicht zu erkennen!

- Die Figur gibt den Graphen von $y=|x|^{0.2} \log(|x|)$, so wie er von einem Computeralgebraprogramm produziert wurde. Was sagen Sie dazu?

