****

Vorkurs Mathematik

Teil II Analysis

F. Krause

Kapitel 9

Die Tangentenzerlegung

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Inhaltsübersicht Kap. 9

9.1 **Die Tangentenzerlegung**

Wir formulieren ein für die Arbeit mit glatten Funktionen wichtige Fragestellung und führen den Ableitungsbegriff in moderner Formulierung ein. Diese Formulierung ist für die praktische Problemlösung weitaus besser geeignet als die herkömmliche, sie ist verallgemeinerungsfähiger und sie verdeutlicht die Zusamenhänge.

9.1.1 **Die Problemstellung**

(9.1.1) Das Verhalten einer Funktion in den Griff zu bekommen, erweist sich vielfach als recht schwierig. Wir wollen ein Hilfsmittel einführen, das bei dieser Aufgabe gute Dienste leistet. Es ist außerordentlich verallgemeinerungsfähig und für zahlreiche Probleme mehr als nützlich.
(9.1.2) Wir gehen von dem folgenden **Szenenbild mit Problemstellung** aus: Gegeben sei die reelle Funktion f mit Rechenausdruck y=f(x). Dazu ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ des Graphen. Diese Dinge seien bekannt. **Jetzt möchte man mit möglichst wenig Aufwand möglichst viel über das Verhalten von f in der Nähe von $(\mathbf{x}_0, f(x_0))$ in Erfahrung bringen.**

Möglichst wenig Aufwand soll spezieller besagen, mit möglichst wenig rechnerischem Aufwand.

Oder auch: Man interessiert sich nicht für alle Funktionswerte f(x) gleichermaßen, sondern mehr für die, deren x-Wert in der Nähe von x_0 liegt. (Eine solche Fragestellung charakterisiert man als *lokal* im Gegensatz zu einer *globalen* Fragestellung. x_0 nennen wir auch den *Aufpunkt.*)
(9.1.3) Es liegt nahe, **situtionsbezogene Koordinaten** einzuführen. Wir setzen $x = x_0 + \Delta x$. Dann ist Δx die jeweilige Abweichung vom *Aufpunkt* x_0. Die Größe von Δx gibt an, wie weit wir uns von x_0 entfernt haben. Damit ist ein Rollenwechsel verbunden: Δx wird unabhängige Variable, $x = x_0 + \Delta x$ wird Hilfsgröße und x_0 äußerer Parameter. Uns interessiert also das Verhalten von $\Delta x \mapsto f(x_0 + \Delta x)$ in der Nähe von $\Delta x = 0$. Der Aufpunkt wird zum neuen Ursprung.
(9.1.4) Beispiel: $f(x)=e^{\tan(\sin(2x+x^2))}$ und $x_0 = 0$. Dann ist f(0)=1. Damit haben wir die benötigten Zutaten für unser Problem: Wie verhält sich f(x) für kleine x? Wir werden auf das Beispiel in (9.3.3) zurückkommen.

9.1.2 **Die Idee der Tangentenzerlegung**

(9.1.5) Wir versuchen eine Antwort mit Hilfe einer geschickten problemspezifischen **Umformung des Rechenausdrucks** zu gewinnen. Und zwar wollen wir diesen in eine Summe aus zwei Termen zerlegen. Der erste Summand soll leicht zugänglich, berechenbar sein und bereits den größten Teil des Funktionswertes liefern. Er soll eine dominierende Approximation darstellen. Der zweite Teil soll eine relativ kleine Korrektur bilden und darf exakt schwerer zugänglich sein.
(9.1.6) Nun kann man eine reelle Zahl wie $f(x_0 + \Delta x)$ nicht einfach eindeutig als Summe $f(x_0 + \Delta x) = \mathit{Approximation}$ +Fehler schreiben. Um eine derartige Darstellung eindeutig zu machen, muß man noch an mindestens einen der Summanden eine **Zusatzbedingung** stellen.

Beispiel: Gegeben eine reelle Zahl wie 25.13. Diese läßt sich eindeutig als Summe 25+0.13 schreiben, **falls man verlangt**, daß der erste Summand ganz und der zweite eine Zahl zwischen 0 und 1 (aussschließ lich) sein soll.
(9.1.7) Folgende Zerlegung leistet für $f(x_0 + \Delta x)$ das Gewünschte. Begründungen und Erläuterungen werden folgen. Das Schema führt die zugehörigen Bezeichnungen ein und ebenso die benötigten Bedingungen:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m\Delta x + \Delta x \cdot R_f(x_0, \Delta x)}$$

$f(x_0)$heißt *konstanter Term*
$m\Delta x$ heißt *linearer Term.* m ist zunächst äußerer Parameter.
Dabei sind x_0 und f äußere Parameter.
$F_f(x_0, \Delta x) = \Delta x \cdot R_f(x_0, \Delta x)$ ist der ***absolute Fehler.***
$R_f(x_0, \Delta x)$ ist der ***Restterm*** oder *lokale Fehler.*
Die **Resttermbedingung** schließlich lautet $\lim_{\Delta x \to 0} R_f(x_0, \Delta x) = 0$
D.h. Der Restterm hat für $\Delta x = 0$ eine Nullstelle.
Oder: Der absolute Fehler hat eine **stärker als lineare** Nullstelle.

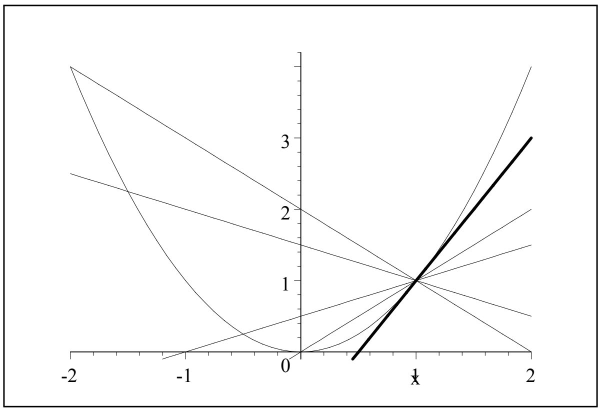
(9.1.10) Jede Zerlegung der gegebenen Art nennen wir

$$\boxed{\textit{eine Tangentenzerlegung von } f \textit{ um } x_0.}$$

(9.1.11) Jetzt die Erläuterung: Die Zuordnung $\Delta x \mapsto f(x_0)+m\Delta x$ beschreibt eine Gerade mit Steigung m, die durch den Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$ geht. Die Darstellung in den ursprünglichemn Koordinaten zeigt dies deutlich: $x \mapsto f(x_0) + m(x - x_0)$. Geeignete Wahl von m wird **dann die Tangente an den Graphen** von f in $(x_0, f(x_0))$ liefern. Und die Funktionswerte der Tangente sollten die gewünschte lokale Approximation liefern.

(9.1.12) Die angegebene Summenzerlegung ohne die Resttermbedingung ist sicher zunächst nicht eindeutig. Oder: Jede Wahl des äußeren Parameters m wird ein F_f bzw $R_f = R_{f,m}$ eindeutig festlegen und damit eine zugehörige Zerlegung des Rechentermes von der angegebenen Art. Aber diese Zerlegungen werden i. a. die geforderte Resttermbedingung nicht erfüllen. **Machen Sie sich den Inhalt dieses Absatzes unbedingt ganz klar!**

(9.1.13) In der Figur sind für $f(x) = x^2$ und $(x_0, f(x_0)) = (1, 1)$ mehrere dieser Geraden eingezeichnet. Die mit m=2 ist offenbar als Approximation besonders gut.



(9.1.14) Jetzt ein Beispiel, das zeigt, daß nach Vorgabe von m der Resterm eindeutig bestimmt ist. Wir wählen f(x)=$\frac{1}{x}$ und und $(x_0, f(x_0)$. Ebenso sei m vorgegeben. Dann ist beispielsweise $f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0+\Delta x}$. Dies formen wir in der gewünschten Weise um:

$$\begin{array}{ll} f(x_0 + \Delta x) = & f(x_0) + m\Delta x + \Delta x \cdot R(x_0, \Delta x) \\ \frac{1}{x_0+\Delta x} = & \frac{1}{x_0} + m\Delta x + \Delta x \cdot R(x_0, \Delta x) \end{array}$$

Die untere Gleichung lösen wir nach R auf und finden über Hauptnennerbildung:

$$\Delta x R(x_0, \Delta x) = \frac{-(1 + mx_0^2)\Delta x - mx_0\Delta x^2}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

(9.1.15) Eigentlich sollten wir $R_{f,m}$ oder R_f^m statt R schreiben. Denn der Restterm hängt von beiden Größen ab. Wir nehmen an, daß dieser Sachverhalt aus dem Zusammenhang klar ist und unterlassen daher teilweise diese Schreibweise.

(9.1.16) Dividiert man durch Δx (für $\Delta x \neq 0$), so sieht man, daß die verlangte Resttermbedingung **nicht** erfüllt ist. Oder: R hat keine Nullstelle bei $\Delta x = 0$. Es sei denn, man hätte $1+mx_0^2 = 0$. Für $m = -1/x_0^2$ ist das erfüllt. **Für diese und nur diese Wahl der Steigung m liegt im angegebenen Sinne eine Tangentenzerlegung von f um x_0 vor.**

> Nochmals: Gibt man m vor, dann ist dadurch $R=R_f^m$ für $\Delta x \neq 0$ eindeutig bestimmt. Man kann nach R auflösen. Aber die Resttermbedingung ist i.a. nicht erfüllt. Wir suchen nach denjenigen Werten von m, für die diese Bedingung erfüllt ist.

9.1.2a Einschub: **Absoluter, relativer und lokaler Fehler**

(9.1.17) Die Differenz zwischen dem exakten("wahren") Wert einer Größe und einem zugehörigen Näherungs- oder (ungenauem) Meßwert bezeichnet man meist als "absoluten Fehler". In vielen Fällen, speziell auch im Rahmen physikalischer Naturbeschreibung, ist der absolute Fehler kein besonders geeignetes quantitatives Maß, um die Qualität einer Näherung oder Messung zu diskutieren. Ein "Fehler von 2 Metern" kann ín einem Fall (Konstruktion eines Bauwerkes von 50 Meter Höhe) außerordentlich groß, in einem anderen (Entfernungsbestimmung zwischen zwei Kontinenten) sehr klein sein. Meist ist es günstiger, den "relativen Fehler" anzugeben, bei dem man den absoluten Fehler noch durch den exakten Wert dividiert. Im Beispiel 2/50 beim Gebäude bzw. bei einer interkontinentalen Entfernung von $6 \cdot 10^3$ km $\frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \approx 3 \cdot 10^{-7}$. In einer Graphendarstellung besagt das: Der absolute Fehler ist unabhängig von der Höhe, in der er auftritt. Der relative dagegen zählt um so weniger, je weiter der exakte Wert sich von der horizontalen Achse entfernt.
(9.1.18) Für unser Problem ist auch der relative Fehler wenig geeignet, da es nicht darum geht, in welchem Abstand von der x-Achse wir den Graphen durch eine Gerade approximieren, sondern die Genauigkeit sollte an die Entfernung von x_0 gekoppelt sein! Und das gehört zu einer Parallele zur y-Achse. Eine naheliegende Möglichkeit, dies zu erreichen, besteht darin, den absoluten Fehler durch Δx zu dividieren. Ein solcher Faktor wirkt bei der Analyse des Fehlers wie ein Mikroskop, dessen Vergrößerung immer mehr wächst, je stärker man sich x_0 nähert! Hat man einen absoluten Fehler von 2, so ergibt $2/\Delta x$ erneut 2 für $\Delta x = 1$. Für $\Delta x = 10^{-2}$ dagegen erhält man 200! Damit erhält der absolute Fehler eine ganz anderes Gewicht bei Annäherung an x_0.

! Wir wollen die so definierte Größe als *lokalen Fehler* bezeichnen.
(9.1.19) Fassen wir die drei eingeführten Möglichkeiten zur Beschreibung eines Fehlers bzw. einer Abweichung, zusammen. Als Beispiel nehmen wir die Funktionsapproximation durch eine Gerade.

absoluter F.	relativer Fehler	*lokaler Fehler*
$f(x) - g_m(x)$	$\frac{f(x)-g_m(x)}{f(x)}$	$\frac{f(x)-g_m(x)}{\Delta x}$
Völlig neutral bez. Lage im Koordinatensyst.	Gewichtet. Abstand zu x-Achse. Neutral bezüglich y-Achse.	Gewichtet Abstand zu x_0. Neutral bezüglich Abstand zu $x - Achse$.

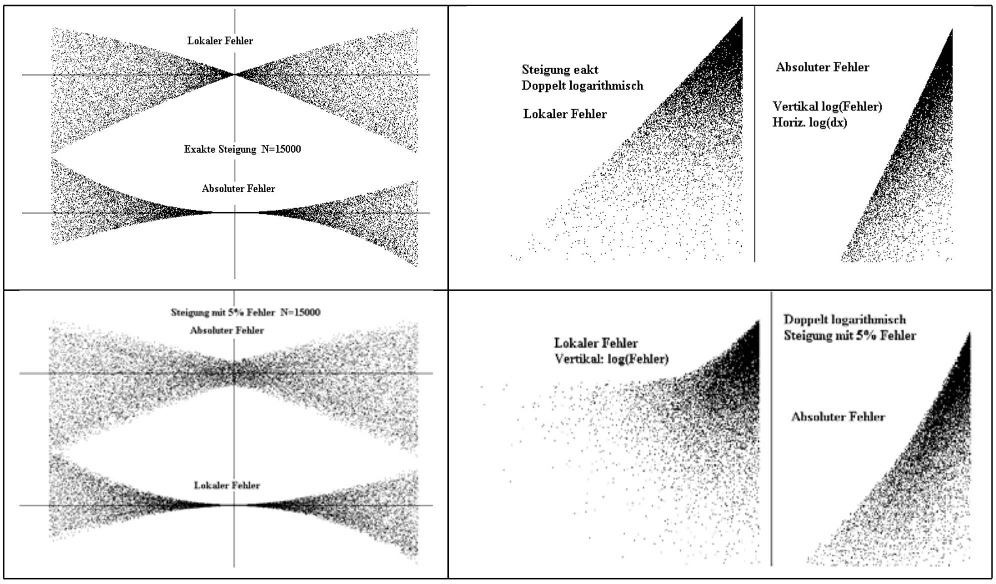
Es hängt vom jeweiligen Problem ab, welche dieser Größen man zu Fehlerbeschreibung verwendet.

(9.1.20) Für unser anstehendes Problem (9.1.2) liegt es nahe, den lokalen Fehler als Beschreibungsmaß zu verwenden. Unsere Geradenapproximation sollte ja umso genauer werden, je mehr wir uns x_0 nähern. Für $x=x_0$ stimmen wahrer Wert und Näherungswert sogar konstruktionsgemäß überein. Der absolute Fehler hat für jede Wahl von m den Wert 0 für $\Delta x = 0$. Der lokale Fehler hat dagegen dort den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$,."Null durch Null".

9.1.2b **Der Restterm als lokale Lupe**

(9.1.21) Die Division durch $\Delta x \neq 0$ vergröß ert den absoluten Fehler. Und zwar umso stärker, je näher man dem Ursprung kommt. Die Division wirkt wie eine Lupe, die sichtbar macht, wie stark der absolute Fehler nach Null geht. Eine doppelt logarithmische Auftragung verdeutlicht das noch mehr. Dann muß $\log|R_f(x_0, \Delta x)|$ nach Minus Unendlich wandern für Δx nach Null und somit $\log|\Delta x|$ nach Minus Unendlich.
(9.1.22) Wir wählen f=sin fest. Dazu den Aufpunkt x_0 zufällig zwischen -1 und +1 und Δx zufällig zwischen -.75 und +.75. Hierzu berechnen wir alle Größen der zugehörigen Tangentenzerlegung und tragen einmal den absoluten und einmal den lokalen Fehler gegen Δx auf. Jede Wahl gibt einen Punkt. Dazu dasselbe in doppelt logarithmischer Auftragung. Dies tun wir sehr oft, so daß ein Punkteschwarm entsteht. Im ersten Bild benutzen wir die exakte Tangentenzerlegung, also insbesondere die exakte Ableitung $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$. Im zweiten Bild stören wir die Steigung m zufällig bis zu 5%. Am absoluten Fehler ist wenig zu erkennen, der lokale Fehler zeigt die Auswirkung deutlich für beide Auftragungsarten: **Falsche Steigungswahl zerstört**

die Resttermeigenschaft des lokalen Fehlers.



9.1.2c **Die Eindeutigkeit der Tangentenzerlegung**

(9.1.23) Wir wollen zeigen (=**beweisen!**), daß es **höchstens** einen Wert für m gibt, für den die zugehörige Zerlegung die Resttermbedingung erfüllt. (D.h. entweder überhaupt kein m oder höchstens eines!) Um dies zu beweisen, nehmen wir an, wir hätten zwei Zerlegungen der beschriebenen Art gefunden, irgendwie konstruiert oder sonstwie erhalten. Insbesondere erfüllen beide Zerlegungen die Resttermbedingung.

Wir schreiben beide Zerlegungen auf:

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= f(x_0)+m_1\Delta x+\Delta x\cdot R_1(x_0,\Delta x) \\ f(x_0+\Delta x) &= f(x_0)+m_2\Delta x+\Delta x\cdot R_2(x_0,\Delta x) \end{aligned}$$

Zunächst könnten m_1 und m_2 verschieden sein. Und dann wären R_1 und R_2 natürlich auch verschieden. Das ist der Fall, den wir ausschließen wollen: *höchstens eine....*

Um das zu beweisen, gehen wir wie folgt vor: Wir subtrahieren beide Gleichungen und teilen für $\Delta x \neq 0$ durch Δx. Das gibt:

$$0 = 0 + (m_1 - m_2) + (R_1(x_0,\Delta x) - R_2(x_0,\Delta x).$$

Jetzt gehen wir zum Grenzwert $\Delta x \to 0$ über. Es handelt sich hier stets um Umformungen gültiger Gleichungen. Der Grenzwert existiert und gibt erneut eine gültige Gleichung, nämlich $0 = 0 + (m_1 - m_2) + 0$. Das ist aber nur für $m_1 = m_2$ möglich. Hieraus folgt sofort $R_1 = R_2$. Und das heißt: Beide Tangentenzerlegungen sind gleich.

(9.1.24) Falls es überhaupt eine Tangentenzerlegung von f um x_0 gibt, ist sie eindeutig bestimmt. Wir sagen daher von jetzt ab nicht mehr **eine Tangentenzerlegung,** sondern **die Tangentenzerlegung (von f um x_0).**

(9.1.25) Insbesondere ist die Zahl m (=Steigung der approximierenden Geraden) eindeutig festgelegt. Sie - also der ausgezeichnete Steigungswert - erhält von jetzt ab eine andere Bezeichnung, die das zugehörige Szenenbild stärker berücksichtigt. Und zwar müssen wir f und x_0 in der Bezeichnung mit angeben.

Besitzt f um $x_0$eine Tangentenzerlegung, dann bezeichnen wir die zugehörige Zahl m mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder ähnlichen Symbolen. Und wir nennen diese Zahl **die** *Ableitung von f in* x_0.

(9.1.26) Nochmals: Es kann durchaus vorkommen, daß f in x_0 keine Ableitung besitzt, dort nicht differenzierbar ist.

9.1.2d **Die Umcodierung der Information durch die Tangentenzerlegung**

(9.1.27) Die Tangentenzerlegung codiert die in $\Delta x \mapsto f(x_0+\Delta x)$ enthaltene Information um, stellt sie als Summe von drei Termen dar. Wir nehmen an, daß die Ableitung $f'(x_0)$ bekannt sei. Die drei Summanden besitzen dann unterschiedliche Zugänglichkeit: Der erste, $f(x_0)$ ist eine gegebene Konstante. Der zweite $f'(x_0)\Delta x$ erfordert die Multiplikation zweier Zahlen von denen die eine die unabhängige Variable ist. Der dritte Term ist aufwendig: Verlangt die Berechnung von R und die Auswertung nach Vorgabe von Δx. Umgekehrt nimmt die Größe oder zahlenmäßige Bedeutung dieser drei Terme typischerweise ab. (Δx klein.) Der erste Term $f(x_0)$ gibt den orientierenden Hauptbeitrag. $f'(x_0)\Delta x$ gibt dazu eine Korrektur und der dritte Term - der absolute Fehler - gibt nur noch den verbleibenden Unterschied. Unter dem Aspekt der Umcodierung ist der absolute Fehler, nicht der Restterm relevant.

(9.1.28) Schreiben wir das einmal für einen konkreten Fall auf. ($f(x)=\frac{1}{x}$, $f^{'}(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ wie oben gezeigt.) Wir wählen $x_0 = 0.5$ und Δx zunächst 0.05 und dann 0.005. Das ergibt die folgende Auswertung:

$f(0.5+\Delta x)$	=	f(0.5)	+(-0.5^{-2})Δx	+$F_f(0.5,\Delta x)$
$\frac{1}{0.5+0.05} = 1.8182$	=	2	-0.2	+0.0182
$\frac{1}{0.5+0.005} = 1.9802$	=	2	-0.02	+0.0002

Wir sehen mehr als deutlich die abnehmende Bedeutung der drei Terme. Insbesondere ergibt der schwierigste i.a. den kleinsten Beitrag.

(9.1.29) Dominanz heißt nach (8.3.12), den Rechenausdruck vereinfachen, so daß dennoch wichtige Strukturen erhalten bleiben. Wir erreichen dies, indem wir den kleinsten Term$F(x_0,\Delta x)$=$\Delta x R_f(x_0,\Delta x)$ vereinfachen. Wir ersetzen die exakte Information darüber, wie dieser Beitrag genau aussieht, durch die geringere Information, daß die Resttermbedingung erfüllt ist. Dieses Wissen ist ja vorhanden, wir benötigen dazu den exakten Rechenausdruck für R nicht mehr. Wir werden sehen, daß wir damit außerordentlich weit kommen.

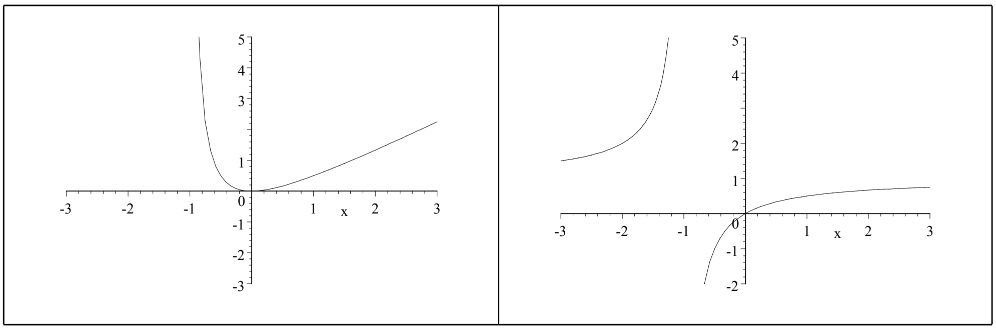
(9.1.30) Derartige Informationsreduktion ist im Alltagsbereich durchaus gebräuchlich. Wie beschreibt man den Ausgang eines Sportwettkampfes, etwa eines Fußballspieles? Man kann die gefallenen Tore mit Zeitangabe und Schützen aufzählen, man kann sagen *A hat gegen B 3:2 gewonnen.* Oder man reduziert einfach auf *A hat gegen B gewonnen.* Hierin ist die wichtigste Information enthalten. Analog dazu reduzieren wir auf den Sachverhalt: Der Restterm *R erfüllt die Resttermbedingung.*

(9.1.31) Als weitere Konsolidierung noch eine graphische Darstellung der Tangentenzerlegung.

Der Restterm für unser Beispiel $f(x)=\frac{1}{x}$ und $x_0 = 1$ ergibt sich zu

$$F(1,\Delta x) = \frac{1}{1+\Delta x} - 1 + \Delta x \quad \text{und} \quad R(x_0,\Delta x) = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{1+\Delta x} - 1 + \Delta x\right) = \frac{\Delta x}{1+\Delta x}$$

Die Endform von R zeigt die Resttermeigenschaft. Graphisch dargestellt:



Die verwendete Variable ist $\Delta x = x - 1$. Links F, rechts R.

9.1.2e **Tangente und Tangentenapproximation**

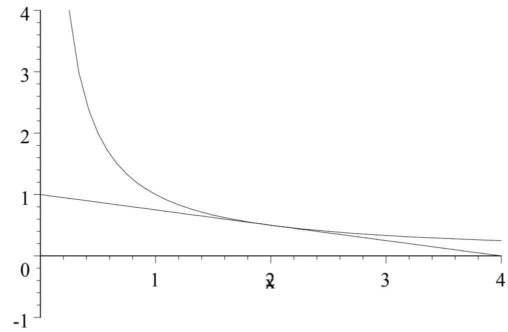
(9.1.32) Lassen wir den dritten Beitrag fort, so erhalten wir eine Näherung für $f(x_0+\Delta x)$, die um so besser wird, je kleiner Δx ist:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x$$

D.h. $f^{'}(x_0)\Delta x$ ist eine Näherung für die Werte**änderung** $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.
(9.1.33) Wir setzen dy=$f^{'}(x_0)\Delta$x. (Bezeichnungseinführung!) Der Fehler F(x_0, Δx) ist dann der Unterschied zwischen exaktem Wert und Näherungswert. Wir bilden den Quotienten dy/F. Dieser gibt an, wievielfach größer der mitgenommene Beitrag dy als der fortgelassene absolute Fehler ist. dy/F=10 besagt, daß der mitgenommene lineare Beitrag $f^{'}(x_0)\Delta x$ zehnmal so groß ist wie der fortgelassene absolute Fehler F. Dieser Beitrag wächst für $\Delta x \mapsto 0$ über alle Grenzen, sofern f$'(x_0) \neq 0$ ist.
(9.1.34) Die angegeben Approximation nennen wir suggstiv Tangentenapproximation *für f um* x_0. Graphisch besagt unsere Näherung, daß man den exakten Graphen durch die Tangente an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ ersetzt.
(9.1.35) Beachten Sie, daß die Tangentenapproximation tatsächlich die Gleichung einer Geraden, eben der Tangente, beschreibt. Die zugehörige Steigung ist f$'(x_0)$. Zur Erfassung der Geometrie der Tangente ist es nützlich, über $\Delta x = x - x_0$ wieder zu den alten Koordinaten zurückzukehren. In diesen Koordinaten lautet die Tangentengleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Das folgt aus der Punkt-Richtungsformel: Die Gerade geht durch den Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$ und hat die Steigung $f'(x_0)$.
(9.1.36) Ein konkretes Beispiel: $f(x) = 1/x$, $x_0 = 2$. Wir wissen $f(0) = \frac{1}{2}f'(2) = -\frac{1}{4}$. Also $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2)$ als Gleichung der zugehörigen Tangente. Die Graphik zeigt, wie die so definierte Tangente sich dem Graphen anschmiegt.

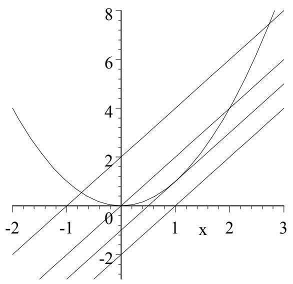
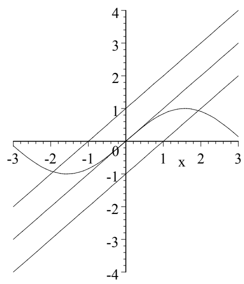


! **(9.1.37)** Damit können wir unsere Eingangsfrage beantworten: Gemäß dem Szenenbild sei $y_0 = f(x_0)$ bekannt. Weiter sei jetzt auch die Zahl $f'(x_0)$ bekannt. Nun ersetzen wir $y = f(x_0 + \Delta x)$ durch $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + dy$. Das erfordert als rechnerischen Aufwand eine Multiplikation und eine Addition! Und das Ergebnis ist der gesuchte Näherungswert für f(x). In unserem Beispiel ist für $-0.2 < \Delta x < 0.2$ im Graphen keinerlei Unterschied zwischen den beiden Werten zu erkennen.
□ Schätzen Sie in der Figur den Steigungswert der Tangente für x_0=1 und für x_0=$\frac{1}{2}$.

9.1.2f **Zur geometrischen Herkunft des Tangentenbegriffes**

(9.1.38) Mit dem Begriff der Tangente verbindet man gewisse geometrische Vorstellungen aus dem Bereich der Schnittmengenbstimmung. Nehmen wir den Schnitt einer Parabel mit einer Geraden. Dann gibt es zwei , einen oder keinen Schnittpunkt. Startet man mit einer Geraden ohne Schnittpunkt und verschiebt man die Gerade geeignet parallel, dann kommt man zuerst zu einer Geraden mit einem und danach mit zwei Schnittpunkten. **Die Gerade mit einem Schnittpunkt ist die Tangente oder Berührungsgerade zu diesem Schnittpunkt!**
□ Rechenbeispiel: $x \mapsto (x, px^2)$ mit p>0 parametrisiert eine Parabel. Als Gerade wählen wir y=a+2px oder vektoriell $t \mapsto (t, a + 2pt)$. Bestimmen Sie den Schnitt! Für welchen Wert des äußerern Parameters erhalten

Sie einen einzigen Schnittpunkt. Ist das in diesem Fall die erwartete Tangente? Vgl. die linke Figur.

(9.1.39) Also liegt es zunächst nahe, eine **geometrische Definition** der Tangente über den soeben beschriebenen Sachverhalt anzusetzen. Aber das führt zu Problemen: Nehmen Sie Kurven mit einem Wendepunkt. Etwa den Graphen von y=sin(x) oder den von y=x^3. Hier klappt die geometrische Einführung nicht, obwohl man von der Existenz einer Tangente im Wendepunkt überzeugt ist. Vgl. die rechte Figur.

□ Wie könnte man im Fall eines Wendepunktes geometrisch vorgehen, um die Tangente zu definieren?

(9.1.40) Unsere analytische Einführung umschifft all diese Schwierigkeiten: Falls eine geometrische Tangente existiert, dann wird sie durch die Tangenteapproximation bestimmt. Bereitet die geometrische Methode Schwierigkeiten, dann erhalten wir immer noch problemlos die erwartete Tangente.

9.1.2g **Die erste Denkfigur: Bestimmung einer Ableitung**

(9.1.41) Die Tangentenzerlegung wird vornehmlich auf zwei ganz bestimmte Weisen zur Problemlösung eingesetzt, die wir *erste und zweite Denkfigur* nennen wollen. Diese Denkfiguren treten relativ schematisch als eine Art Handwerkszeug immer wieder auf, so daß wir sie hier abstrahiert beschreiben wollen. (Kap. 1.8.1, modulares Arbeiten.)

(9.1.42) Die **erste Denkfigur** sieht wie folgt aus:

> Szenenbild: Eine Zuordnung $x \mapsto f(x)$ und ein Aufpunkt x_0 seien gegeben. Die Ableitung $f^{'}(x_0)$ sei jedoch unbekannt, ja eventuell sei nicht einmal klar, ob diese Ableitung existiert. Falls sie existiert, soll die Ableitung bestimmt werden.

Dann beginnt man mit $f(x_0+\Delta x\ )$ und versucht, diesen Ausdruck in die Form einer Tangentenzerlegung zu bringen. Heuristisch geschieht das vielfach einfach durch Sortieren nach Potenzen von Δx, generell durch geschickte Aufspaltung. Summanden ohne Δx sollten $f(x_0)$ ergeben, Beiträge mit genau einem Faktor Δx sollten den linearen Term ergeben und der gesamte Rest den absoluten Fehler. Diesen teilen wir durch Δx und erhalten den Restterm. Dann wird untersucht, ob die Resttermbedingung erfüllt ist. Ist sie es, so ist f in x_0 differenzierbar und man kann aus dem linearen Term die Ableitung ablesen.

Schema der ersten Denkfigur:

f(x_0 + Δx) in die folgende Form bringen:
f(x_0 + Δx)=f(x_0) + (....)Δx + Δx {....}
Für {....} die Resttermeigenschaft nachweisen
Dann ist f in x_0 differenzierbar und es gilt
$f^{'}(x_0) = (....)$. Die Ableitung ist ablesbar!

Für den gesamten Vorgang sagt man auch: *Die Funktion f wird im Punkte x_0* differenziert.

(9.1.43) Beispiel: $f(x) = h_n(x) = x^n$. Wir starten mit $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n$. Es liegt nahe, die Binomialformel aus Kap.1.3 anzuwenden. Dabei sortieren wir sofort nach Potenzen von Δx . Wir erhalten: $(x_0+\Delta x)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\cdot\Delta x + \left[\binom{n}{2}x_0^{n-2}\Delta x^2 + ...\binom{n}{n}\Delta x^n\right]$. Aus [...] können wir einen Faktor Δx^2 ausklammern. Nach Division durch Δx bleibt immer noch ein Faktor Δx übrig, **so daß die Resttermbedingung erfüllt ist**.

Also ist die Funktion differenzierbar! Der Faktor (nx_0^{n-1}) von Δx_0 im linearen Term gibt den gesuchten Ableitungswert zu $h_n^{'}(x_0) = nx_0^{n-1}$. Links die Bezeichnung, rechts der Berechnungsterm.

(9.1.44) Beispiel: Sei f(x)=sin(x). Wir müssen $sin(x_0 + \Delta x\ )$ umformen. Und zwar so, daß Δx aus der von-Klammer herauskommt. Es liegt nahe, das Additionstheorem für sin anzuwenden. Danach raten wir die ersten beiden Terme der Zerlegung und bringen die Gleichung gewaltsam in die angestrebte Form, indem wir den gewünschten Beitrag mit einem Δx an der richtigen Stelle addieren und an anderer Stelle wieder subtrahieren. Dabei ist es nützlich, zu wissen, daß $\cos(\Delta x)$ ist für kleine Δx näherungsweise 1 und $\sin(\Delta x)$ näherungsweise gleich Δx ist (Vgl.(8.3.19)):

$$\begin{aligned} sin(x_0 + \Delta x) &= \sin(x_0)\cos(\Delta x) + \cos(x_0)\sin(\Delta x) \\ &= \sin(x_0)\cdot 1 + \cos(x_0)\cdot \Delta x + [(\cos(\Delta x) - 1)\sin(x_0) + (\sin(\Delta x) - \Delta x)\cos(x_0)] \end{aligned}$$

Das ist offenbar eine korrekte Umformung, wobei die ersten beiden Terme Kandidaten für die Tangentenzerlegung sind. Dann folgt nach dem Schema für den Restterm:

$$R_{\sin}(x_0, \Delta x) = \frac{1}{\Delta x}[...] = \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\sin(x_0) + \frac{\sin(\Delta x) - \Delta x}{\Delta x}\cos(x_0).$$

Hierfür müssen wir die Resttermeigenschaft nachweisen. Dies tun wir unten in der Ergänzung (9.1.46). Nach erfolgtem Nachweis können wir die Ableitung ablesen und finden $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

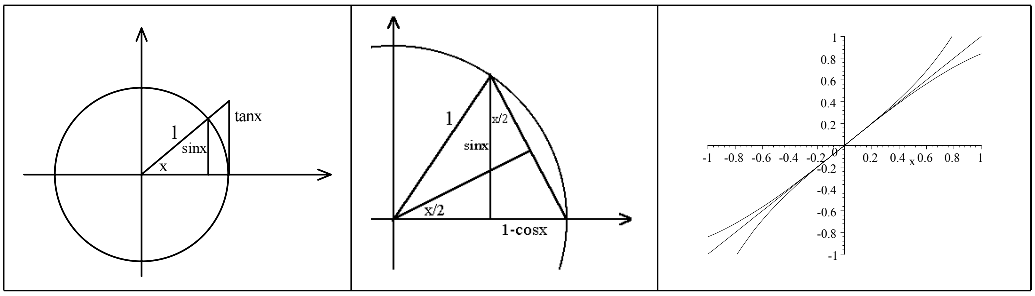
Ganz analog beweist man $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.

(9.1.45) Insgesamt erhält man so die Ableitungen für alle Funktionen der Grundausstattung. Im Falle der Exponentialfunktion exp ist noch eine Zusatzannahme erforderlich, die wir bei der zweiten Denkfigur besprechen. Es folgt die wichtige Liste von Ableitungen der Funktionen der Grundausstattung:

$f(x_0)$	$h_0(x_0) = 1$	$h_n(x_0) = x_0^n$ n=1,2,..	$\sin(x_0)$	$\cos(x_0)$	$\exp(x_0) = e^{x_0}$
$f'(x_0)$	$h_0'(x_0) = 0$	$h_n'(x_0) = nh_{n-1}(x_0) = nx_0^{n-1}$	$\cos(x_0)$	$-\sin(x_0)$	$\exp(x_0)$

Wir sehen: Die erste Denkfigur wird benutzt, um die Differenzierbarkeit einer Funktion zu erschließen und den Wert der zugehörigen Ableitung zu erhalten. Insbesondere werden wir unter Verwendung dieser Denkfigur die gesamten Ableitungsregeln herleiten.

(9.1.46) Ergänzung:



Die Figuren zeigen die Gültigkeit der folgenden beiden Beziehungen:

$$\sin(\Delta x) \leq \Delta x \leq \tan(\Delta x) \qquad \tan(\tfrac{\Delta x}{2}) = \tfrac{1-\cos(\Delta x)}{\sin(\Delta x)}$$

Die erste Ungleichung folgt durch Vergleich zweier Längen, die zweite durch den Vergleich zweier Flächeninhalte! Die rechte Gleichung kann man auch mit Hilfe der Additionstheoreme beweisen. Die rechte Figur gibt die Graphen von sinx, x und tanx.

Sei $\Delta x > 0$. Dann folgt für den uns interessierenden Restbeitrag:

$$0 \leq \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} \leq \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\sin(\Delta x)} = tan(\frac{\Delta x}{2}).$$

Im ersten Schritt haben wir den Nenner verkleinert, im zweiten die zweite Gleichung benutzt. Jetzt können wir Δx nach Null gehen lassen und erhalten die gewünschte Resttermeigenschaft.

☐ Wie ist die Überlegung für $\Delta x < 0$ abzuändern?

☐ Beweisen Sie folgende Ungleichung und zeigen sie damit die zweite benötigte Resttermeigenschaft für $\Delta x > 0$:

$$0 \leq \Delta x - \sin(\Delta x) \leq \tan(\Delta x) - \sin(\Delta x) = \sin(\Delta x)\tan(\Delta x)\tan(\frac{\Delta x}{2}).$$

Damit ist die Resttermeigenschaft für sin bewiesen.

9.1.2h Die zweite Denkfigur: **Die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung**

(9.1.47) Hier gehen wir von einem anderen Szenenbild aus:

> Wieder seien zunächst f, x_0 und $f(x_0)$ gegeben. Aber jetzt nehmen wir an, daß zusätzlich bekannt sei, daß f in x_0 differenzierbar ist mit bekanntem Ableitungswert $f^{'}(x_0)$.

Unter diesen Umständen besagt die zweite Denkfigur: **Man darf die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung hinschreiben, allerdings mit einem nur teilweise bestimmten absoluten Fehler**. Von diesem darf man annehmen, daß die Resttermbedingung erfüllt ist. D.h. man hat die gültige Gleichung

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x) \quad \text{wobei} \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{R}_f(\mathrm{x}_0,\Delta\mathrm{x})=0 \ \text{ ist.}}$$

Jetzt kann man bei Bedarf überall $f(x_0 + \Delta x)$ durch die rechte Seite ersetzen und damit weiterrechnen.
(9.1.48) Das ist die zweite Denkfigur, die sich als ungeheuer nützlich erweist. Wir geben nachfolgend drei größere Anwendungen. Eine weitere Anwendung dieser Art geben wir in (11.3.12), wo die Krümmung eines Funktionsgraphen bestimmt wird.

Die Regel von l'Hospital.

(9.1.49) Wir formulieren zunächst das folgende Problem:

> Eine Funktion sei durch einen Rechenausdruck R(x) definiert. Also x$\mapsto f(x) = A(x)$. Für x_0 sei dieser Rechenausdruck unerklärt oder nicht verfügbar. Kann man dann aus den verfügbaren Funktionswerten einen eindeutig bestimmten Funktionswert f(x_0) für x_0 vorhersagen oder festlegen? Man sagt auch: **Kann man f in x_0 stetig ergänzen?**

Die Lücke wird meist durch das gewählte Zuordnungs**verfahren**, nicht aber die Zuordnung selbst verursacht. Bei der Naturbeschreibung fragt man in der Regel nach der Zuordnung, so daß die Festlegung eines eventuellen Lückenwertes ausgesprochen wichtig ist. Erfahrungen mit Studienanfängern deuten darauf hin, daß die Schulmathematik unglücklicherweise die Vorstellung erzeugt, der Rechenterm sei das jeweils Wichtigste.
(9.1.50) Eine spezielle und häufige Realisierung der geschilderten Situation sieht wie folgt aus: R(x) ist ein Quotient. Etwa $A(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Und Zähler und Nenner haben in x_0 beide eine Nullstelle, so daß für x=x_0 der undefinierte Ausdruck $\frac{0}{0}$ entsteht. Etwa $\frac{\sin(x)}{x}$ mit $x_0 = 0$ oder $\frac{(x-1)^2}{\cos(\pi x/2)}$ für $x_0 = 1$. Wir wollen annehmen, daß g und h - also Zähler und Nenner - beide glatt seien und eine Tangentenzerlegung um den kritischen Punkt x_0 besitzen:

$$\begin{aligned} g(x_0 + \Delta x) &= g(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x) \\ h(x_0 + \Delta x) &= h(x_0) + h'(x_0)\Delta x + \Delta x R_h(x_0, \Delta x). \end{aligned}$$

Nun ist aber $g(x_0) = h(x_0) = 0$. Also lauten die gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned} g(x_0 + \Delta x) &= g'(x_0)\Delta x + \Delta x R_g(x_0, \Delta x) \\ h(x_0 + \Delta x) &= h'(x_0)\Delta x + \Delta x R_h(x_0, \Delta x). \end{aligned}$$

Für $\Delta x \neq 0$ setzen wir beide Formeln in den Ausdruck für A(x) ein, nehmen also eine Umformung des Rechenausdruckes vor und finden

$$\boxed{A(x_0 + \Delta x) = \frac{g(x_0+\Delta x)}{h(x_0+\Delta x)} = \frac{g'(x_0)\Delta x + \Delta x R_g(x_0,\Delta x)}{h'(x_0)\Delta x + \Delta x R_h(x_0,\Delta x)} = \frac{g'(x_0) + R_g(x_0,\Delta x)}{h'(x_0) + R_h(x_0,\Delta x)}}$$

Im letzten Schritt haben wir Δx gekürzt. Das ist möglich, da die beiden konstanten Terme Null sind und weil wir den Rechenausdruck umgeformt haben! Jetzt - **nach dem Kürzen -** können wir Δx nach Null gehen lassen.
(9.1.51) Infolge der Resttermeigenschaft von R_g und R_h ist das Grenzwertverhalten unmittelbar ablesbar, durch Inspektion erkennbar:

$$\boxed{f(x_0)=\lim_{\Delta x\mapsto 0}\frac{g(x_0+\Delta x)}{h(x_0+\Delta x)}=\frac{g'(x_0)}{h'(x_0)} \text{ sofern } h'(x_0)\neq 0.}$$

Kurz: **Einsetzen der Tangentenzerlegungen für Zähler und Nenner und Kürzen von Δx erlaubt es, das Ergebnis durch Inspektion abzulesen!**
(9.1.52) Für das erste Beispiel folgt so:

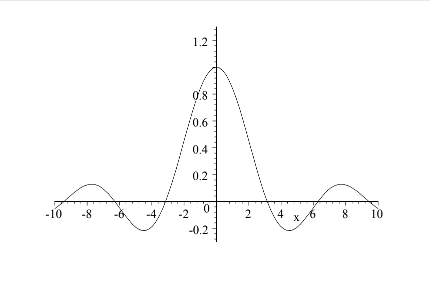
$$\frac{\sin(0+\Delta x)}{0+\Delta x}=\frac{\cos(0)+1\Delta x+\Delta x R_{\sin}(0,\Delta x)}{0+1\Delta x+\Delta x\cdot 0}\to 1.$$

D.h. die Zuordnung liefert für $\mathbf{x}_0=0$ durch glatte Ergänzung d**en Wert 1**.
(9.1.52) Natürlich wird man konkrete Realiserungen nicht in der soeben beschriebenen Ausführlichkeit vornehmen, sondern stark verkürzen. **Was vielfach auf einfaches Hinschreiben des Resultates hinausläuft.**
(9.1.53) Wie obige Argumentation zeigt, ist die einzige kritische Stelle der Ausführung der Ableitungswert des Nenners: Ist dieser Null, hat man erneut Probleme.
(9.1.54) Erfahrungsgemäß ist es (hier) besser, sich das **Vorgehen** anstelle des fertigen Endresultates zu merken. Dieses Endresultat $\frac{g'(x_0)}{h'(x_0)}$ ergibt die *Regel von l'Hospital.* Die Begründung (für das Merken des Weges) sieht wie folgt aus: Man möchte möglichst gut auch mit geänderten neuartigen Problemen fertig werden. Dann ist das Einsetzen der Tangentenzerlegung als gültiger Gleichung immer möglich und man muß nur versuchen, die Neuartigkeit des Problems durch eine geänderte passende Termumformung in den Griff zu bekommen. Hat man dagegen nur die fertige Rechenregel geistig zur Verfügung, bleibt nur die Feststellung: Regel nicht mehr anwendbar.
(9.1.55) Im zweiten Beipiel aus (9.1.50) ist $\cos(\pi x/2)=0+(-\sin(\pi/2))(x-1)+(x-1)R_{\cos}(1,x-1)$ und $\sin(\pi/2)=1$. Einsetzen gibt sofort

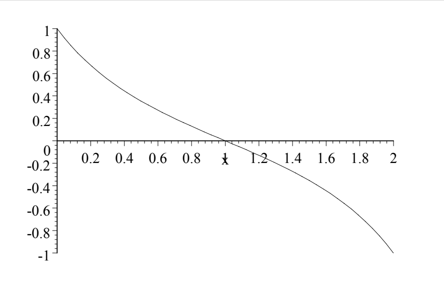
$$\frac{(x-1)^2}{\cos(\frac{\pi x}{2})}=\frac{(x-1)^2}{-1(x-1)+(x-1)R_{\cos}(1,x-1)}\to 0.$$

Hier haben wir weiter mit x als Variable gearbeitet, nicht Δx eingeführt. Und für den Zähler war es nicht nötig, die Zerlegung anzugeben, da der angestrebte Kürzungsprozeß auch so möglich war.

Nachstehend geben wir noch die Graphen der beiden Funktionen.



$x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ bei x=0



$x\mapsto\frac{(x-1)^2}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$ bei x=1

☐ Auf die Bildchen kann man sich natürlich nicht immer verlassen. Lassen Sie sich etwa einmal von einem der üblichen Computeralgebrasysteme den Graphen von $f(x)=|x|^{0.1}\ln(||)$ zeichnen. Das Verhalten bei x=0 wird vermutlich falsch dargestellt. Denken Sie an die in (8.3.82) gegebene Regel!

Zur Wasserbeckentiefe.

(9.1.56) In Kap.1.7 haben wir ein Formel zur Bestimmung der virtuellen Wasserbeckentiefe angegeben. Genauer war es eine Formel für den Schnittpunkt der Verlängerung zweier benachbarter Luftstrahlen. Können sie dies Problem auf herkömmliche Weise lösen? Versuchen Sie das einmal. Es geht um die Formeln in (1.7.12).
(9.1.57) Jetzt nutzen wir unser Werkzeug der Tangentenzerlegung. Wir haben eine erste Gerade, die durch die Gleichung $y = m(\varepsilon)x + b(\varepsilon)$ gegeben ist. Die Werte von ε legten die einzelnen Strahlgeraden fest. Und eine benachbarte Gerade, die durch $y = m(\varepsilon+\Delta\varepsilon)x+b(\varepsilon+\Delta\varepsilon)$ gegeben wird. Gleichsetzen ergibt wie üblich für den Schnittpunkt die Bedingung $m(\varepsilon+\Delta\varepsilon)x_s + b(\varepsilon+\Delta\varepsilon) = m(\varepsilon)x+b(\varepsilon)$. Die beiden Funktionen m und b seien glatt, sollen also eine Tangentenzerlegung besitzen. Etwa

$$m(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = m(\varepsilon) + m'(\varepsilon)\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_m(\varepsilon, \Delta\varepsilon).$$

Analog für b. (Die nachfolgend beschriebene Rechnung unbedingt ausführen!) Bei Einsetzen der Tangentenzerlegungen in die Bedingungsgleichung fallen die konstanten Terme heraus, man darf durch ε teilen und anschließend zum Grenzwert $\varepsilon \to 0$ übergehen, wobei die Resttermbeiträge fortfallen. Das Ergebnis ist die erste in (1.7.12) angegebene Formel. Die zweite folgt durch Einsetzen in eine der Geradengleichungen. Fertig.
(9.1.58) Das Vorgehen hier ist dasselbe wie beim Eindeutigkeitsbeweis der Tangentenzerlegung in (9.1.23)! Immer wird die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung gezielt eingesetzt. Hat man als zentralenAusgangspunkt dagegen den Zahlwert der Ableitung, dann nützt einem das in einer derartigen Problemsituation wenig.

Das Newtonverfahren zur Nullstellbestimmung

(9.1.59) Viele Bestimmungsgleichungen wie $e^{-x} = x$ oder $x + 2sin(x) = 0$ usw. lassen sich nicht allgemein lösen, also so umformen, daß x über eine "analytische" Formel der üblichen Art bestimmt werden kann. Das ist anders als im Fall der quadratischen Gleichung, wo dies ja möglich war.
(9.1.60) Mit Hilfe der 2. Denkfigur zur Tangentenzerlegung kann man ein Näherungsverfahren für die Nullstellenbestimmung entwickeln, das für viele derartige Fälle nützlich ist. Erneut wird die das gesamte Vorgehen durch unseren Begriffsapparat ausgesprochen einfach. Wir beschreiben die Idee und das Vorgehen.
Das Szenenbild: Gegeben eine Bestimmungsgleichung f(x)=0, für die sich

1. der Rechenausdruck als Funktion $x \mapsto f(x)$ interpretieren läßt. (Lautet die Gleichung f(x)=g(x), dann ist f(x)-g(x)=0 zu betrachten!) Also sind Nullstellen von $x \mapsto f(x)$ gesucht
2. Die Funktion f sollte differenzierbar sein.
3. Wir haben einen x-Wert (meist geschickt geraten), von dem wir vermuten, daß er in der Nähe einer gesuchten Nullstelle x_w (Bezeichnung, w für wahr) liegt. Der geratene Wert sei x_0.
4. Es muß $f'(x_0) \neq 0$ gelten.

⧫**Die Idee: Die** Tangentenzerlegung um x_0 ansetzen und die Nullstelle in Tangentenapproximation bestimmen. Das Vorgehen dann iterativ fortsetzen bis man über die benötigte Stellenzahl verfügt. .

(9.1.61) Die Ausführung:

$$0 = f(x_w) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x).$$

Wie ist die Rollenverteilung? Δx ist gesucht! $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ sind leicht zugänglich (2. Denkfigur). R_f ist unbekannt, aber eben klein. In Tangentenapproximation folgt:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

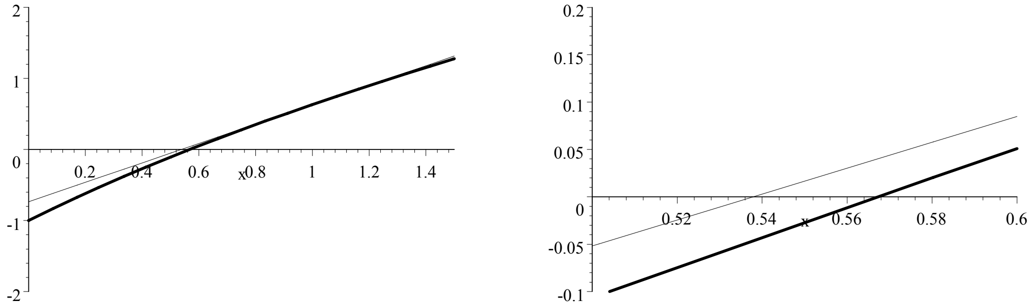
Das ist leicht nach Δx auflösbar und ergibt über $x_1 = x_0 + \Delta x$ **einen neuen und meist besseren Schätzwert für die Nullstelle**. Mit diesem x_1 kann man die Prozedur dann erneut beginnen.
Die Formel: Die Bestimmungsgleichung für Δx gibt sofort (wegen $f'(x_0) \neq 0$):

$$\Delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ oder } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Man benötigt also Funktionswert und Ableitung am Ausgangspunkt.

(9.1.62) Ein Beispiel: Gesucht ist x mit $e^{-x} = x$. Also $f(x) = x - e^{-x}$ mit Ableitung $f'(x_0) = 1 + e^{-x_0}$. Diese Ableitung folgt leicht mit Hilfe der später zu besprechenden Ableitungsregeln. Wir vermuten eine Nullstelle zwischen 0 und 1. wir wählen $x_0 = 1$. Das gibt die Tangente $y = (1 - e^{-1}) + (1 + e^{-1})\Delta x$. Also $\Delta x = \frac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1} = -.462...$ oder $x_1 = 0.538...$

Die Figur zeigt den exakten Graphen sowie die Tangente, rechts vergröß ert.



Setzte man die Prozedur mit der schon recht guten Näherung x_1 fort, so folgt

$$\Delta x = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{0.538 - e^{-0.538}}{1 + e^{-0.538}} \approx 0.029 \text{ und } x_2 = 0.567$$

Das Computeralgebraprogramm liefert $x_w = 0.567143$....Die gefundene Näherung ist bereits recht gut.

□ Natürlich gibt es Beispiele, bei denen das Verfahren etwa infolge ungeschickter Wahl des Startwertes versagt. Man sollte dann möglichst eine graphische Analyse des Grundes vornehmen. Verdeutlichen Sie sich das am Beispiel der Funktion $f(x)=(1-x^2)e^{-x^2}$. Sie hat zwei Minima bei $x=\pm\sqrt{2}$ und Nullstellen bei ± 1. Was geschieht, wenn Sie mit einem zu kleinen x-Wert starten?

Die Ableitung der Exponentialfunktion

(9.1.63) Unser Problem im Zusammenhang mit dieser Funktion besteht darin, daß wir noch nicht über eine genaue Definition der Werte verfügen. Was ist etwa $(\sqrt{2})^\pi$? Was wir haben, sind vornehmlich zugehörige Rechenregeln. Wir nehmen jetzt an, daß $x \mapsto E_a(x)$ im Punkte 0 eine Ableitung $E'_a(0)$ besitzt. Oder auch, daß der Graph eine zu einer Tangentenapproximation führende Tangente in x=0 besitzt. Deren Steigung ist dann $E'_a(0)$. Und für a=e sollte das gerade 1. sein. **Was folgt mathematisch aus dieser Annahme** (mit Hilfe unserer Denkfiguren)**?**

(9.1.64) Nach der zweiten Denkfigur dürfen wir für x=0 eine gültige Tangentenzerlegung hinschreiben:

$$E_a(0 + \Delta x) = E_a(0) + E'_a(0)\Delta x + \Delta x R_{E_a}(0, \Delta x).$$

Die Resttermbedingung ist erfüllt! Wie steht es mit der Differenzierbarkeit in einem beliebigen Punkt x_0? Hierzu müssen wir die erste Denkfigur verwenden. Wir haben nach den Rechenregeln:

$$\begin{aligned} E_a(x_0 + \Delta x) &= a^{x_0+\Delta x} = a^{x_0}a^{\Delta x} = a^{x_0}E_a(0 + \Delta x) \\ &= a^{x_0}\left(E_a(0) + E'_a(0)\Delta x + \Delta x R_{E_a}(0, \Delta x)\right) \\ &= E_a(x_0) + a^{x_0} \cdot E'_a(0) \cdot \Delta x + \Delta x a^{x_0} R_{E_a}(0, \Delta x) \end{aligned}$$

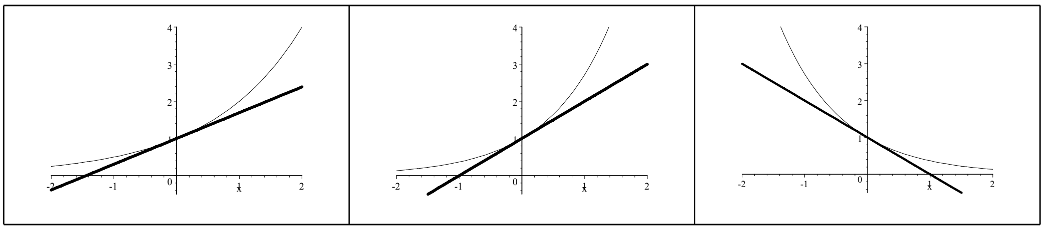
Im mittleren Schritt haben wir die gültige Tangentenzerlegung um $x_0 = 0$ eingesetzt. Jetzt kommt die erste Denkfigur zum Tragen: Liegt eine Tangentenzerlegung von E_a um x_0 vor? Hierzu ist die Resttermeigenschaft für $R_{E_a}(x_0, \Delta x) = a^{x_0}R_{E_a}(0, \Delta x)$ nachzuweisen. Das folgt aber aus den üblichen Grenzwerteigenschaften, die in der Mathematik streng bewiesen werden: Hat $R(\Delta x)$ den Grenzwert Null, dann hat auch "Konstante$\times R(\Delta x)$" den Grenzwert Null. **Also liegt eine Tangentenzerlegung vor und wir dürfen die Ableitung ablesen:**

$$E'_a(x_0) = a^{x_0}E'_a(0).$$

(9.1.65) In Worten: Die Steigung der Tangente an E_a in x_0 ist gleich dem Funktionswert in x_0 multipliziert mit der Tangentensteigung zu x=0. Für die Exponentialfunktion war diese Steigung definitionsgemäß gleich 1, so daß wir überall "Steigung=Funktionswert" haben:

$$\boxed{exp'(x_0) = \exp(x_0).}$$

Dies wichtige Resultat haben wir in der in (9.1.49) gegebenen Tabelle der Ableitungen bereits angegeben. Es ist gut, sich die Resultate an Hand der Graphen zu verdeutlichen. Die Figur gibt $E_a(x)$ für a=2, a=e und a=-e. Die Steigung der Ursprungstangente läßt sich aus der Figur ablesen.



Wann ist f in x_0 differenzierbar und wann nicht?

(9.1.66) Nach unseren bisherigen Überlegungen kann es durchaus nicht differenzierbare Funktionen geben. In vielen Fällen kann man unmittelbar durch Inspektion erkennen, daß eine Funktion in einem bestimmten Punkt **nicht differenzierbar** ist. Da die rechnerische Tangentenzerlegung an die Existenz einer geometrischen Tangente gebunden ist, erwarten wir die folgende orientierende Regel:

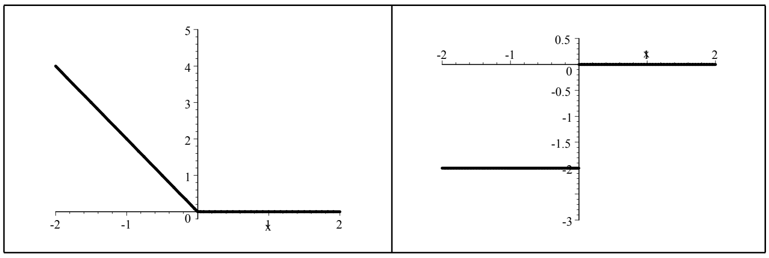
> ⧫f habe einen zeichenbaren Graphen. Falls dieser Graph in $(x_0, f(x_0))$ einen Knick oder Sprung hat, existiert zu diesem Punkt keine Tangentenzerlegung.
>
> ⧫Hat f einen glatten zeichenbaren Graphen der in $(x_0, f(x_0))$ weder einen Sprung noch einen Knick hat, dann ist f in x_0 differenzierbar.

(9.1.67) Wir führen den Beweis des ersten Teiles für ein Beispiel. Der allgemeine Beweis geht analog. Der zweite Teil der Ausage hat mehr heurístischen Charakter, da *glatt* ja ein noch nicht genau definierter, eher intuitiver Begriff ist.
(9.1.68) Als Beispiel betrachten wir die Funktion $x \mapsto f(x) = |x| = \varepsilon(x)x$ mit $\varepsilon(x) = 1$ für x$\geq$ 0 und $\varepsilon(x) = -1$ für x<0. Wir betrachten diese Funktion an der Stelle $x_0 = 0$. Der Graph hat hier offensichtlich einen Knick. Wir versuchen eine Zerlegung der gewünschten Art anzusetzen:

$$\begin{aligned} f(0 + \Delta x) &= 0 + m\Delta x + (\varepsilon(\Delta x)\Delta x - m\Delta x) \\ &= 0 + m\Delta x + \Delta x(\varepsilon(\Delta x) - m). \end{aligned}$$

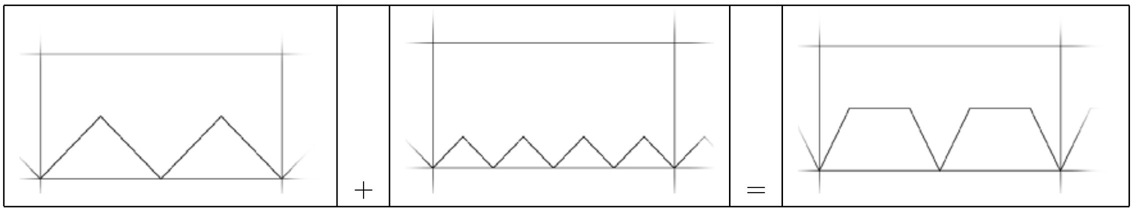
Die Resttermeigenschaft ist für keine Wahl von m erfüllbar. Für mindestens ein Vorzeichen von Δx hat der Restterm immer einen konstanten Wert ungleich Null. Für m=1 etwa im negativen Bereich usw. Daher kann kein Grenzwert für $\Delta x \to 0$ existieren und erst recht nicht ist dieser Grenzwert Null.

Erneut sehen wir die Wirkung des $(1/\Delta x)$-Mikroskops. Der absolute Fehler (links, m=1) hat einen Knick, der lokale (rechts, m=1) einen Sprung.

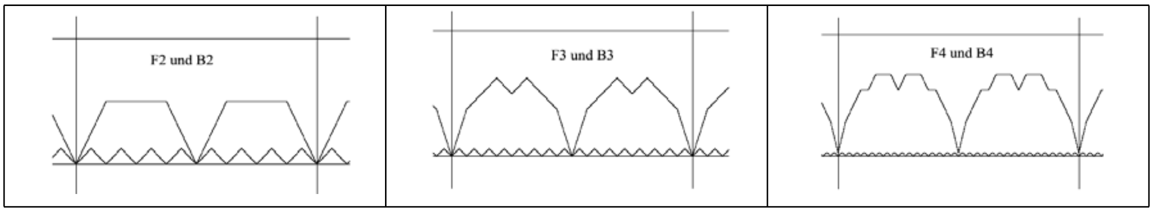


Beispiel einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion

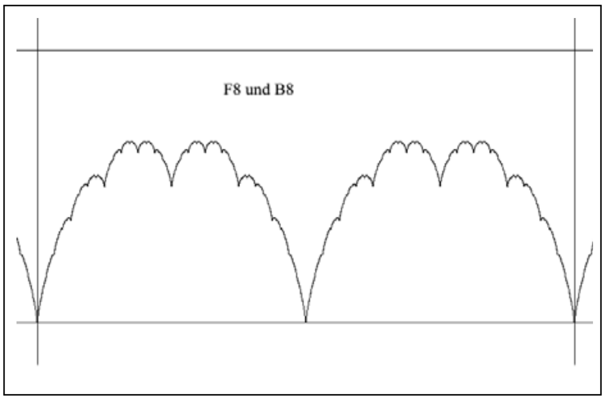
(9.1.69) Wir haben bereits in (8.1.1) darauf hingewiesen, daß es neben den "glatten", die intuitiv-geometrischen Vorstellungen erfüllenden Funktionen auch solche gibt, die ganz unerwartete Eigenschaften aufweisen. So gibt es Funktionen, die hinsichtlich der Differenzierbarkeit ein komplexes und nur schwer vorstellbares Verhalten zeigen. All dies bedeutet, daß die nützlichen heuristischen Regeln wie (9.1.66) oder (8.1.15), die wir gerne benutzen, irgendwann einmal mathematisch analysiert und abgesichert werden müssen. Wir wollen aus dem zugehörigen Monstrositätenkabinett der Mathematik ein Beispiel vorführen. Und zwar das einer überall stetigen, aber nirgends (also in keinem Punkte) differenzierbaren Funktion. Die Konstruktion verläuft rekursiv nach der Formel $F_{n+1}(x) = F_n(x) + B_n(x)$. Dabei soll n bis nach unendlich gehen. (1.3.8).



Die erste Bildzeile zeigt links $F_1(x) = F(x)$, in der Mitte $B_1(x)$ und rechts die Summe, also $F_2(x)$. In der zweiten Bildzeile sind F_n und B_n für n=2,3 und 4 dargestellt. Beachten sie, daß man B_n durch kleine Transformationen aus $F=F_1$ erhält. Genauer gilt $B_n(x) = 2^{-n}F(2^n x)$. Dies bedeutet, daß man in jeder noch so kleinen Nähe irgendeines Punktes irgendwann (in n) einen kleinen Zacken im Graphen erhält, der die differenzierbarkeit zerstört.



Bereits für n=8 reicht die Zeichengenauigkeit in der gewählten Auflösung nicht mehr aus, um noch Änderungen im Graphen zu erkennen. In Gedanken kan man aber immer weiter vergrößern. Dabei ergibt sich auf jeder Vergrößerungsstufe dasselbe gekräuselte Bild, so daß es zu keinem Punkt eine Tangente gibt.



9.2 Interpretationen und herkömmliche Darstellung

9.2.1 Ableitung und Differentialquotient

(9.2.1) Die traditionelle, in der Schule gebräuchliche Einführung der Ableitung ist die über den Differentialquotienten. Es ist leicht, die Tangentenzerlegung so umzuschreiben, daß der Zusammenhang zwischen der modernen und der herkömmlichen Einführung sichtbar wird. Dazu hat man nur folgende leichte Umformung der Tangentenzerlegung vorzunehmen:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R(x_0,\Delta x) \\ \hline \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + R(x_0,\Delta x) \text{ für } \Delta x \neq 0 \end{array}}$$

In der zweiten Gleichung steht links der *Differenzenquotient,* der wie in der Figur zu sehen, die Sekantensteigung beschreibt: Geht man von x_0 aus um Δx weiter, so muß man in y um $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ weiter gehen, um erneut auf den Graphen zu stoßen. Oder auch: f ändert sich um $\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x$, wenn x sich um Δx ändert! So gesehen ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine "mittlere Steigung".
(9.2.2) Geht man in der unteren Gleichung zum Grenzwert $\Delta x \to 0$ über, so folgt das gewünschte Resultat:

"Die Ableitung (=Differentialqotient $\frac{df}{dx}$) ist der
Grenzwert des Differenzenquotienten."

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Das Ergebnis der Konstruktion ist eine Zahl, eben die Ableitung, besser der Ableitungswert, nicht aber eine gültige Gleichung. Mit einer Zahl kann man aber erfahrungsgemäß weniger anfangen als mit der gültigen Gleichung. Überdies gewinnt man diese Zahl im Rahmen der modernen Methode problemlos mit, wie wir gesehen haben. Dagegen ist es schwieriger, von der Zahl zu der gültigen Gleichung zu gelangen. Und das alte Konzept ist auch schwieriger zu verallgemeinern! Sobald die unabhängige Variable ein Vektor $\Delta\vec{x}$ ist, kann man nicht mehr dividieren. Der Differenzenquotient existiert nicht mehr. Die Tangentenzerlegung dagegen läßt sich leicht verallgemeinern, wie wir später am Beispiel des Gradienten sehen werden.
!! Man kann die erhaltene Gleichung auch wie folgt interpretieren:

Der lokale Fehler $\mathbf{R}(x_0, \Delta x)$ ist gleich dem (absoluten) Unterschied von Differenzenquotienten und Differentialquotienten!

9.2.2 Ableitung und momentane Geschwindigkeit

Eine wichtige Anwendung des Ableitungsbegriffes ist die "momentane Geschwindigkeit" der Physik. Umgekehrt ist es vielfach günstig, sich Eigenschaften des Differenzierens mit Hilfe einer Geschwindigkeitsinterpretation zu veranschaulichen.

Beschreibung einer geradlinigen Bewegung
(9.2.3) Wir betrachen die Bewegung eines Massenpunktes (bzw. Körpers), der sich nur entlang einer Geraden bewegen darf. Dann können wir ein Koordinatensystem auf dieser Geraden auslegen und die Lage des Punktes durch seinen jeweiligen Koordinatenwert (eine Zahlangabe s) bestimmen. Die Bahnkurve des Punktes wird zu einer reellen Funktion $t \mapsto s(t)$, die man gerne die *Weg-Zeitfunktion des Massenpunktes* nennt. Insbeondere ist die Weg-Zeit-Funktion des **senkrechten** Wurfes eine Parabel.
☐ Was für eine Art von Bewegung wird durch die Weg-Zeit-Funktion s(t)=Asin(ωt) beschrieben? (Wichtig!)
(9.2.4) Wir betrachten eine glatte derartige Weg-Zeitfunktion $s = (I, t \mapsto s(t), R)$. Beachten Sie: $s(t_0)$ ist der Koordinatenwert zur Zeit t_0, nicht etwa der "in der Zeit t_0 zurückgelegte Weg". Eine diesbezügliche (leider verbreitete) **Begriffsungenauigkeit** führt vielfach zu Problemen. Jetzt nehmen wir an, daß s um t_0 eine Tangentenzerlegung besitzt, die wir wieder in die Differenzenquotientenform umschreiben. Bei Weg-Zeit-Funktionen benutzt man für die Ableitung gerne die Newtonsche Schreibweise $\dot{s}(t_0)$ für die Ableitung anstelle von $s'(t_0)$. Dies tun wir hier.

$$\begin{aligned} s(t_0+\Delta t) &= s(t_0) + \dot{s}(t_0)\Delta t + \Delta t R_s(t_0,\Delta t) \\ \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} &= \dot{s}(t_0) + R_s(t_0,\Delta t) \end{aligned}$$

Die untere Gleichung interpretieren wir wie folgt:

- Links steht die *mittlere Geschwindigkeit* des Körpers im Zeitraum zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$. Also der im Zeitraum zurückgelegten Weg geteilt durch die Zeitdifferenz.
- Rechts steht als erster Summand die momentane Geschwindigkeit im Zeitpunkt t_0, also der Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit.
- Der zweite Summand ist erneut der Unterschied zwischen mittlerer und momentaner Geschwindigkeit.

(9.2.5) Ist der Unterschied zwischen den beiden Geschwindigkeiten kleiner als die zu erwartende Meßungenauigkeit, dann kann man die eine Größe durch die andere ersetzen. Dies wird in physikalischen Anwendungen häufig getan, meist in dem Sinne, daß man die Ableitung durch den Differenzenquotienten ersetzt.

9.2.3 **Das Auflösen der von-Klammer**

Die Tangentenzerlegung legitimiert in gewisser Weise einen beliebten Rechenfehler

(9.2.6) Bei der Analyse elementarer Rechenfehler stöß t man immer wieder auf einen bestimmten Typ, den man hochgestochen als *Anwenden einer unzulässigen Linearitätsregel* oder einfacher als *distributives Ausrechnen einer Von-Klammer* bezeichnen kann. Man rechnet als wäre $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ oder $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ oder sin(2x)=2sin(x) usw. Das ist zwar falsch, aber durchaus nicht uninteressant und letztlich auch nicht dumm. Denn würden diese Regeln gelten, würden sich viele Rechnungen enorm vereinfachen. D.h. ein untergründiger Drang zu Rechenökonomie bricht sich in diesen Fehlern Bahn. Das ist eine wichtige Einsicht! Sie besagt: Könnte man solche Von-Klammern distributiv ausrechnen, so wäre das sehr nützlich. (Vgl. (5.1.27), (6.1.20) und (1.2.1).

(9.2.7) Schauen wir uns unter diesem Aspekt die Tangentenzerlegung an, einmal allgemein und dann konkret für $h(x) = \frac{1}{x}$. Und darüber schreiben wir die fehlerhafte formale Rechnung:

$$\begin{aligned}
&f(x+\Delta x) = f\cdot x + f\cdot \Delta x + 0\\
&f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \Delta x R_f(x.\Delta x)\\
&\tfrac{1}{x+\Delta x} = \tfrac{1}{x} + (-\tfrac{1}{x^2})\Delta x + \Delta x R_h(x.\Delta x)
\end{aligned}$$

(9.2.8) Ein Grund für das Ausmaultiplizieren ist der Wunsch, die Zuwachsgröße Δx aus der von-Klammer herauszubekommen. **Und eben dies wird durch die Tangentenzerlegung geleistet!** Δx des Urbildbereiches wird im zweiten Term zu einen reinen Faktor des Wertebereiches. Damit das der Fall ist, muß man die übrigen Größen uminterpretieren. x bleibt in der Von-Klammer von f(x). Der Kofaktor von Δx ist nicht "f", was strukturell unsinnig wäre, sondern der Ableitungswert $f'(x)$. Und schließlich muß man den Fehlerbeitrag hinzufügen. Dieser wird dann aber bei Nutzung der Tangentenapproximation fortgelassen. Damit wird auch gut verständlich, weshalb man die Bildung der Tangentenapproximation meist als *Linearisierung* charakterisiert. Und weshalb man so gerne linearisierte Rechnungen verwendet, sofern man sie nur irgendwie rechtfertigen kann: Sie sind meist einfach einfacher, so wie es der fehlerhaft rechnende Anfänger instinktiv ahnt.

(9.2.9) Noch etwas anders formuliert (und hoffentlich gut zu merken): Durch die Tangentenzerlegung wird die Zuwachsgröße Δx vom Anfang der Rechnung an das Ende der Rechnung gebracht. Ein Verlaufsdiagramm zeigt das sofort!

9.2.4 **Die Ableitungsfunktion**

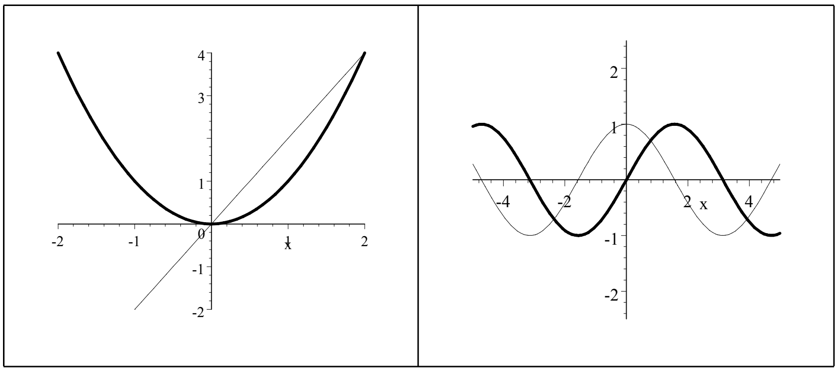
Wechselt man die Rolle des Aufpunktes x_0 von äußerem Parameter zu unabhängiger Variabler, dann erhält man eine neue Funktion, die Ableitungsfunktion

(9.2.10) Bisher haben wir den Aufpunkt x_0 als äuß eren Parameter angesehen. Für jeden seiner Werte gab es ein eigenes zugehöriges Zerlegungsproblem, eine zugehörige Tangentenzerlegung usw. Wir können aber auch einen Rollenwechsel vornehmen und x_0 zu einer unabhängigen Variablen machen. So liegt es nahe, jedem $x=x_0$ seinen zugehörigen Ableitungswert=Steigungswert der zugehörigen Tangente zuzuordnen. Also $x \mapsto f'(x)$. Das ist für jeden Punkt x des Definitionsbereiches von f, in dem f differenzierbar ist, möglich. Es entsteht eine neue Funktion, die wir die Ableitungsfunktion (von f) nennen. Sei $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$. Weiter sei D_0 die Menge aller Punkte von D, in denen f differenzierbar ist. Meist ist bei uns $D_0 = D$. Dann ist die zugehörige *Ableitungsfunktion* gegeben durch

$$\boxed{f' = (D_0, x \mapsto f'(x), \mathbb{R}).}$$

(9.2.11) Jeder Wert dieser Funktion gibt gerade die Steigung der Tangente zu diesem Punkt. Es ist nützlich, die Graphen für f und f′ gemeinsam darzustellen und sich diesen Sachverhalt zu veranschaulichen. Ein erstes

Beispiel mit $f(x) = x^2$ und $f'(x) = 2x$. Daneben $f(x) = sinx$ und $\mathrm{f}'(x) = \cos x$.



Für x>0 ist die Steigung der Parabel positiv und wächst an. Bei x=0 hat man eine horizontale Tangente. Für x<0 hat die Tangente negative Steigung usw. Beim Sinus hat die Steigung für x=0 den Wert 1. Usw.

☐ Veranschaulichen Sie sich entsprechend, daß die Ableitungsfunktion von cos gerade -sin ist, speziell das negative Vorzeichen. Dasselbe für f(x)=x^3 und f(x)=$\frac{1}{x}$.

(9.2.12) Inspiziert man eine Reihe solche Beispiele, so fällt einem auf: Ist f gerade, wie cos, dann ist f$'$ ungerade. Und ist f ungerade wie h$_3$, dann ist f$'$ gerade. Läßt sich das allgemein beweisen? Wir betrachten den Fall, daß f gerade und differenzierbar ist, also f(-x)=f(x) mit freier Variabler x. Wir können also für jedes x eine Tangentenzerlegung hinschreiben. Die zweite Zeile folgt dann über die Geradheitseigenschaft.

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + \Delta x R_f(x,\Delta x) \\ f(-x-\Delta x) &= f(-x) + f'(x)\Delta x + \Delta x R_f(x,\Delta x) \end{aligned}$$

Nun setzen wir $\Delta h = -\Delta x$. Mit Δx ist auch Δh beliebig. Also:

$$f(-x+\Delta h) = f(-x) - f'(x)\Delta h - \Delta h R_f(x,-\Delta h)$$

Das sieht aus wie eine Tangentenzerlegung von f um (-x), falls wir für den dritten Beitrag die Restermeigenschaft nachweisen können. Aber die ist offensichtlich erfüllt: $lim(-R_f(x,-\Delta h)) = 0$ für Δh nach Null. **Also können wir nach der ersten Denkfigur die Ableitung an der Stelle -x ablesen** zu $f'(-x) = -f'(x)$. Das ist das gesuchte Resultat.

Der Beweis für ungerades f geht analog.

! Wir können uns merken: **Durch Differenzieren ändert sich die Parität einer Funktion, sofern vorhanden.**

9.2.5 Das Konkretisierungsproblem bei der Tangentenzerlegung

(9.2.13) Fragen wie die folgende: "Wie lautet die Tangentenzerlegung von sin um $\frac{\pi}{4}$" oder "Wie sieht die Tangentenapproximation von f(x)=tan(2sin(3x)) bei x=0 aus, wenn $f'(0) = 6$ ist?" fallen vielen Anfängern schwer. **Erwartet wird in der Regel, daß man die Größen des jeweiligen Szenenbildes in der Antwort verwendet, bis hin zu ihnen konkretisiert!** Denn es wird ja eine gültige Geichung für eben diese Größen gesucht, mit der man weiterarbeiten will. (Vgl. auch das in Kap. 4.5.8 besprochene entsprechende Problem bei der Flugparabel.)

(9.2.14) Also sollten die Beispielantworten etwa wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} \sin(x+\Delta x) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\Delta x + \Delta x R_{\sin}(\frac{\pi}{4},\Delta x) \\ \tan(2\sin(3\Delta x)) &\approx 6\Delta x \text{ für kleine } \Delta x. \end{aligned}$$

Denn im ersten Fall ist ja $\sin(\frac{\pi}{4})$ $=\sin'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und im zweiten Fall ist f(0)=0. Im zweiten Fall könnte man noch an zwei Bezeichnungswechsel denken. Man könnte f(x) als Hilfsgröße für den (langen) Rechenausdruck verwenden und die unabhängige Variable mit x statt Δx bezeichnen. Also schreiben:

$$f(x) \approx 6x \text{ für kleine x.}$$

(9.2.15) Es ist keineswegs gemeint, daß man *die allgemeine Formel* hinschreiben und darin einen gleichsam **gedachten** stillschweigenden Rollenwechsel auf die Konkretisierungen des Szenenbildes vorzunehmen habe. (Nach der falschen Idee: *In der Mathematik soll alles möglichst allgemein aussehen.* Hier ist (1.2.2) nicht anzuwenden.*)*

(9.2.16) Eine noch stärkere Konkretisierung verlangt die folgende Frage: "Sei f(x)=$\sqrt[3]{x}$. Was ergibt sich in Tangentenapproximation für $x_0 = 8$ und x=8.1?". Man findet $f(8) = 2$ und $f'(8) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$. Schließlich ist $\Delta x = 8.1 - 8.0 = 0.1$. Also lautet die Antwort:

$$\sqrt[3]{8.1} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0.1 \approx 2.00833....$$

Der exakte Wert ist $\sqrt[3]{8.1} = 2.\,00829\,8...$

! Nochmals die Regel bei solchen Fragen: **Immer soweit wie vom Szenenbild vorgegeben konkretisieren**. Nur wenn die Ausdrücke zu umständlich werden, eventuell allgemeine Bezeichnungen als Hilfsgrößen beibehalten.

(9.2.17) In der Physik ist es vielfach üblich, Tangentenzerlegung und Tangentenapproximation gleichermaßen dadurch kenntlich zu machen, daß man statt des Fehlertermes einfach einige Pünktchen macht, also schreibt

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + ...$$

Oder im konkreten Fall:

$$\sqrt[3]{8+h} = 2 + \frac{1}{12}h + ... \text{ oder } \sin x = x + ...$$

Meist läuft das unter dem Stichwort *lineare Approximation.*

(9.2.18) Ein beliebter Einwand gegenüber dem Formalismus sieht so aus: " Ich brauche doch die ganze Tangentenapproximiererei garnicht. Ich habe meinen Taschenrechner und damit kann ich alle Funktionswerte korrekt ausrechnen!" Hier wird übersehen, daß das Ausrechnen individueller Werte nicht immer reicht. Vielfach und gerade in wichtigen Fällen muß die Abhängigkeit von einem Parameter diskutiert werden oder es muß integriert werden usw. Die Berechenbarkeit einzelner Werte hilft da nichts, wenn es um Funktionsscharen geht. (Betrachten Sie die Beispiele zum zweiten Szenenbild unter diesem Aspekt. Wo reicht da dr Taschenrechner?) Aber wenn eine exakte Lösung nicht zu schaffen ist, dann kann man hoffen, daß es mit der linearisierten klappt.

☐ Vereinfachen Sie $f(h) = \left(2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2\right)^{17}$ durch Tangentenapproximation für kleine h. (Nutzen Sie die Binomialformel und die Eindeutigkeit der Tangentenzerlegung.)

9.3 Die Ableitungsregeln

Für die Funktionen der Grundausstattung haben wir die Ableitungen bereits mit Hilfe der ersten Denkfigur bestimmt. Diese Ableitungen sind in der Tabelle in (9.1.45) zusammengestellt. Das weitere Vorgehen sieht wie folgt aus:

- *Wir haben die elementar konstruierbaren Funktionen durch wiederholte Anwendung gewisser Konstruktionsverfahren aus den Grundfunktionen aufgebaut. Aus zwei vorgegebenen Funktionen f und g können wir je eine neue Funktion*

$$\alpha f + \beta g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g},\ g \circ f$$

bilden. Und aus f eventuell f^{-1} *und* $\overset{-1}{f}$.

- *Jetzt nehmen wir an, daß die Ableitungen f' und g' von f und g für geeignete Punkte existieren. Wir stellen uns folgende zwei Fragen:*

  1. *Sind mit f und g auch diese neugebildeten Funktionen differenzierbar?*
  2. *Und falls ja: Kann man ihre Ableitungswerte mit Hilfe der Ableitungswerte von f und g berechnen?*

Wir werden sehen, daß beide Fragen durch die zu entwickelnden Ableitungsregeln positiv beantwortet werden. Zur Herleitung der Ableitungsregeln werden erneut beide Denkfiguren eingesetzt.

Mit Hilfe dieser Regeln lassen sich dann alle elementar konstruierbaren zumindest im Prinzip schematisch differenzieren.

9.3.1 **Das Bestimmen der Ableitung**

(9.3.1) Die meisten bei der praktischen Arbeit benötigten Ableitungen gewinnt man mit Hilfe der noch etwas zu ergänzenden Liste bekannter elementarer Ableitungen und der Anwendung der Ableitungsregeln. Die explizite Erstellung einer Tangentenzerlegung einschließlich des Nachweises der Resttermeigenschaft ist dann nicht nötig! Diese Arbeit ist bereits allgemein mit dem Beweis der Ableitungregeln geleistet.
(9.3.2) Das Bestimmen von Ableitungen ist keineswegs Selbstzweck. Im Rahmen einer typischen Anwendung bestimmt man in der beschriebenen Weise eine Ableitung möglichst effektiv und schreibt im Rahmen der zweiten Denkfigur die zugehörige Tangentenzerlegung als gültige Gleichung hin. **Mit dieser Gleichung arbeitet man dann.**
(9.3.3) Da das soeben Gesagte leider vielfach Verständnisschwierigkeiten bereitet, hier eine Konkretisierung:

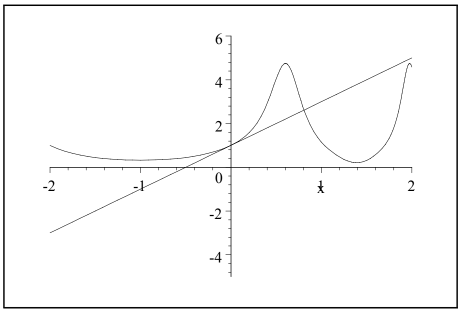
Sei f(x)=$e^{\tan(\sin(2x+x^2)}$ und $x_0 = 0$. Es folgt f(0)=1. Über Ableitungsregeln findet man $f'(0) = 2$. Dann gilt die folgende Tangentenzerlegung:

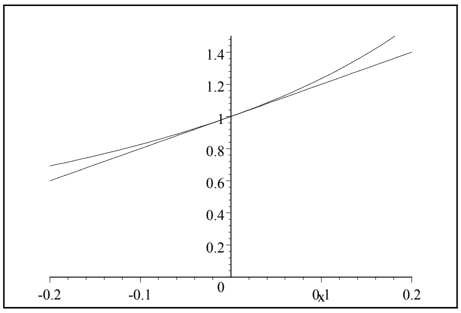
$$e^{\tan(\sin(2\Delta x+\Delta x^2)} = 1 + 2\Delta x + \Delta x R(0, \Delta x).$$

Ist wie im Beispiel $x_0 = 0$ oder auch gleich einer anderen festen Zahl, dann bezeichnet man die Variable Δx gerne wieder mit x, nimmt eine Umbenennung vor und arbeitet mit der so entstandenen gültigen Gleichung. Im Beispiel mit:

$$e^{\tan(\sin(2x+x^2))} = 1 + 2x + xR(0, x).$$

(9.3.4) Vergleichen sie jetzt den Unterschied im Rechenaufwand rechts und links. Zur Verdeutlichung des Gehaltes dieses Resultates stellen wir die Funktion und ihre Tangente (= rechte Seite ohne R) graphisch dar, wobei wir an unsere Einstiegsfrage zur Ableitung erinnern: Mit möglichst wenig Aufwand möglichst viel über das lokale Verhalten von f aussagen können! Links über ein großes x-Intervall und rechst über ein kleines Intervall.





9.3.2 **Formulierung und Beweis der Ableitungsregeln**
9.3.2a **Linearität**

(9.3.5) Ein erstes Szenenbild mit Einstiegsargumentation:

- Es seien f und g seien in x_0 differenzierbar, mit Ableitungen $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$.
- Dann dürfen wir nach der zweiten Denkfigur die folgenden beiden Tangentenzerlegungen (mit gültigen Resttermbedingungen für R_f und R_g!) hinschreiben:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$$
$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \Delta x R_g(x_0, \Delta x)$$

Derartige Szenenbilder sollte man sich gut einprägen. Sowohl für die nachfolgende Diskussion als auch für die spätere Behandlung neuartiger Probleme.

(9.3.6) Die erste neukonstruierte Funktion, deren Ableitung uns interessiert, ist $\alpha f+\beta g$. Ist diese Funktion in x_0 differenzierbar? Wir versuchen mit Hilfe der ersten Denkfigur die Tangentenzerlegung für diese Funktion zu erstellen:

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(x_0+\Delta x) &= \alpha f(x_0+\Delta x)+\beta g(x_0+\Delta x)\\ &= (\alpha f(x_0)+\beta g(x_0))+(\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0))\,\Delta x\\ &\quad +\Delta x\,(\alpha R_f(x_0,\Delta x)+\beta R_g(x_0,\Delta x))\end{aligned}$$

Die obere Zeile nutzt nur die Definition der Werte von $\alpha f+\beta g$. Dann werden auf der rechten Seite die beiden vom Szenenbild bereit gestellten gültigen Tangentenzerlegungen eingesetzt. Faktisch geschieht das so, daß die erste mit α die zweite mit β multipliziert wird und die rechten Seiten entsprechend addiert. Bei der Bilanzbildung werden gleichartige Terme sofort zusammengestellt (kein Δx, ein Δx und mehr als ein Δx!). Die entstehende rechte Seite hat bereits die Form einer Tangentenzerlegung. Ist die Resttermeigenschaft erfüllt? Kandidat für den Restterm ist $\alpha R_f(x_0,\Delta x)+\beta R_g(x_0,\Delta x)$. Nun muß man wieder einen allgemeinen Grenzwertsatz haranziehen: Haben A und B beide den Grenzwert Null, dann hat $\alpha A+\beta B$ auch den Grenzwert Null. Fertig: Wir haben die Resttermeigenschaft für unsere Zerlegung nachgewiesen und dürfen die Ableitung von $\alpha f+\beta g$ über den mittleren linearen Summanden ablesen.
(9.3.7) Das (modular einzusetzende) Resultat:

> **Die Linearität derAbleitung:**
> Die reellen Funktionen f und g seien im Punkte x_0 differenzierbar mit Ableitungen $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$.
> Dann ist auch $\alpha f+\beta g$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung
> $$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).$$

Zur letzten Gleichung: Links steht die Bezeichnung der interessierenden Größe. Der rechte Term gibt ein Verfahren, diese Größe aus den Eingabedaten zu berechnen.

Kurz: **Man darf Summanden einzeln differenzieren und konstante Faktoren vorziehen**.

(9.3.8) Mit Hilfe dieser Regel kann man beispielsweise alle Polynomabbildungen differenzieren.
☐ Differenzieren Sie p mit $p(x)=x^3-7x^2+5x$ in x_0 und in $x_0=-2$.
☐ Differenzien Sie $t(x)=3sin(x)-5cos(x)$ in $x_0=\frac{1}{2}\pi$.

9.3.2b **Die Produktregel**

(9.3.10) Die nächste Ableitungsregel: Wie steht es mit der Ableitung einer Produktfunktion F(x)=f(x)g(x)? Das Szenenbild bleibt das alte und die Analyse erfolgt völlig analog. Wir setzen in die Definitionsgleichung $F(x_0+\Delta x)=f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)$ rechts die beiden Tantenzerlegungen ein und multiplizieren distributiv aus. Das gibt neun Terme! Diese sortieren wir sofort - ohne weitere Zwischenrechnung - nach der Zahl der Potenzen in Δx. Das Ergebnis:

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) &= f(x_0)g(x_0)+(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))\Delta x+\\ &\quad +\Delta x(....6\text{ Summanden.....})\end{aligned}$$

Man überzeugt sich problemlos, daß alle 6 Summanden des dritten Beitrages einzeln nach Null gehen für Δx nach Null. (Denken sie daran, bei jedem Produktbeitrag ein Δx fortzulassen!) Damit geht auch die Summe nach Null und die Resttermbedingung ist erfüllt! Wir könne die Ableitung ablesen.
(9.3.11) Zuvor noch eine nützliche Bemerkung: Der Beitrag der bei der Produktbildung $f'(x_0)g'(x_0)$ enthält, hat zwei Faktoren Δx und gehört damit zum Rest! Naiv hätte man diesen Ausdruck ja als Kandidaten für die Ableitung annehmen können. Es darf immer nur ein Faktor eine Ableitung enthalten.

(9.3.12) Das Ergebnis:

> **Die Produktregel:**
> Die reellen Funktionen f und g seien im Punkte x_0 differenzierbar
> Ableitungen $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$.
> Dann ist die Funktion F mit F(x)=f(x)g(x) in x_0 differenzierbar mit Ableitung
> $$F'(x_0) = (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

☐ Sie sollten jetzt die folgende Frage ohne zusätzliche Rechnung beantworten können:
"Wie sieht die Ableitungsregel für F(x)=f(x)g(x)h(x) aus?" Es ist zu erläutern, wie der Beweis zu modifizieren ist und was dabei geschieht.

☐ Berechnen Sie die Ableitung von F(x)=$e^x \sin(x)$ und für G(x)=$x^3 e^x \cos(x)$.

☐ Setze w(x)=$\sqrt{x}$. Dann gilt w(x)w(x)=x. Differenzieren Sie beide Seiten und bestimmen Sie so die Ableitung $w'(x_0)$, also in laxer Schreibweise $(\sqrt{x})'$.

(9.3.13) Die Gebrauchsform der Produktregel lautet: **Ein Produkt wird differenziert, indem man jeweils genau einen Faktor differenziert und dann über alle Möglichkeiten summiert.**

9.3.2c Die Ableitung der reziproken Funktion

(9.3.14) Der nächste zu behandelnde Kandidat ist die **reziproke Funktion** f^{-1} mit $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. (Das ist nicht die inverse Funktion $\overset{-1}{f}$!) Jedenfalls sollte $f(x_0) \neq 0$ gelten. Hierzu müssen wir für $F(x_0 + \Delta x) = f^{-1}(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{f(x_0+\Delta x)}$ eine Tangentenzerlegung anstreben. Zunächst einmal setzen wir einfach die Tangentenzerlegung für f ein. Das gibt:

$$\frac{1}{f(x_0 + \Delta x)} = \frac{1}{f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)}$$

Wie bekommen wir die Δx aus dem Nenner heraus? Wie können wir Δx lineariseren? (Vgl. (9.2.8).) Wir erinnern uns, daß wir die Funktion $x \mapsto h(x) = \frac{1}{x}$ für $x_0 \neq 0$ bereits differenziert haben! Die Ableitung war $-\frac{1}{x_0^2}$ Aus einem gleich einzusehendem Grund benennen wir die Varible von x in y um. Dann lautet die zugehörige **gültige** Tangentenzerlegung:

$$\frac{1}{y_0 + \Delta y} = \frac{1}{y_0} + \left(-\frac{1}{y_0^2}\right)\Delta y + \Delta y R_h(y_0, \Delta y).$$

(9.3.15) Jetzt die wichtige Überlegung: Das ist eine gültige Gleichung für alle $y_0 \neq 0$ und alle Δy! Wir wählen $y_0 = f(x_0) \neq 0$ und $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x) = \Delta x\,(f'(x_0) + R_f(x_0, \Delta x))$. D.h. Δy hat von jetzt ab die Rolle einer Hilfsgröße! Aber wenn die Gleichung für alle Δy gilt, dann auch für dieses. Wir erinnern an den Begriff der *freien Variablen* in (1.8.13). Und Δy hat diese Rolle.

Setzen wir also die Werte in die gültige Tangentenzerlegung ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x_0 + \Delta x)} &= \frac{1}{f(x_0)} + \left(-\frac{1}{(f(x_0))^2}\right)\Delta x\,(f'(x_0) + R_f(x_0, \Delta x)) \\
&\quad + \Delta x\,(f'(x_0) + R_f(x_0, \Delta x))\, R_h(f(x_0), \Delta x(f'(x_0) + R_f(x_0, \Delta x))) \\
&= \frac{1}{f(x_0)} + \left(-\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}\right)\Delta x \\
&\quad + \Delta x\left(\left(-\frac{1}{(f(x_0))^2}\right) R_f(x_0, \Delta x) + \frac{\Delta y}{\Delta x} R_h(y_0, \Delta y)\right)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir erneut nach Potenzen von Δx sortiert und Abkürzungen benutzt. Die letzte Zeile ist Kandidat für den Restterm. Was geschieht mit dem Klammerausdruck für Δx nach Null? Der erste

Beitrag geht als Restterm von f nach Null. In $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kürzt sich das Δx heraus, was verbleibt geht gegen eine Konstante. Aber der zweite Faktor R_h ist ja der Restterm von h. Und Δy geht nach Null, wenn Δx nach Null geht, wie man sofort sieht! Dann geht aber auch R_h nach Null und folglich erfüllt die letzte Zeile die Restermeigenschaft.
(9.3.16) Wir erhalten mit der ersten Denkfigur:

> **Die Ableitung der reziproken Funktion.**
> Sei f in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$. Weiter sei $f(x_0) \neq 0$.
> Dann gilt ist F mit $F(x)=\frac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar und es gilt:
>
> $$F'(x_0) = (\tfrac{1}{f})'(x_0) = -\tfrac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2} = -\tfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

☐ Man könnte auch wie folgt argumentieren: Es gilt $F(x)f(x)=\frac{1}{f(x)}f(x) = 1$. Differenziert man beide Seiten dieser Gleichung nach x, wobei links die Produktregel zu verwenden ist, dann folgt

$$F'(x_0)f(x_0) + F(x_0)f'(x_0) = 0.$$

Auflösen nach der gesuchten Größe $F'(x_0)$ gibt sofort obige Ableitungsformel. Leider ist dieser Beweis nicht ganz vollständig! Worin besteht sein logisches Defizit?

9.3.2d **Die Quotientenregel**

(9.3.17) Der nächste Kandidat einer Ableitungsregel ist die **Quotientenfunktion** $\frac{f}{g}$ für x_0 mit $f(x_0) \neq 0$. Die Herleitung der Regel ist jetzt einfach. Man hat ja $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} \cdot f(x)$. Und hierauf wenden wir einfach die beiden vorangegangenen Ableitungsregeln an. Zuerst die Produktregel und dann die Regel für die Ableitung der reziproken Funktion:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(\frac{1}{g} \cdot f\right)'(x_0) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \cdot f(x_0) + \frac{1}{g}(x_0) \cdot f'(x_0) \\ &= \left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) f(x_0) + \frac{1}{g(x_0)} f'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde eine Hauptnennerbildung ausgeführt. zu Beginn der Gleichungskette steht die Bezeichnung der gesuchten Größe. Am Ende eine Berechnungsvorschrift in der üblichen Endform.
(9.3.18) Ergebnis:

> **Die Quotientenregel:**
> Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$.
> Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt:
>
> $$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \tfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(9.3.19) Hinweis zum praktischen **Umgang mit der Formel:** Es soll ein Quotient differenziert werden. Schreiben Sie zunächst den Bruchstrich hin und darunter das Nennerquadrat. D.h. alle trivialen Anteile. Dann kann man diese *vergessen* und sich an den weniger trivialen Teil machen, sich auf das Wichtige konzentrieren: Zuerst den Zähler ableiten, hinschreiben und mit Nenner multiplizieren, an das Minus denken und die zuletzt im Kopf aktivierte Größe g(x) ableiten usw. Vgl. auch (1.4.8).
☐ Leiten sie nach diesem Verfahren folgende Funktionen ab:

$$\frac{2x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 2x - 5}, \qquad tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \frac{e^x}{x^2(1 + e^x)}$$

(9.3.20) Ein weiterer Hinweis: In manchen, seltenen Fällen ist es sinnvoll, die Produktregel auf $(\frac{1}{g}f)$ anzuwenden. Dann entfällt die letzte Hauptnennerbildung. Aber ohne Grund sollte man das nicht tun.

9.3.2e **Die Kettenregel**

(9.3.21) Damit kommen wir zur besonders wichtigen Kettenregel. Diese bezieht sich auf den nächsten zu behandelnden Kandidaten $g \circ f$, also eine verkettete oder verschachtelte Funktion.
(9.3.21) Zunächst einmal ist das **Szenenbild** etwas anders. Gegeben ist typischerweise eine Funktion $x \mapsto F(x)$, die in x_0 differenziert werden soll. Man hat oder sucht sich dazu zwei Funktionen g und f, derart, daß $F(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ ist. In Diagrammform:

x		$\overset{F=g\circ f}{\longmapsto}$		$F(x)$	$= g(f(x)$
x	$\overset{f}{\mapsto}$	$f(x)$			
		$y = f(x)$	$\overset{g}{\mapsto}$	$g(y)$	$= g(f(x)$

Die Variable x erlebt zuerst die durch f beschriebene Operation. Das Ergebnis wird mit y bezeichnet und diese Variable erlebt die durch g beschriebene Operation. (Sprachlich "g nach f".) Insbesondere wird x_0 zuerst zu $y_0 = f(x_0)$. D.h. y_0 ist Hilfsgröße. Beim Ausfüllen des Diagrammes geht man vielfach halbkreisförmig über den unteren Teil nach rechts oben. Bemühen sie sich darum, zusammengesetzte Funktionen in der Form solcher Diagramme zu sehen.
(9.3.22) Ein Beispiel: $F(x) = sin(1 + 2x^2)$. Dann ist folgende Zerlegung möglich, keineswegs zwingend:

x		$\overset{F=g\circ f}{\longmapsto}$		$F(x)$	$= \sin(1+2x^2)$
x	$\overset{f}{\mapsto}$	$1+2x^2$			
		$y = 1+2x^2$	$\overset{g}{\mapsto}$	$\sin(y)$	$= \sin(1+2x^2)$

(9.3.23) Wir geben jetzt sofort das Resultat, die Kettenregel an:

> Die **Kettenregel:**
> Sei F=g$\circ f$ und f in x_0 differenzierbar und g in y_0 wobei $y_0 = f(x_0)$ gesetzt ist.
> Dann ist F in x_0 differenzierbar und es gilt:
>
> $$F'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(y_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)).$$

Mit Hilfe unseres Diagrammes läßt sich das unmittelbar verstehen und praktisch ausführen: Man hat einfach im Diagramm unten eine Bilanzzeile hinzuzufügen, die beiden Einzelfunktionen zu differenzieren, in der Bilanzzeile das Produkt zu bilden und eventuell y_0 im Ergebnis wieder einzusetzen:

x		$\overset{F=g\circ f}{\longmapsto}$		$F(x)$	$= \sin(1+2x^2)$
x	$\overset{f}{\mapsto}$	$1+2x^2$			
		$y = 1+2x^2$	$\overset{g}{\mapsto}$	$\sin(y)$	$= \sin(1+2x^2)$
	$f'(x_0)$		$g'(y_0)$	gibt:	$F'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(y_0)$
					$f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

(9.3.24) Als Beispiel für eine Anwendung dieses Schemas wählen wir unser Eingangsbeispiel. Die Ableitung ergibt sich problemlos:

x		$\overset{F=g\circ f}{\longmapsto}$			$F(x) = \sin(1+2x^2)$
x	$\overset{f}{\mapsto}$	$1+2x^2$			
		$y = 1+2x^2$	$\overset{g}{\mapsto}$	$\sin(y)$	$= \sin(1+2x^2)$
		$4x$		cos(y)	$F'(x) = 4x\cos(1+2x^2)$

(9.3.25) Beweis der Kettenregel: Der Beweis läßt sich in Form einer naheliegenden Verallgemeinerung des Beweises für die Ableitung der reziproken Funktion führen . Dort waren wir von $\frac{1}{f}(x) = h \circ f(x)$ ausgegangen mit $h(y) = \frac{1}{y}$. Wir hatten die Tangentenzerlegung von f in die von h eingesetzt und eine

Zerlegung für die zusammengesetzte Funktion gewonnen. Jetzt müssen wir nur die spezielle Zerlegung für h durch die für allgemeines g ersetzen. Genauer gilt infolge der Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\Delta x R_f(x_0,\Delta x) \\ g(y_0+\Delta y) &= g(y_0)+g'(y_0)\Delta y+\Delta y R_g(y_0,\Delta y) \end{aligned}$$

Ziel ist, das Δx aus der von-Klammer in $g\circ f(x_0+\Delta x)=g(f(x_0+\Delta x))$ herauszubekommen. Dazu setzen wir innen die Zerlegung von f ein, setzen $y_0=f(x_0)$ und $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\Delta x R_f(x_0,\Delta x)=\Delta x\,(f'(x_0)+R_f(x_0,\Delta x))$. Für diese Hilfsgrößen verwenden wir die zweite Zerlegung. Teilweises Rückeinsetzen der Hilfsgrößen und Sortieren nach Potenzen in Δx gibt:

$$\begin{aligned} g(f(x_0+\Delta x)) &= g(y_0)+g'(y_0)f'(x_0)\Delta x+ \\ &\quad +f'(x_0)\Delta x R_f(x_0,\Delta x)+\Delta x\,(f'(x_0)+R_f(x_0,\Delta x))\,R_g(y_0,\Delta y) \end{aligned}$$

In den letzten beiden Termen klammern wir ein Δx aus. Dann geht R_f als Resterm immer noch nach Null. Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geht gegen eine Konstante und R_g geht nach Null, da Δy nach Null geht, wenn Δx dies tut! **Damit ist die Kettentregel über die erste Denkfigur bewiesen.**

(9.3.25) Erneut läßt sich der Beweis problemlos auf **mehr als zwei Faktoren** ausdehnen.

(9.3.26) Ebenso verallgemeinert man das Schema für die konkrete Anwendung in naheliegender Weise.

♦	F(x) sei gegeben
♦	Gehe im Rechen- und "Schicksalsweg" von x so weit, wie man problemlos differenzieren kann. (Also in $x\mapsto sin(1+2x^2)$bis $x\mapsto(1+2x^2)$ nicht etwa nur bis x$\mapsto x^2$)
♦	Setze das mit der eingeführten Hilfsgröße analog fort.
♦	Nehmen wir als Beispiel ein Endresultat von 3 Faktoren:. $F=h\circ g\circ f$
♦	Schreibe den Wert als Zuordnungsschema mit Hilfsgrößen: $x\mapsto f(x)=u\mapsto g(u)=v\mapsto h(v)=y$
♦	Differenziere jede Zuordnung.
♦	Bilde das Produkt $f'(x)g'(u)h'(v)$
♦	Rückeinsetzen von u und v gibt die gesuchte Ableitung: $F'(x)=f'(x)g'(f(x))h'(h(f(x))$

(9.3.27) Damit finden wir für unser Beispiel F(x)=$e^{\tan(\sin(2x+x^2))}$ sofort die folgende Ableitung:

$$\boxed{F'(x)=(2+2x)\frac{\cos(2x+x^2)}{\cos^2(\sin(x^2+2x))}e^{\tan(\sin(2x+x^2))}}$$

Insbesondere folgt sofort F′(0)=2, was wir in (9.3.3) benutzt haben.

9.3.2f **"Physikalische" und "mathematische" Funktionen**

(9.3.28) Die unabhängige Variable x einer mathematischen Funktion, sagen wir des Sinus, ist im physikalischen Sinne einheitenfrei, ist eine reine Zahl. Die unabhängige Variable von Funktionen der Physik dagegen hat in der Regel eine Einheit, etwa die einer Länge oder einer Zeit. Wie paßt beides zusammen? Wie bildet man Funktionen der Physik mit Hilfe mathematischer Funktionen? **Nun, in der Regel wird einfach eine weitere meist lineare Abbildung dazwischengeschaltet.** In der Physik tritt der Sinus in der Form $t\mapsto\sin(\omega t+\varphi)$ auf. Dabei hat ω auch eine Einheit, derart, daß ωt einheitenfrei ist.

Das erklärt, warum physikalische Rechenausdrücke vielfach oder besser in der Regel, in der Form $F(x)=f(\alpha x+\beta)$ auftreten. Im Zusammenhang mit der Kettenregel bedeutet das immer **einen zusätzlichen Faktor** α in der Ableitung:

$$F(x)=f(\alpha x+\beta)\quad\text{gibt}\quad F'(x)=\alpha f'(\alpha x+\beta)\ .$$

Es ist nützlich, sich dieses einfachen Sachverhaltes bewußt zu sein.

9.3.2g **Die Ableitung der inversen Funktion**

(9.3.29) . Hier enthält das Szenenbild eine invertierbare Funktion. D.h. in der Regel einen Rechenausdruck mit einem geeigneten Definitionsintervall. Im Falle des Tangens etwa das Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Weiter sei f in x_0 differenzierbar. Aber der Wert dieser Ableitung sei zusätzlich nicht Null! Denn bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden geht eine horizontale Tangente in eine vertikale über, also Steigung Unendlich!
(9.3.30) Die Gültigkeit der Ableitungsregel für die inverse Abbildung wollen wir nur partiell beweisen. Die Regel selbst ist recht wichtig, weniger für die alltägliche Routinearbeit, als zur Herleitung einiger Ableitungen, die man der Liste generell bekannter Ableitungen hinzufügen sollte. Das sind speziell die wichtigen Ableitungen des Logarithmus, des Arcustangens und des Arcussinus. .

(9.3.31) Wie sieht die Regel aus? Angenommen f ist differenzierbar und besitzt eine inverse Abbildung $\overset{-1}{f}$. D.h. es gilt $f \circ \overset{-1}{f}(y) = f(\overset{-1}{f}(y)) = y$. Nun nehmen wir an - und das wäre eigentlich noch mit zu beweisen, daß $\overset{-1}{f}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar sei. f soll es in x_0 sein. Dann können wir beide Seiten der Gleichung $f(\overset{-1}{f}(y)) = y$ nach der Kettenregel differenzieren und finden mit unserem Schema

y	$\mapsto$	$\overset{-1}{f}(y) = x$	$\mapsto$	$y = f(\overset{-1}{f}(y))$
		x	$\mapsto$	$f(x)$
	$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y)$		$f'(x) = f'(\overset{-1}{f}(y))$	

Also, da $y \mapsto y$ die Ableitung 1 hat:

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y) \cdot f'(\overset{-1}{f}(y)) = 1.$$

Dies können wir nach der gesuchten Ableitung auflösen (wegen $f'(x_0) \neq 0$ **dürfen** wir dividieren!) und finden:

$$\boxed{\left(\overset{-1}{f}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(\overset{-1}{f}(y))}}$$

(9.3.32) Zusammengefaßt:

Die Ableitung der inversen Funktion
Sei f in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) \neq 0$.
Weiter sei f invertierbar mit inverser Abbildung $\overset{-1}{f}$
Dann ist $\overset{-1}{f}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(\overset{-1}{f}(y))}$$

- ☐ Wieso ist die Notwendigkeit der Bedingung $f'(x_0) \neq 0$ auf Grund der graphischen Interpretation der inversen Funktion klar?
- ☐ Wie kann man das Resultat für $f'(x_0) = \pm 1$ graphisch interpretieren?

(9.3.33) Wir wollen den Beweis hier nicht vervollständigen, sondern statdessen diskutieren, wie man das Resultat anwendet, um neue Ableitungen zu bestimmen. (Vgl. die einführende Bemerkung zu Kap.1.2 zum Stichwort **Gebrauchsregeln.**) Erneut bereitet die nackte Formel Anfängern Probleme.

Wir schlagen daher folgendes Vorgehen vor: Man führt ein Vier-Felder-Tafel ein, in der man drei Felder durch die gegebenen Zutaten ausfüllen kann. In das vierte Feld kommt dann die gesuchte Ableitung **und man kann sie gemäß der Formel aus den Zutaten der anderen drei Felder zusammentzen!**

$f(x_0) = y_0$	$f'(x_0)$	$f(x_0) = y_0$	$f'(x_0)$
$x_0 = \overset{-1}{f}(y_0)$	$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y_0) =????$	$x_0 = \overset{-1}{f}(y_0)$	$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(\overset{-1}{f}(y_0))}$

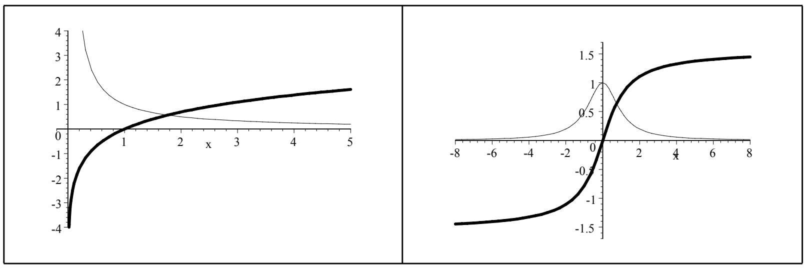
(9.3.34) Dazu zwei Beispiele. Also erst die drei Felder füllen und mit deren Inhalt das vierte:

$f(x_0) = e^{x_0}$	$f'(x_0) = e^{x_0}$	
$x_0 = \ln(y_0)$	$\ln'(y_0) = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{e^{\ln(y_0)}} = \frac{1}{y_0}$	$ln'(y_0) = \frac{1}{y_o}$

Das ist ein sehr wichtiges Ergebnis, das unbedingt mit in die Liste (9.1.45) der unmittelbar zu wissenden Ableitungen aufzunehmen ist. Dasselbe gilt für die nächste Ableitung:

$f(x_0) = \tan(x_0)$	$f'(x_0) = 1 + \tan^2(x_0)$	
$x_0 = atn(y_0)$	$\text{atn}'(y_0) = \frac{1}{1+\tan^2(x_0)} = \frac{1}{1+(\tan(atn(y_0)))^2} = \frac{1}{1+y_0^2}$	$atn'(y_0) = \frac{1}{1+y_o^2}$

(9.3.35) In beiden Fällen ist es sinnvoll, zur Ableitungs**funktion** überzugehen und die zugehörigen Graphen zu zeichnen. Man muß sich dann davon überzeugen, daß der jeweilige Ableitungswert tatsächlich halbquantitativ korrekt den Steigungswert der zugehörigen Tangente wiedergibt:



In beiden Fällen ist der Rechenausdruck für die Ableitung strukturell einfacher als der für die Funktion selbst.

- ☐ Überlegen Sie mit Hilfe des Graphen von asn (Arcus-Sinus), welche Eigenschaften die zugehörige Ableitungsfunktion besitzen muß. Basteln Sie dann eine möglichst einfache Funktion, die alle diese Eigenschaften hat. Und berechnen Sie schließlich mit Hilfe des Schemas die Ableitung. Es sollte sich dieselbe Funktion ergeben!
- ☐ Bestimmen Sie die Ableitung von $\sqrt{x}$ erneut.
- ☐ Für welche Werte von α gilt für $\text{h}_\alpha(x) = x^\alpha$ die Ableitungsregel $\text{h}'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$? Für welche α -Werte können wir das beweisen? Welche Lücke bleibt?

9.3.3 **Das Zusammenspiel mehrerer Regeln**

(9.3.36) Häufig muß man mehrere Regeln koordiniert anwenden, um die Ableitung zu erhalten. Bei $F(x) = e^{-\alpha x^2}\sin(\omega x)$ etwa benötigt man die Produktregel und die Kettenregel. Man wird sich zumindest im Kopf, bei größeren Problemen auf dem Papier, ein Formschema für die zuletzt anzuwendende Ableitungsregel anfertigen, das alle *trivialen* Teile des Endergebnisses enthält, und dann die einzelnen noch einzufügenden Zutaten gesondert ausrechnen und einfügen. Denken Sie immer an das Prinzip: Triviale Teile hinschreiben, so daß man dem Rest die uneingeschränkte Aufmerksamkeit widmen kann! Im Beispiel ist die Produktregel außen anzuwenden mit folgendem trivialem Teil:

$$F'(x) = (....?1..)\sin(\omega x) + e^{-\alpha x^2}(...?2...).$$

Für die fehlenden Reste benötigt man die Kettenregel, aber in sehr einfacher Form. D.h die Resultate sind sofort hinschreibbar und bei tatsächlicher Ausführung wohl auch gleich in der Formel einfügbar.

$$(....?1..) = \left(e^{-\alpha x^2}\right)' = (-2\alpha x)e^{-\alpha x^2} \qquad (...?2...) = (\sin(\omega x))' = \omega\cos(\omega x).$$

Einfügen gibt das gesuchte Resultat. Beachten Sie: Beim Differenzieren wird eine Exponentialfunktion immer reproduziert, so daß man sie am Ende ausklammern kann. Das ergibt im vorliegenden Fall folgende Endform:

$$F'(x) = e^{-\alpha x^2}\left(-2\alpha x\sin(\omega x) + \omega\cos(\omega x)\right).$$

(9.3.37) Hinweis: Fast immer eine Endform anzustreben, **bei der möglichst viel ausgeklammert ist!**

(9.3.38) Das nächste Beispiel: $G(x) = \frac{x^5 e^{-x}}{(1+x^2)^3}$. Hier steht die Quotientenregel ganz außen. Wir sagten bereits, daß man dazu sofort einige triviale Teile hinschreiben sollte. Hier:

$$G'(x) = \frac{(.?1...)(1+x^2)^3 - x^5 e^{-x}(.?2..)}{(1+x^2)^6}$$

Auf jeden Fall zunächst alles bis auf den Zähler! Was ist dann noch einzufügen? Mit etwas laxer Schreibweise: $\left(x^5 e^{-x}\right)' = e^{-x}\left(5x^4 e^{-x} - x^5 e^{-x}\right) = x^4 e^{-x}(5-x)$. Hier haben wir gleich möglichst viel ausgeklammert! Und $\left((1+x^2)^3\right)' = (2x)3(1+x^2)^2$. Einsetzen und Vereinfachen (=Kürzen und Ausklammern) gibt als Endform:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{x^4 e^{-x}(5-x)(1+x^2)^3 - x^5 e^{-x} 6x(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} \\ &= \frac{x^4 e^{-x}\left((5-x)(1+x^2) - 6x^2\right)}{(1+x^2)^4} = \frac{x^4 e^{-x}\left(5 - x - x^2 - x^3\right)}{(1+x^2)^4} \end{aligned}$$

□ Leiten Sie $x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ ab.