****

Vorkurs Mathematik

Teil II Analysis

F. Krause

Kapitel 8

Glatte reelle Funktionen

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Inhaltsübersicht Kap. 8

8.1 **Allgemeine elementare Eigenschaften reeller Funktionen**

Wir kommen jetzt zu den Abbildungen, die uns vorzugsweise interessieren, den ***reellen Funktionen****. Darunter verstehen wir Abbildungen, bei denen sowohl die Urbildmenge als auch die Wertemenge geeignete Teilmengen der reellen Zahlen sind. Ausgangspunkt ist meist eine Zuordnung $x \mapsto f(x)$, wobei f(x) aus der eingegebenen reellen Zahl x durch Auswertung eine neue reelle Zahl y macht. Statt Urbildmenge sagt man hier vielfach auch Definitionsmenge oder* ***Definitionsbereich****.*

Diesen reellen Funktionen kommt im Rahmen der üblichen Naturbeschreibung eine herausragende Bedeutung zu. Kurz, es geht um gerichtete Beziehungen zwischen Größen mit einem Freiheitsgrad.

In einer typischen heutigen Einführung in die Physik kommen auf den ersten 200 Seiten über 50 derartige Funktionen meist in graphischer Form vor. Dabei wird verständnisvoller Umgang mit diesen Funktionen erwartet, in dem Sinne wie er nachfolgend in diesem Text angestrebt wird.

8.1.1 **Die Urbildmenge**

(8.1.1) Wir besprechen vorzugsweise glatte gutartige Funktionen dieses Typs. Wie die Mathematik gezeigt hat, gibt es daneben weitere Funktionen mit unerwarteten, sonderbaren und schwer verständlichen Eigenschaften, auf die wir hier nicht eingehen (Vgl. (9.1.69)). Was glatt genauer heißen soll, werden wir bald sehen.
(8.1.2) Als Wertemenge wählen wir in der Regel ganz $\mathbb{R}$. Für die Urbildmenge nehmen wir Intervalle, aus denen eventuell noch einzelne Punkte entfernt sind.
(8.1.3) Was sind *Intervalle* von $\mathbb{R}$? Wir verwenden zur Übung die Mengenschreibweise aus Kap.7.1.6. In allen Fällen soll a<b gelten.

]a,b[	Offenes Intervall von a nach b.	]a,b[=$\{x \mid x \in \mathbb{R}$, a<x<b}
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall ..	[a,b]=$\{x \mid x \in \mathbb{R}$, a≤x≤b}
]a,b]	halboffenes Intervall...	]a,b]=$\{x \mid x \in \mathbb{R}$, a<x≤b}
]-∞, b[	offenes nach links unbeschränktes Intervall	]-∞, a[=$\{x \mid x \in \mathbb{R}$, x<b}
]-∞, b]	nach links unbeschränktes Intervall	]-∞, a[=$\{x \mid x \in \mathbb{R}$, x≤b}

(8.1.4) Die Symbole "[" und "]" sind so etwas wie Trennungszeichen auf der Zahlgeraden, wobei der Punkt, die Zahl, an der getrennt wird, zu dem Bereich gezählt wird, der durch die kleinen Haken angedeutet wird. Im Intervall]1,3] gehört die 1 nach außen, nicht zum Intervall, die 3 dagegen gehört als "Randpunkt" dazu. Das Symbol ∞ bezeichnet keine eigentliche Zahl und darf daher nicht in der Menge eingschlossen werden. Natürlich ist $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.
Denken sie beim Decodieren solcher Mengen daran, daß beispielsweise $\{x|x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ wie folgt zu lesen ist: "Menge **aller** reeller Zahlen x, für die $a \leq x$ und $x \leq b$ gilt". Dabei sind a und b äußere Parameter.
(8.1.5) Unsere Urbildmengen sind typischerweise Intervalle oder aus einigen wenigen offenen Intervallen zusammengesetzt. Ein Beispiel: Zu der rechnerisch gegebenen Zuordnung $x \mapsto \frac{1}{x}$ gehört das Abbildungstripel $(\mathbb{R} - \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}, \mathbb{R})$. Dabei ist der maximal mögliche Definitionsbereich gewählt und selbsterklärend mit

$$\mathbb{R} - \{0\} = \{x|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \quad = \quad]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, \infty[$$

bezeichnet. Das Beispiel zeigt, daß es für ein und dieselbe Menge eine Vielzahl von Darstellungen und Schreibweisen geben kann. Die letzte Schreibweise gibt die Zusammensetzung aus zwei offenen Intervallen. Worauf es ankommt, ist nicht die Bezeichnung, sondern der Inhalt, hier also die Gesamtheit der in der Menge enthaltenen Elemente.
(8.1.6) Aber man muß keineswegs immer den maximalen Defintionsbereich wählen. Ist T etwa eine physikalische und damit positive Temperatur, hätte man eher $(]0, \infty[, T \mapsto \frac{1}{T}, \mathbb{R})$ zu betrachten. Und in

einem anderen Fall könnte man auch komplexe Zahlen zulassen und hätte $(\mathbb{C}-\{0\}, z \mapsto \frac{1}{z}, \mathbb{C})$ vorliegen. Über die Zuordnung allein kann man diese drei Abbildungen **nicht** unterscheiden. Man benötigt das volle Abbildungstripel.

8.1.2 **Der Graph einer reellen Funktion**

(8.1.7) Das für uns wichtigste Hilfsmittel zur Behandlung einer reellen Funktion ist deren Graph. Wir hatten in (7.1.18) für $f = (D, x \mapsto f(x), W)$ die Menge Graph(f)=$G_f = \{(x, f(x)|x \in D\}$ eingeführt. Das ist eine Teilmenge von $D \times W$, also im Falle der reellen Funktionen eine Teilmenge der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Der Graph läßt sich als geometrische Figur der Koordinatenebene interpretieren. Wir wollen uns hier vornehmlich mit Funktionen mit zeichenbarem Graphen beschäftigen.

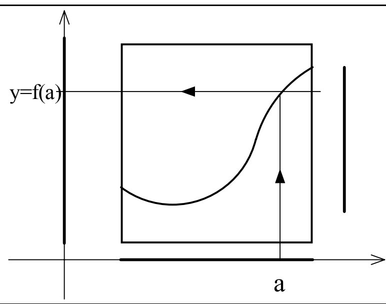
(8.1.8) Der Graph bildet eine andere Darstellungsform der Zuordnung: Man wählt ein x aus D, dann gibt es dazu genau ein geordnetes Paar $(x, y) \in G_f$. Die zugehörige zweite Koordinate ist der gesuchte Zuordnungswert y=f(x). Die Bildung läßt sich problemlos graphisch realisieren, was den Nutzen des Graphen ausmacht: **Mit seiner Hilfe erfaßt man im günstigen Fall die gesamte Zuordnung mit einem einzigen Blick.** Man kann dann unmittelbar *sehen* und sagen, wie der Funktionswert für ein gegebenes x etwa aussieht. Da es immer ungeheuer viele potentielle x-Werte gibt, ist das ausgesprochen wichtig.

!! Oder auch: Der Graph liefert ein **operativ-anschauliches Zuordnungsverfahren für die Zuordnung der Funktion.**

(8.1.9) Das bedeutet, daß wir für die Zuordnungen reeller Funktionen meist über zwei Zuordnungsverfahren verfügen: die durch einen Rechenausdruck gegebene und die über den Graphen. Hat man jetzt eine zugehörige Problemsituation, sollte man immer die geeignetere Darstellung wählen und das ist für eine erste Orientierung, für den Einstieg, in der Regel die über den Graphen! Wir werden daher immer wieder überlegen und analysieren, wie sich bestimmte rechnerische und formale Eigenschaften graphisch darstellen. Denken Sie daran: Die nicht routinemäßige Lösung neuartiger Probleme ist die entscheidende Fähigkeit, die erlernt werden soll und hier geht es um einen durchaus schweren Einstieg in solche Probleme.

(8.1.10) Wir beschreiben das graphische Konstruktionsverfahren, das der Graph für die Zuordnung liefert, nochmals genauer in operativer Form:

1	Wähle a aus D
2	Ziehe die Parallele durch a zur y-Achse
3	Bestimme den Schnittpunkt S mit dem Graphen
4	Ziehe durch S Parallele zur x-Achse
5	Deren Höhe y ist der gesuchte zugeordnete Wert f(a)

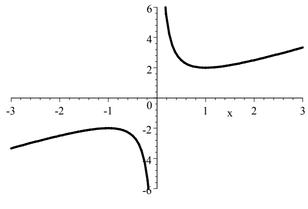


Beachten sie Punkt 3: **Es muß immer genau einen Schnittpunkt geben**, sonst liegt kein Graph vor.

☐ Wichtig: In der Figur sind die folgenden Mengen mit eingezeichnet : D,W,G_f, $D \times W$ und Bild(f). Identifizieren Sie diese Mengen in der Zeichnung! (Eigentlich sind es nicht immer genau diese Mengen, sondern ihnen graphisch gleichwertige! W ist hier nicht ganz $\mathbb{R}$)

(8.1.11) Beispiel: Die beiden Zuordnungsverfahren - ein rechnerisches und das graphische - sind für die Abbildung $(\mathbb{R}-\{0\}, x \mapsto x + \frac{1}{x}, \mathbb{R})$ nebeneinander gestellt:

y=x+$\frac{1}{x}$ für x$\neq$ 0
etwa 1$\mapsto$ 2 oder -2$\mapsto -\frac{5}{2}$



☐ Was ist für dieses Beispiel das Bild (der Funktion)?

(8.1.12) Fassen wir zusammen, was uns an Zielen und Fragen beschäftigen soll:

- Unser Thema sind die glatten reellen Funktionen als besonders wichtiger Spezialfall der allgemeinen Abbildungen.
  - Derartige Funktionen werden in den Anwendungen in der Regel über Terme mit Rollenzuweisung eingeführt, so daß wir uns mit dem zugehörigen Termbau genauer befassen müssen.
  - Welche wichtigen Eigenschaften haben glatte Funktionen und wie stellen diese sich in den zugehörigen Graphen dar?
  - Welche mathematischen Eigenschaften dieser Funktionen werden allgemein benötigt und in welcher Form sollte man diese Eigenschaften darstellen, so daß sie sich bei der Problembehandlung möglichst effektiv einsetzen lassen?

⇓⇓ Der zweiten und dritten Frage gehen wir in Kap.8.2.2 und Kap.8.2.3 nach, die vierte Frage behandeln wir in zwei Anläufen. Nachfolgend in Kap.2.1.3 formulieren wir zunächst einige nützliche Eigenschaften und.in (10.3.8) besprechen wir einen allgemeinen mathematischen Satz von der Art, mit der man in der Mathematik die genaueren Beweise führt. Auf diese Beweisarbeit gehen wir hier aber nicht ein.

8.1.3 Einige wichtige mathematische Konsequenzen für die Graphen glatter Funktionen

Wir behandeln das folgende Problem: Es interessiert der Graph einer Funktion in einem vorgegebenen Intervall. Man kennt den Graphen an den Rändern des Intervalles, aber in der Mitte besteht eine Kenntnislücke. Und man kennt einen Rechenausdruck für die Zuordnung. Was läßt sich dann über den Graphen im Zwischenbereich aussagen?

(8.1.12) Hierzu gibt es eine Reihe mathematischer Resultate, die wir im Augenblick etwas ungenau und ohne Beweis angeben, die sich aber für unsere nachfolgende Arbeit als sehr wichtig erweisen. Die eigentlichen mathematischen Beweise erfolgen über Sätze wie den später von uns zu besprechenden Satz vom beschränkten Zuwachs.

Im Augenblick besteht unser Anliegen darin, zu verdeutlichen, daß es derartige Resultate überhaupt gibt, daß man sie im Prinzip beweisen kann, wobei die Gültigkeitsbedingungen präzisiert werden. Und zum zweiten soll nachfolgend die Anwendung dieser Resultate geübt werden. Das fällt teilweise schwer, wenn sie im schulischen Bereich nicht verwendet werden durften.

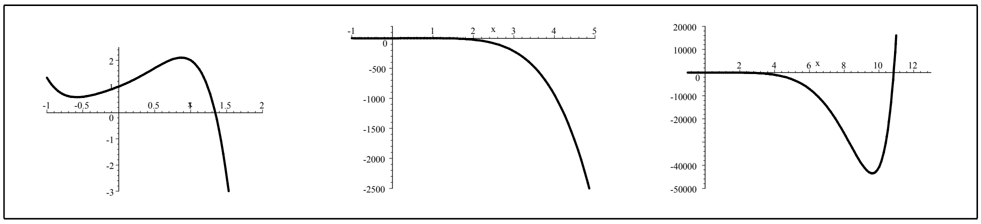
(8.1.13) Drei nützliche Eigenschaften des Verhaltens glatter Funktionen:

- **Zwischenwerte**: Eine glatte (genauer: im Intervall stetige) Funktion nimmt alle Zwischenwerte an. Ist insbesondere die Funktion an einem Ende des Intervalles positiv, am anderen dagegen negativ, dann liegt mindestens eine Nullstelle dazwischen. (Beispiel: Polynome ungerader Ordnung.)
- **Extremwerte**: Eine glatte (genauer: im Intervall stetig differenzierbare) Funktion hat im Zwischenbereich mindestens ein Maximum, wenn sie am Anfang des Intervalles positive, am Ende negative Steigung hat. Entsprechends gilt für ein Minimum. (Beispiel: $\sin(0)=\sin(\pi) = 0$ und $\sin x \approx x$ bei $x=0$).
- **Wendepunkte:** Ist eine glatte (genauer: im Intervall zweimal stetig differenzierbare) Funktion zu Beginn des Intervalles konkav, am Ende dagegen konvex, so liegt mindestens ein Wendepunkt dazwischen. (Beispiel: Arcustangens ....Oder Sinus im Bereich $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

Alle drei Aussagen sind von der Art: "Es gibt mindestens ein....". Aber natürlich können es auch mehr Objekte des jeweiligen Typs sein. In der Regel arbeitet man dann mit der folgenden Hypothese weiter:

- **Die Anzahlhypothese**: Über die Anzahl der interessierenden Zwischenpunkte wird man mit der Hypothese der "kleinstmöglichen Zahl" beginnen und versuchen, diese über den speziellen Rechenausdruck zu rechtfertigen. Ist das nicht möglich, wird man u.U. mehrere Alternativen diskutieren und man wird gezielt nach Information suchen, die eine Entscheidung ermöglicht.

(8.1.14) Beispiel: Wir betrachten $f(x) = 3^x - x^5$. Dieser Rechenausdruck ist für alle x definiert und im Bereich jedenfalls glatt. Wir finden f(0)=1 , f(1)=2 und $f(2) = 3^2 - 2^5 = -23$. Zwischen 1 und 2 muß eine Nullstelle liegen. Für große x erhalten wir wieder positive Werte, wie wir später genauer begründen werden. Etwa f(11)=3^{11}-11^5=16096. Also muß es zwischen 2 und 11 eine zweite Nullstelle und ein Minimum geben. Die Figuren verdeutlichen das. Und hier liegt auch die jeweils kleinstmögliche Anzahl erforderlicher Stellen vor.



Die ersten beiden Ausschnitte des Funktionsgraphen legen nahe, daß der Graph immer weiter fällt. Aber unsere Vorüberlegungen sagen, daß das nicht der Fall sein kann. Der dritte Auschnitt zeigt die vorhergesagten Strukturen in Form des Minimums und der weiteren Nullstelle. Beachten Sie unbedingt die Maßstäbe der Achsen! Besonders für Anwendungen geben die Maßstäbe eine wesentliche Information. In unserem Fall ist im mittleren Bild infolge des anderen Maßstabes der y-Achse die im ersten Bild vorhandene interessante Struktur bei x=0 nicht mehr zu erkennen. Die Anzahlhypothese ist hier erfüllt. Es gibt nur ein Minimum.
(8.1.15) Beachten sie aber unsere Bedingung, daß f(x) im gesamten Intervall glatt sein soll. Für f(x)=$\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ ist zwar f(-2)=-1 negativ und f(2)=1 positiv, aber eine Nullstelle liegt nicht dazwischen. f ist für den Zwischenpunkt x=0 nicht definiert und somit auch nicht im gesamten Zwischenbereich glatt.

8.2 Die Grundausstattung an reellen Funktionen

Wir beginnen mit der Diskussion einer Reihe von Funktionen, die wir suggestiv als "Grundausstattung (an Funktionen)" bezeichnen wollen. Das soll auf zweierlei hinweisen: Einmal werden wir zeigen, dass die uns üblicherweise interessierenden Funktionen dadurch entstehen, dass man gewisse Standardverfahren auf sie anwendet. Sie sind also so etwas wie die Grundbausteine der Funktionen. Und zum zweiten sind sie Ausgangspunkt für das Verständnis auch komplizierter Funktionen und sollten entsprechend besonders gut geistig beherrscht werden. Was den zweiten Punkt anbelangt, so könnte man noch einige weitere Funktionen in diese Gruppe mit hineinehmen, die wir in Kap. 8.3 behandeln werden.

(8.2.1) Die Grundausstattung soll die folgenden Funktionen enthalten:

1. die homogenen Polynome $x \mapsto x^n$ für n=0,1,2,...
2. die beiden trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus
3. die Exponentialfunktion.

(8.2.2) Diese drei Funktionstypen sind nicht nur aus praktischen Gründen bedeutsam (weil aus ihnen die uns interessierenden Funktionen aufgebaut werden können), sondern ihre Auswahl hat auch eine tiefere Bedeutung. In gewisser Weise repräsentieren sie die Struktur unserer physíkalischen Welt:

♦ Die Polynome sind besonders leicht berechenbar. Über sie erfolgt in der Regel die rechnerische Quantifizierung von Sachverhalten. Wann immer man einen Zahlwert explizit berechnen will, ist es eine gute Strategie, zu versuchen, das Problem auf die Berechnung eines Polynoms zurückzuführen. Die Zahlbeschreibung von Phänomenen ist aber zentral für die Physik. Vgl. Kap.2.

♦ Die trigonometrischen Funktionen stehen für die geometrische Struktur unseres Konfigurationsraumes. Ihr Auftreten spiegelt Vorkommen und Erfassung geometrischer Sachverhalte wieder. (Vgl. Kapitel 6)

♦ Die Exponentialfunktion schließlich beschreibt einen grundlegenden *Entwicklungsprozess,* der Folge eines *Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs* ist. Da das Auffinden von Kausalbeziehungen und deren Konsequenzen ein Hauptanliegen von Naturwissenschaft ist, wird verständlich, wieso die Exponentialfunktion in der Grundausstattung auftaucht.

8.2.1 **Die homogenen Polynome**

(8.2.3) Ein erster Satz wichtiger Funktionen wird von den *homogenen Polynomen* gebildet, die aus der Zuordnung $x \mapsto x^n$ hervorgehen. Dabei handelt es sich um die folgenden Abbildungstripel

$$\boxed{h_n = (\mathbb{R}, x \mapsto h_n(x) = x^n, \mathbb{R}) \quad \text{mit n=0,1,2,...}}$$

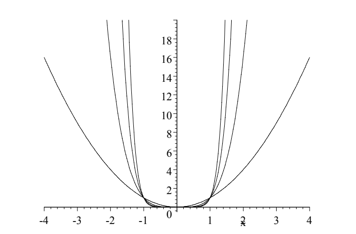
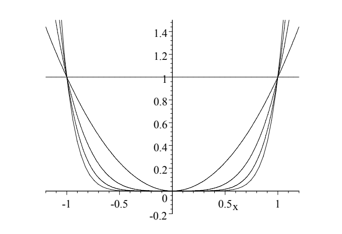
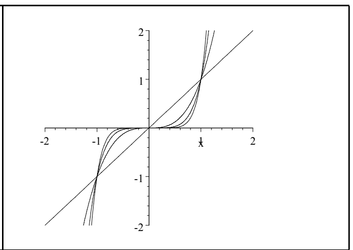
Zum Term x^n gibt es üblicherweise keinen speziellen Funktionsnamen, weshalb wir die Bezeichnung h_n einführen. h steht dabei für *homogen.* Es gilt ja $h_n(\alpha x) = \alpha^n h_n(x)$. Eine derartige Eigenschaft bezeichnet man als *Homogenität.*
Der Index n durchläuft zunächst die natürlichen Zahlen. Wir werden die Bezeichnung später stillschweigend ausdehnen und entsprechend etwa $h_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ oder $h_{-1}(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ schreiben. Dabei ist dann u.U. $x \geq 0$ zu wählen.
(8.2.4) Die Fälle n=0, 1 und 2 sind besonders geläufig. Für n=0 ergibt sich $x \mapsto x^0 = 1$. Also eine **konstante Funktion**. Für n=1 hat man die **identische Funktion** $x \mapsto x$ und für n=2 die **Normalparabel** $x \mapsto x^2$.
(8.2.5) Für alle n>0 gilt $h_n(0) = 0$ und $h_n(1) = 1$ sowie $h_n(-1) = (-1)^n$. Weitere Details des Verhaltens entnimmt man den Graphen.
(8.2.6) Alle h_n haben bestimmte **Symmetrieeigenschaften**, wie man unmittelbar an den Graphen erkennt: Ist n gerade, so ist der Graph symmetrisch zur y-Achse. Ist n ungerade, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.
(8.2.7) Was bedeutet das für die Terme? Nun, bei einer geraden Funktion ist der Funktionswert bei +x ebenso groß wie an der Stelle -x. Also $f(x) = f(-x)$. Bei einem zum Ursprung punktsymmetrischen Graphen muss entsprechend $f(-x) = -f(x)$ gelten.
Man abstrahiert:

T	Eine relle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle x∈ ℝ gilt: $f(-x) = f(x)$.
T	Eine relle Funktion f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für
	alle x∈ ℝ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

(8.2.8) Inspektion auf Symmetrie: Häufig ist zu untersuchen, ob eine durch einen Rechenausdruck f(x) gegebene Funktion gerade oder ungerade ist. Das versucht man zunächst wie folgt zu klären: Man ersetzt im Rechenausdruck in Gedanken überall x durch -x und inspiziert, was dann mit dem Wert geschieht. Ändert er sich nicht, ist die Funktion laut Definition gerade. Erhält man insgesamt ein Vorzeichen, dann ist sie ungerade. Usw. Die Mehrzahl der Funktionen ist weder gerade noch ungerade. Natürlich ist dieses Vorgehen eine einfache Konsequenz der gegebenen mathematischen Definition. Einige Beispiele:

f(x)=x^4 ??	$(-x)^4$	=x^4	also **gerade**
$x(x^2 + 2x^4)$??	$(-x)((-x)^2 + 2(-x)^4)$	$= -x(x^2 + 2x^4)$	also **ungerade**
$x(x^2 + 2x^5)$??	$(-x)((-x)^2 + 2(-x)^5)$	$= -x(x^2 - 2x^5)$	weder noch!

(8.2.9) Damit folgt sofort: **Für gerades n ist h_n gerade und für ungerades n ist h_n ungerade.** Das formalisiert man gerne wie folgt: h_{2n} ist für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade. h_{2n+1}dagegen ist für jedes n ungerade. (Durch diese Art der Indizierung vermeidet man die Einführung spezieller Bezeichnungen für die Teilmengen der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen.)

		
x$\mapsto$ x^n für n=2,4,6,8. Es gilt $h_{2n}(x) = h_{2n}(-x)$	Das typische Aussehen der Funktionen x$\mapsto$ x^{2n}.	n=3,5,7 $h_{2n+1}(-x) = -h_{2n+1}(x)$

(8.2.10) Die Graphen zeigen gewisse Gemeinsamkeiten des Verhaltens: Zunächst gehen alle Graphen durch den Punkt (1,1). Die zu geradem n auch durch (-1,1) und die zu ungeradem durch (-1,-1).
(8.2.11) Für n>0 wachsen die Funktionswerte mit x stets an, die Funktionen sind *monoton.* Im positiven Bereich nach plus unendlich ($+\infty$). Im negativen Bereich unterscheiden sich die geraden Funktionen dagegen von den ungeraden. Letztere gehen nach minus unendlich ($-\infty$). Das Wachstum erfolgt unterschiedlich schnell. Je größer n wird, desto stärker ist das Wachstum.

☐ Formalisieren Sie "monoton wachsend"

? **(8.2.12)** Wie kann man eine qualitative Eigenschaft wie *der Graph geht nach unendlich* im Sinne von Kap.2 präzisieren und quantifizieren? Die beim Wachstumsproblem benutzte Methode sieht so aus: **Man verwendet das Wachstum der homogenen Polynome (für große x) als Referenz**, als Vergleich. Zunächst sagt man etwa "x^4 wächst schneller als x^3" usw. Und dann allgemein: *die Funktion x$\mapsto$ f(x) wächst ebenso schnell wie $x \mapsto x^n$* oder auch *stärker als $x \mapsto x^n$*. Wenn möglich, sucht man ein n, für das man sagen kann: "f(x) wächst ebenso schnell an wie x^n." D.h. man verwendet die Folge der homogenen Polynome als eine Art Vergleichssystem, in das man das Wachstum neuer Funktionen einzuordnen versucht.

☐ Machen sie sich kundig, wie man in der Physik und Mineralogie die Härte von Materialien quantifiziert. (Stichwort "Mohshärteskala".)

(8.2.13) Stellt man sich die Graphen als Weg-Zeit-Diagramme von Bewegungsvorgängen (auf einer Koordinatenachse) vor, dann besagt *f geht schneller nach unendlich als g (für t nach unendlich)*, dass das zu f gehörige Fahrzeug **irgendwann das zu g gehörige Fahrzeug auf Dauer überholt.** Zu welchem Zeitpunkt das geschieht, liegt nicht fest. Darüber besitzt man keine Kontrolle. Eben *irgendwann.*

☐ Wieso darf man in der soeben gegebenen Formulierung weder *irgendwann* noch *auf Dauer* fortlassen. Formulieren oder skizzieren Sie je ein Gegenbeispiel.

(8.2.14) Bemerkenswert ist, dass es weder ein schnellstes noch ein langsamstes Wachstum gibt! Die Welt des Wachstums von Funktionen ist in einem ganz extremen Sinne *grenzenlos.* So wird sich zeigen, dass die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ schneller als jede Potenzfunktion wächst. (Man muss nur x ausreichend groß wählen.) Und die Logarithmusfunktion wächst wieder langsamer als jede Potenz $x \mapsto x^a$.Dabei darf a>1 beliebig gewählt werden. Für kleine a findet dann allerdings das Überholen sehr spät statt. Und wieder andere Funktionen wachsen schneller als die Exponentialfunktion. Usw.
(8.2.15) Das zur anschaulichen Seite. **Rechnerisch** geht man meist so vor, dass man den Quotienten der beiden zu vergleichenden Funktionsterme bildet, also $\frac{f(x)}{g(x)}$ und das Verhalten dieses Quotienten mit x verfolgt. So geht $\frac{a^x}{x^n}$ für jede Wahl von n nach unendlich, wogegen $\frac{x^n}{a^x}$ nach Null geht. Der Quotient $\frac{3x^2-5x+1}{x^2}$ geht gegen den Wert 3 und man sagt, $x \mapsto 3x^2 - 5x + 1$ wächst (aymptotisch) ebenso an wie x^2. Den zusätzlichen Faktor 3 beachtet man bei der ersten Grobeinordnung (über den Quotienten) nicht.
(8.2.16) Die homogenen Polynome weisen eine weitere Gemeinsamkeit auf. Sie haben (für n>0) alle eine Nullstelle bei x=0. Und auch diese Nullstellen sind irgendwie nicht alle "gleich". Man möchte auch hier so etwas wie eine Quantifizierung der Vorstellung von der *Stärke einer Nullstelle* entwickeln, also davon, wie rasch sich die Funktionswerte jeweils der Null nähern. Und erneut geht man so vor, dass man die Nullstellen der vertrauten homogenen Polynome als Referenzsystem wählt. Jede der Funktionen $x \mapsto x^n$ mit n>0 hat eine ganz bestimmte Art, sich der Null zu nähern (für $x \to 0$). Findet man jetzt für eine andere Funktion f eine Nullstelle, so vergleicht man und sagt, die Nullstelle von f sei von demselben Typ wie die von h_3 oder man sagt, f(x) gehe schneller nach Null als $x \mapsto x$ usw. Vgl. auch (8.3.34).

☐ Übersetzen Sie die Aussage "f hat bei x=0 eine stärkere Nullstelle als h_3" in die übliche Formelsprache. Und was bedeutet "f(x) hat bei x=0 eine ebenso starke Nullstelle wie y=x? "

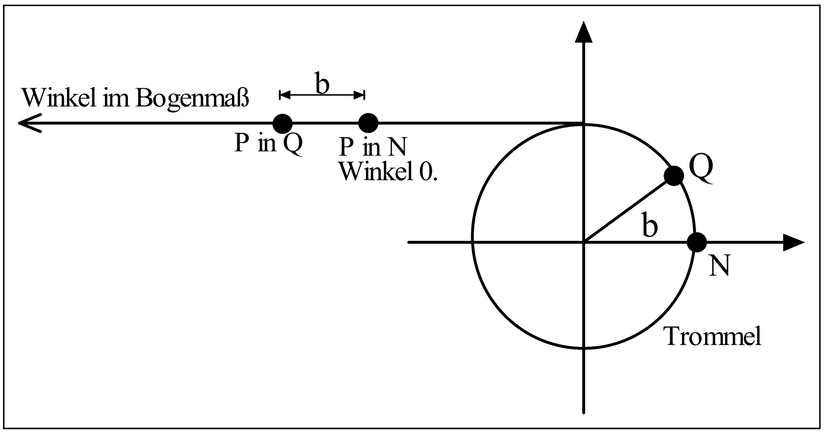
☐ Wie geht man vor, wenn die betrachtete Nullstelle von f nicht bei x=0, sondern bei x=x_0 liegt?
☐ Vergleichen Sie mit Hilfe eines Computeralgebraprogrammes das Nullstellenverhalten von $x \mapsto x^n$ für unterschiedliche Werte von n miteinander. Wählen Sie dazu einen immer kleineren Ausschnitt der Koordinatenebene um x=0. Was geschieht dabei mit dem Verhältnis von Höhe zu Breite des gewählten Ausschnittes?

8.2.2 Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus

(8.2.17) Diese beiden Grundfunktionen repräsentieren die geometrische Struktur unseres Konfigurationsraumes. (Kap.2.1). Wie führen sie wie folgt ein:

- – In der Koordinatenebene betrachten wir einen Punkt P, der auf dem Einheitskreis umläuft.
  – Wir parametrisieren diesen Punkt mit Hilfe des zugehörigen Bogenmaßes. (= der Bogenlänge zwischen dem Einheitspunkt auf der positiven 1-Achse und dem Punkt P. Der positiver Winkel zeigt von der 1-Achse zur 2-Achse. (2.2.6) und (6.2.5)).
  – Bei mehrfachem Umlauf soll sich der Winkel stetig (über 2π) hinaus fortsetzen.

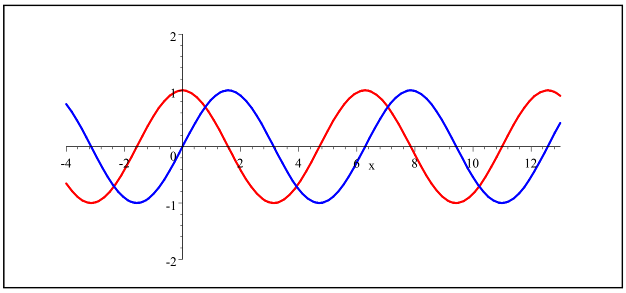
(8.2.18) Jeder Punkt des Einheitskreises wird daher nicht nur durch einen einzigen Winkelwert parametrisiert, sondern durch unendlich viele. Sie unterscheiden sich alle um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π voneinander. Diesen Sachverhalt kennen wir bereits von der Polardarstellung der komplexen Zahlen. (6.3.41).
(8.2.19) Das Ganze läßt sich leicht mit Hilfe des folgenden Modelles verstehen und zusammenfassen: Man stelle sich ein Seil vor, das um eine Trommel (den Einheitskreis) gewickelt ist und dessen freies Endes horizontal auf einer Achse bewegt wird, wobei sich der Trommelpunkt P entsprechend mitbewegt. **Die Änderung des Bogenmaßes, also des Winkels, ist gleich der Koordinatenänderung des freien Seilendes.**



(8.2.20) Wir haben die Zuordnung $(\mathbb{R}, \varphi \mapsto P(\varphi), E^2)$. Gehen wir zu den Pfeilen über, wird daraus $(\mathbb{R}, \mapsto \vec{e}(\varphi), V_0^2)$. Und in Koordinaten schließlich:

$$\boxed{(\mathbb{R}, \mapsto \vec{e}^K(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)), \mathbb{R}_K^2).}$$

Das ist unsere **Definition** der beiden trigonometrischen Funktionen (als Argument eines beliebigen reellen Winkelwertes). Der Winkelwert φ bestimmt den Punkt P. Und dessen Koordinaten sind definitinionsgemäß $\cos(\varphi)$=(1-Komponente) und $\sin(\varphi)$=(2-Komponente) des Einheitsvektors zum Winkel φ. Diesen Sachverhalt haben wir früher bereits mehrfach benutzt.
(8.2.21) Für $0 \leq \varphi \leq \pi$ stimmt diese Definition offensichtlich mit mit der früher in (6.1.35) über das Skalarprodukt gegebenen Definition von $\cos\varphi$ überein.
(8.2.22) Die jetzige Definition liefert auch sofort die Form der Graphen der beiden Funktionen, die genauer wie folgt aussehen :



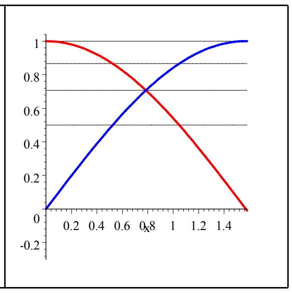
Beachten Sie: $2\pi \approx 6.28$ und $\frac{\pi}{2} \approx 1.58$.

(8.2.23) Die Figur zeigt: sin ist ungerade, also $sin(-x) = -sin(x)$. Dagegen ist cos gerade, also $\cos(-x) = -\cos(x)$. Geht man um 2π weiter, so wiederholen sich die Funktionswerte, d.h. es gilt etwa $sin(x + 2\pi) = sin(x)$. Man sagt, sin sei *periodisch* mit Periode T=2π. Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit (Änderung der Bogenlänge/Änderung von x) ist $\omega = 1$. Schließlich sieht man, dass die Graphen von sin und cos durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Man verifiziert über die Figur $cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$.

☐ Verifizieren Sie alle diese Eigenschaften mit Hilfe der allgemeinen Definition der beiden Funktionen.

(8.2.24) Einige wichtige Werte der beiden Funktionen sollte man auswendig wissen. Man leitet sie über elementare Dreiecksbetrachtungen her. Im nachfolgenden Schema sind sie in einer Weise angeordnet, die leichtes Merken ermöglicht. In der Figur sind die Werte als horizontale Linien mit eingezeichnet. Dabei läuft x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2} \approx 1.58$.

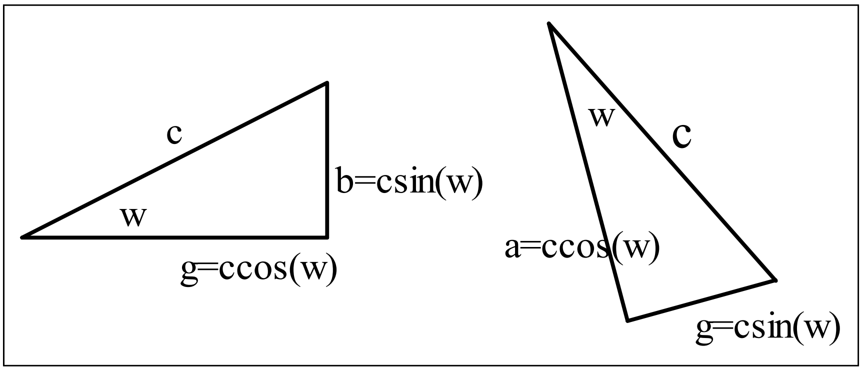
Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0^0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	0
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	∞



Weitere Werte folgen leicht mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften, also durch Inspektion des Graphen. Es genügt ja, die Werte der beiden Funktionen im Bereich $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ zu kennen, um daraus alle übrigen Werte abzuleiten. So ist offensichtlich, dass $sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$gilt.

☐ Welche dieser Werte beherrscht Ihr Computeralgebraprogramm? Welche weiteren?

(8.2.25) Mit Hilfe von Sinus und Cosinus lassen sich wichtige Beziehungen für **rechtwinklige Dreiecke** aufstellen. Das Definitionsdreieck im Einheitskreis muss nur entsprechend hochskaliert werden. Zusätzlich ist zu beachten, dass diese Dreiecke i.a. eine andere Lage haben werden, so dass man immer vom Winkel ausgehen sollte. Die am Winkel anliegende Kathete ist die Ankathete, die gegenüberliegende die Gegenkathete. Im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt haben wir die Formel für die Ankathete benutzt.



(8.2.26) Der Pythagoras schreibt sich mit Hilfe der beiden Funktionen wie folgt:

$$\boxed{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1.}$$

☐ Beweisen Sie den "Sinussatz" für ein allgemeines Dreieck, indem Sie im Dreieck ein Lot (von einem Eckpunkt auf eine gegenüberliegende) Seite fällen und die Lotlänge auf zwei Weisen ausrechnen.

(8.2.27) Beachten Sie, dass man meist $\sin^2(x)$ anstelle von $(\sin(\mathrm{x}))^2 = (\sin x)(\sin x)$ schreibt. Ebenso schreibt man vielfach sinx anstelle sin(x). Man muss sich nur vorsehen, über die Klammerersparnis nicht irgendwelche Zweideutigkeiten des Termes zu produzieren. So sollte man mit *sinab* vorsichtig sein. Was ist gemeint? sin(ab) oder sin(a)b=bsin(a)? Als Konsequenz derartiger Schreibweisen bzw. der Unkenntnis der Bedeutung einer von-Klammer begegnet man nicht selten absurden Rechnungen wie $\mathrm{T}\sin\frac{t}{T} = \sin t$. Da hier natürlich $\sin\left(\frac{t}{T}\right)$gemeint ist, ist die Rechnung Unfug. (Vgl. das in (7.1.7) zu A$\vec{x}$ Gesagte!)

Die Additionstheoreme

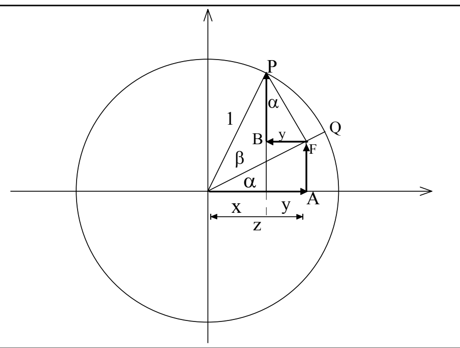
(8.2.28) Linearität und Distributivität gelten keineswegs automatisch. Bei Sinus und Cosinus etwa darf die zugehörige von-Klammer nicht ausmultipliziert werden. Zwar findet man immer wieder abenteuerliche Rechnungen wie $2\sin(x) = \sin(2x)$. Aber das ist unzulässig. Ebenso sin(x+y)=sinx+siny. Damit hätte man beispielsweise sofort

$$0 = sin\pi = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2.$$

Oder abstrahiert: **Das Distributivgesetz gilt keineswegs immer automatisch, sondern muss von Fall zu Fall begründet werden.**

(8.2.29) Im Fall der trigonometrischen Formeln gelten anstelle der Linearität die überaus wichtigen Additionstheoreme, die wir jetzt herleiten wollen.

(8.2.30) Zur Herleitung bewegen wir uns in der Figur auf dem angedeuteten achsenparallelen Weg vom Ursprung 0 über A, F und B nach P. Der Punkt P hat den Ortsvektor $\vec{e}(\alpha+\beta)$. Die Strecke 0F hat die Länge cosβ. Hieraus ergibt sich die Länge z von 0A zu cos$\beta\cos\alpha$. Der Winkel zwischen BP und FP ist erneut α. Usw.



Beweis der Additionstheoreme mit Hilfe der Vektorrechnung. Gehe achsenparallel von 0 nach P.

Mit Hilfe der Formeln für das rechtwinklige Dreieck ergibt sich so insgesamt:

$$\vec{e}(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\vec{e}_1 + \vec{e}_2\sin(\alpha)\cos(\beta) - \vec{e}_1\sin(\alpha)\sin(\beta) + \vec{e}_2\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

(8.2.31) Durch Skalarproduktbildung oder Komponentenvergleich folgen jetzt die gewünschten beiden Additionstheoreme, die wir ja bereits gut von den komplexen Zahlen her kennen (vgl (6.3.33)):

Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$

(8.2.32) Mit Hilfe der Additionstheoreme lasssen sich auf meist sehr einfache Weise zahlreiche weitere Formeln aus dem Bereich der trigonometrischen Formeln herleiten. Typischerweise sollte man die Theoreme und die jeweilige weiterführend Idee wissen. Dazu noch eine Eselsbrücke: Differenzieren Sie das Theorem für den Sinus nach α.Was folgt? Also genügt es, sich eine einzige Formel zu merken.

☐ Ersetzen Sie β durch $-\beta$. Was folgt?

☐ Setzen Sie $\beta = \alpha$.Was folgt?

Im Fall von cos erhält man für $\beta = \alpha$ die Formeln

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Die letzten beiden Umformungen folgen mit dem Pythagoras. Und für sin folgt eine von uns bereits häufig benutzte nützliche Formel:

$$\boxed{\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).}$$

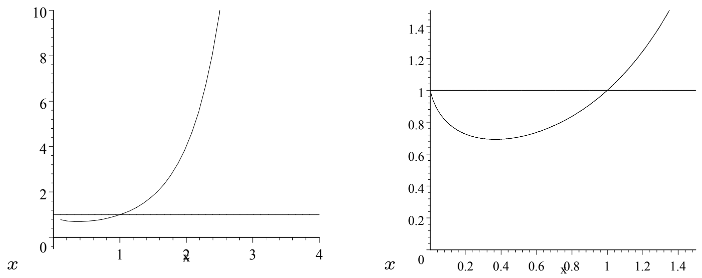
☐ Lösen Sei die Gleichung für $\cos(2\alpha)$ einmal nach $\cos\alpha$, einmal nach $\sin\alpha$ auf.

☐ Wie groß ist der Abstand zweier einander gegenüber liegender Eckpunkte eines Quaders mit Kantenlängen a,b,c?

8.2.3 Die Exponentialfunktion

(8.2.33) Aus dem allgemeinen Potenzterm a^b lassen sich je nach Rollenzuweisung eine Reihe von Zuordnungen bilden. Wählt man b als äußeren Parameter, so ergibt sich $x \mapsto x^b$. Für $b \in \mathbb{N}$ sind das gerade die homogenen Polynome. Allgemein werden wir die so entstehenden Funktionen mit h_b bezeichnen. Beachten Sie, dass viele Eigenschaften dieser Funktionen - so das Verhalten am Ursprung oder das Wachstum nach Unendlich - monoton vom Wert des äußeren Parameters b abhängen. Das Verhalten von h_b liegt für $x > 0$ jeweils zwischen dem von h_m und h_n,wenn m die größte ganze Zahl unterhalb und n die kleinste ganze Zahl oberhalb von b ist.

(8.2.34) Eine weitere naheliegende Funktion ist $x \mapsto x^x$. Der Graph hat die folgende Gestalt, wobei $x \geq 0$ zu wählen ist:

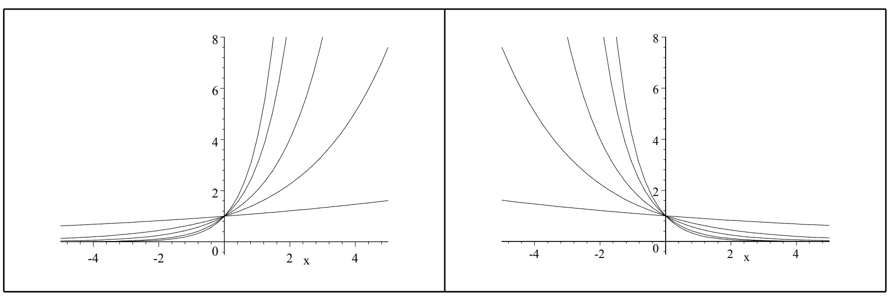


Das Wachstum dieser Funktion ist stark, jedenfalls stärker als das der Exponentialfunktion, die wieder stärker als alle Potenzen wächst. Das Minimum liegt bei $e^{-1} \approx 0.37$.Die Steigung bei 0 ist $-\infty$,was man auf dem Bild nicht erkennt. Wir werden auf diese Funktion und ihre Behandlung noch kurz zurückkommen.

(8.2.35) Die eigentlich interessanten Zuordnungen entstehen, wenn man a zum äußeren Parameter macht. Das ergibt Zuordnungen wie $x \mapsto a^x$ oder speziell $x \mapsto 2^x$. Die zugehörigen Funktion wollen wir $E_a$nennen. *Exponentialfunktion zur Basis a.* Dabei soll a eine reelle Zahl >0 sein. Beachten Sie, dass $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ gilt, also $E_a(-x) = E_{\frac{1}{a}}(x)$.

☐ Schreiben Sie folgende Gleichungen entsprechend als Beziehung zwischen Werten der Exponentialfunktion: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ sowie $a^0 = 1$ und $(a^x)^n = a^{nx}$.

(8.2.36) Die Graphen dieser Funktionsschar haben für a=1.1, 1.5, 2, 3 und 4 die nachfolgende Form. Im rechten Bild sind die Graphen von $E_a(-x) = E_{\frac{1}{a}}(x)$ für dieselben a-Werte dargestellt:



Der Graph von $E_{1.1}$ macht einen recht flachen Eindruck. Trotzdem wächst er für ausreichend großes x stark an.

(8.2.37) Ja wir haben als Regel:

> **Für jedes a>1 überholt der Graph von E_a irgendwann den Graphen von h_n für jedes n!**

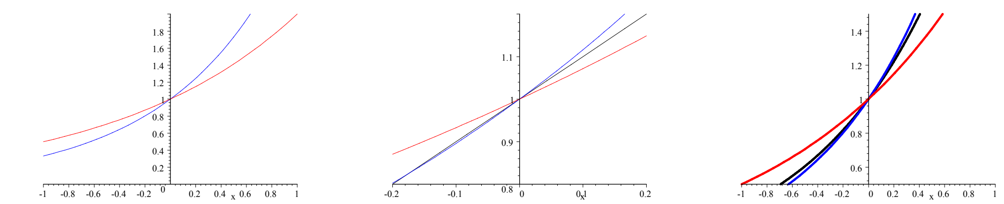
(8.2.38) Nehmen wir $E_{1.1}$ und h_{100}. Wir können die Schnittbedingung $h_{100}(x) = E_{1.1}(x)$ aufstellen. Also $x^{100} = e^{1.1x}$. Die hat tatsächlich eine Lösung für große x. Zwar kann man sie nicht exakt angeben, aber ein Computeralgebraprogramm liefert $x_s \approx 578$. Der gemeinsame Funktionswert ist schon recht groß, $578^{100} = 1.6 \times 10^{276}$. Für größere x ist die Exponentialfunktion dann immer größer als die Potenz. **Diesen Sachverhalt werden wir später exakt beweisen.**
(8.2.39) Genauer gesagt gelten eine Vielzahl derartiger Beziehungen, von denen die Tabelle einige anführt:

Der Term:	$x^{-N}a^x$	$x^N a^{-x}$	$x^N a^x$	$x^{-N}a^{-x}$
für x nach:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
geht gegen:	∞	0	0	∞

In all diesen Ausdrücken hat man zwei miteinander streitende numerische Faktoren. Einer wird groß und einer nähert sich Null. Wer gewinnt bei der Produktbildung? Die zu merkende und für alle solche Fälle zu nutzende Regel lautet:

Eine Exponentialfunktion gewinnt gegen eine Potenz immer!

☐ Was geschieht mit $10^x - x^N$ für x nach unendlich? Schreibe dazu $10^x - x^N = 10^x(1 - x^N 10^{-x})$ und nutze die Tabelle! Wie ist zu argumentieren?
(8.2.40) Später werden wir auch sehen, dass man aus der ganzen Schar von Funktionen E_a nur eine einzige braucht. Die übrigen lassen sich auf einfache Weise darauf zurückführen. Inspiziert man die Graphen (mit diesem Gedanken in der Hinterhand), dann stellt sich die Frage: Kann man eine einfaches charakteristisches Merkmal angeben, das die einzelnen Graphen auseinanderhält, so wie es a rechnerisch tut? Die erste Idee ist, es mit a selbst zu versuchen. Tatsächlich hat man $E_a(1) = a^1 = a$. D.h. a gibt den Schnitt des Graphen mit der Geraden x=1 und dieser wächst mit a.
(8.2.41) Besser ist jedoch folgendes Vorgehen: Alle Graphen gehen durch den Punkt (0,1). Und zwar mit einer Steigung (der zugehörigen Tangente), die monoton mit a wächst. Für a=2 ergibt sich noch eine Steigung unter 1, für a=3 ist die Steigung bereits größer als 1. **Dazwischen gibt es einen a-Wert, für den die Tangentensteigung genau 1 ist!** Diesen a-Wert bezeichnet man als *Eulersche Zahl e*. Es gilt $e = 2.7183...$. Diese Zahl e ist nicht rational, also kein Quotient aus zwei ganzen Zahlen. Die Figur verdeutlicht die beschriebenen Verhältnisse. Für E_3 ist in der gewählten Auflösung kaum zu erkennen, dass 1 nicht die korrekte Tangentensteigung ist.



$x \mapsto 2^x$ und $x \mapsto 3^x$ dazu die Gerade 1+x dazu $x \mapsto e^x$

(8.2.42) Merke: Für a=e ist die Ursprungssteigung der Funktion E_e gleich 1. Diese Funktion hat besondere Bedeutung und wird *die Exponentialfunktion* genannt und mit exp bezeichnet. Also:

$$\boxed{\exp = (\mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = e^x = E_e(x), \mathbb{R}) \qquad \text{für e=2.7183...}}$$

Man kann zeigen, dass das in der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ auftretende e gleich der Eulerschen Zahl ist.

8.3 Die rekursive Konstruktion neuer Funktionen

Wir besprechen jetzt eine Reihe von Verfahren, die alle von der folgenden Art sind:

- Ein oder zwei Funktionen seien vorgegeben oder bekannt. Man wendet eines der zu besprechenden Verfahren darauf an und erhält als Resultat eine neue Funktion.
- Ein wichtiges Anliegen wird sein, parallel zu der Konstruktion aus den Eigenschaften der Eingabefunktionen auf die Eigenschaften der Ausgabefunktion zu schließen.

Im Rahmen der Anwendungen wird meist eine Art Umkehrung dieses Prozesses benutzt:

- Man interessiert sich für die Eigenschaften einer gegebenen Funktion. Man stellt fest, dass man diese Funktion mit Hilfe eines der einzuführenden Verfahren aus anderen Funktionen aufbauen kann, deren Eigenschaften einem bereits geläufig oder leichter zu gewinnen sind. Dann erlauben die Methoden die Bestimmung der gewünschten Eigenschaften der vorgegebenen Funktion.

  Auf diese Weise werden wir speziell nützliche qualititative Eigenschaften der Graphen gewinnen und auch die Ableitung der Ausgangsfunktion.

Zusätzlich erhalten wir folgende nützliche Begriffsbildung:

- Wendet man die zu entwickelnden Verfahren auf die Funktionen der Grundausstattung und dann erneut auf so bereits erhaltene Funktionen, dann entsteht eine sehr große, nicht mehr aufzählbare Menge von Funktionen, die wir die "elementar konstruierbaren Funktionen" nennen wollen.

  Die überwiegende Mehrzahl an Funktionen, die einem in den üblichen Formelanwendungen begegnen, sind elementar konstruierbar. Mit Hilfe der Integration trifft man noch auf weitere nicht mehr elementar konstruierbare Funktionen. Das vorhgehen ist rekursiv, weil man das jeweils Neue nicht "ganz von vorn", sondern aus Vorgängern aufbaut. Vgl. (1.3.8).

(8.3.1) Wir möchten besonders auf den wichtigen zweiten Punkt hinweisen: Man sollte bei der Arbeit mit Funktionen in der Lage sein, sich deren Verhalten rasch und mit möglichst wenig Aufwand zugänglich zu machen und man sollte bestimmte Verhaltenseigenschaften auf "Ursachen" im Rechenausdruck zurückführen können. Die Funktionen sollen ja benutzt werden, um bestimmte Naturphänomene zu erfassen, diese "zu modellieren" und eben dazu benötigt man Verständnis der Eigenschaften. Überdies werden die jetzt behandelten Konstruktionen später in der Mathematik viel allgemeiner eingesetzt. Man erhält so ein Vorverständnis und Einübung in diese allgemeineren und meist als abstrakt und schwer zugänglich geltenden Konstruktionen. Schließlich ist die benutzte Methode der Rekursion allgemein von großer Bedeutung. Kurz: **Die nachfolgenden Ausführungen sind von zentraler Bedeutung für unser Hauptziel, den "verständnisvollen Umgang mit Formeln und Funktionen".**

8.3.1 Die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl

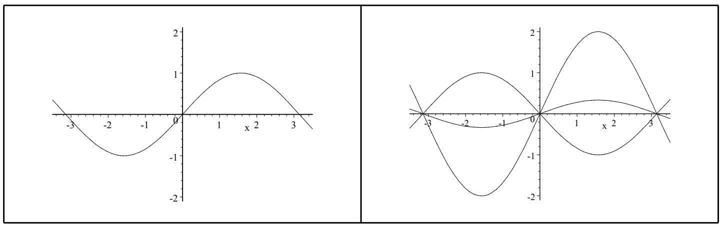
(8.3.2) Wir beginnen mit einer sehr einfachen Konstruktion, die wir etwas genauer besprechen wollen. Sie eignet sich, unser Anliegen der rekursiven Verhaltensanalyse zu konkretisieren. (Geht es darum, eine kompliziertere Struktur zu verstehen, so ist es günstig, einen relativ einfachen Fall genau zu verstehen, um davon ausgehend später Analogieschlüsse ziehen zu können.)
(8.3.3) Sei $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ eine bereits bekannte Funktion, etwa eine der Grundausstattung. Achtung: Der Wertebereich soll ganz $\mathbb{R}$ sein, nicht eine echter Teil. Notfalls muss der Wertebereich auf $\mathbb{R}$ vergrößert werden. Weiter sei α eine reelle Zahl (wie 2, -3, π oder $\frac{4}{5}$). Nun ist auch für jedes $x \in D$ der Wert f(x) eine reelle Zahl, so dass wir das übliche Produkt $\alpha f(x)$ bilden können. Das ist erneut eine reelle Zahl und wir könnene eine neue Zuordnung $x \mapsto \alpha f(x)$ bilden und zu einem Tripel ergänzen. Für x ist ganz D zulässig und der Wert $\alpha f(x)$ ist sicher erneut reell. Das Ergebnis ist die Funktion $(D, x \mapsto \alpha f(x), \mathbb{R})$. Dies Tripel wollen wir mit αf bezeichnen. Das bedeutet, dass $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ gilt. (Links die Bezeichnung, rechts ein Berechnungsterm!) Eigentlich sollte man wieder ein anderes Multiplikationssymbol verwenden, sagen wir $\circledcirc$.Dann hätten wir $((\alpha \circledcirc f)(x) = \alpha f(x)$. Denn die gewöhnliche reelle Multiplikation steht nur rechts. Aber da keine ernstliche Verwechslungsgefahr besteht, unterlassen wir diese Schreibweise.

☐ Welches Problem tritt in der Argumentation auf, wenn wir mit einem f starten, dessen Wertemenge nicht ganz $\mathbb{R}$ ist?

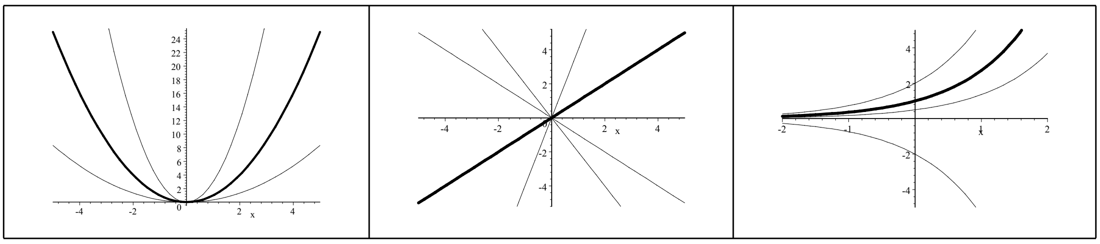
Fassen wir zusammen:

$\Rightarrow$	Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$
!!	Dann ist $\alpha f = (D, x \mapsto (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \mathbb{R})$ eine neue Funktion.
	Als Wertegleichung: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

In Worten: $\alpha \circledcirc f = \alpha f$ ist das Produkt von f mit der Zahl α.
(8.3.4.) In diesem Fall ist können wir sofort sehen, was mit dem Graphen geschieht: Die y-Werte werden einfach alle um einen Faktor α skaliert und das ergibt den neuen Graphen. In der nachfolgenden Figur steht links der Graph der Funktion f=sin und rechts daneben der von αf für $\alpha = 2$, $\alpha = -1,2$ und $\alpha = \frac{1}{3}$.



(8.3.5) Einige nützliche Beobachtungen: Alle Nullstellen bleiben erhalten. Ist $\alpha > 0$, so bleiben auch alle Vorzeichen erhalten, ist $\alpha < 0$, so wechseln die Vorzeichen, man spiegelt an der x-Achse.
(8.3.6) Weitere selbsterklärende Beispiele dieser Konstruktion:



☐ Welche Funktionen f und welche α sind in den Bildern (vermutlich) gewählt?

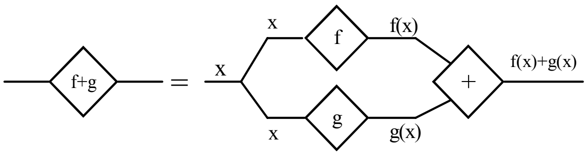
8.3.2 **Die Addition zweier Funktionen**

(8.3.7) Wir betrachten jetzt zwei reelle Funktionen f und g **mit gleichem Definitionsbereich D**. Erneut sollen die Wertebereiche gleich $\mathbb{R}$ sein. Für jedes x des gemeinsamen Definitionsbereiches verfügen wir über die beiden Werte f(x) und g(x). Das sind reelle Zahlen, die wir addieren können. Die Summe ist erneut eine reelle Zahl, so dass wir die Zuordnung $x \mapsto f(x) + g(x)$ bilden können. Zum Tripel vervollständigt gibt das eine reelle Funktion mit demselben Definitionsbereich D und Wertebereich $\mathbb{R}$.
(8.3.8) Wir können das Verfahren abstrahieren:

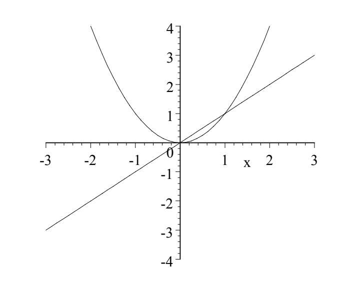
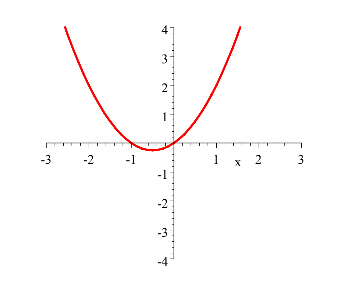
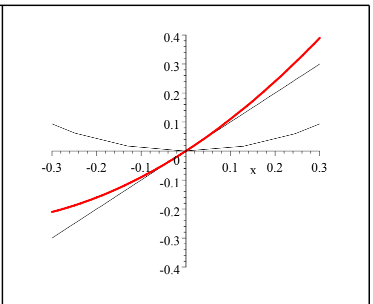
$\Rightarrow$	Gegeben $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ und $g = (D, x \mapsto g(x), \mathbb{R})$
!!	Dann ist $f + g = (D, x \mapsto f(x) + g(x), \mathbb{R})$ die neugebildete Funktion.
	Verbale Charakterisierung: Punktweise Addition (von f und g)
	Wertegleichung: (f+g)(x)=f(x)+g(x) für alle x aus D.

Beachten Sie, dass die Definitionsbereiche gleich und die Wertebereiche gleich $\mathbb{R}$ sein sollen. Das Hauptanliegen ist offensichtlich erfüllt: **Aus zwei gegebenen Funktionen wird eine neue konstruiert.** Auch hier liegen zwei verschiedene Additionen vor, so dass man $(f \boxplus g)(x)=f(x)+g(x)$ schreiben müßte. Aber wir wählen unsere Bezeichnungen bei den einzuführenden Konstruktionen möglichst so, dass sie die Verknüpfung aus $\mathbb{R}$ wiedergeben, mit deren Hilfe die Werte verknüpft werden.

(8.3.9) Es liegt nahe, die Konstruktion vom Automatenstandpunkt aus als Verlaufsdiagramm zu interpretieren (Kap.3.1.1):



(8.3.10) In den Anwendungen taucht die Konstruktion vielfach auf: Zwei (zeitabhängige) Stromstärken werden vereinigt, zwei Energiewerte addiert usw. Immer wenn eine von einem Parameter abhängige Grösse additiv bilanziert wird, ist die Konstruktion Funktionsaddition zu erwarten.
(8.3.11) Und wie steht es jetzt mit dem **Graphenverhalten**? Was lässt sich über G_{f+g} sagen, wenn man G_f und G_g kennt? Es folgt ein einfaches Beispiel, das zeigt, dass es hier immer noch um eine relativ problemlose Leistung geht:

		
Die beiden Eingabegraphen	Der neue Graph G_{x^2+x}	Dominanz von x bei x=0.

Man gehe an den interessierenden x-Wert, identifiziere die beiden y-Werte und denke sie sich geometrisch addiert. Sind beide Funktionswerte positiv, so ist das auch die Summe. Ist ein Summand Null, so ist die Summe gleich dem andern Wert usw. Für f(-2)=4 und g(-2)=-2 folgt (f+g)(-2)=2, wie die Figuren zeigen.

8.3.2a **Dominanzargumente**

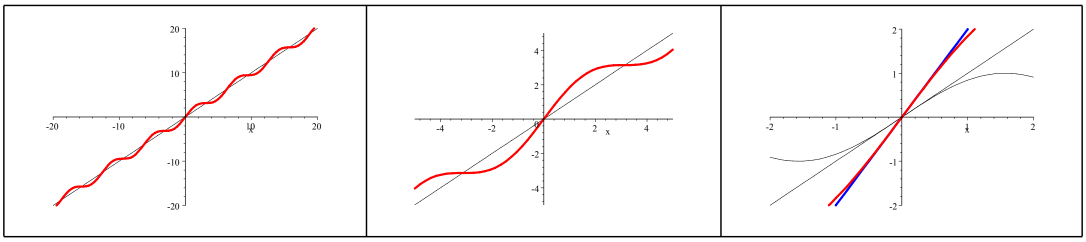
(8.3.12.) Wie steht es im Beispiel mit dem Verhalten in der Nähe von x=0? Und dem für große negative x? Nehmen wir das Verhalten bei x=0, wie es im rechten Bild dargestellt ist. Hier bei x=0 ist f(x)=x viel größer als $g(x)=x^2$. Und das heißt, dass der Graph von f+g sehr ähnlich zu dem von f ist. Wir sagen: "f dominiert bei x=0 gegenüber g". In einem solchen x-Bereich kann man zur Orientierung einfach den dominierenden Graphen übernehmen. Für ausreichend große x dominiert umgekehrt x^2. So dass wir dort die einfache Parabelform übernehmen. Damit haben wir ein wichtiges und nützliches Hilfsmittel gefunden:

- **Dominanzargumente:** Sind die Funktionswerte des interessierenden Ausdruckes F(x) in einem bestimmten x-Bereich näherungsweise gleich den Werten von f(x), wobei f(x) eine Vereinfachung von F(x) ist, dann sagen wir, dass in diesem Bereich F durch f dominiert wird! ("Vereinfachen" kann beispielsweise heißen: Teile des Rechenausdrucks fortlassen oder konstant setzen.)

(8.3.13) Bei der Verhaltensanalyse werden wir immer nach dominierenden Vereinfachungen suchen und dabei viele wichtige und nützliche Vorgehensweisen finden. Die Verhaltensanalyse wird in der Regel so aussehen:

- Gesucht ist das Verhalten von F(x).
- Bestimmen in möglichst vielen Bereichen dominierende Vereinfachungen und zeichne dort deren Graphen. Versuche dann unter Nutzung von (8.1.14) zu interpolieren.
- Was läßt sich über den Unterschied zwischen F und dem jeweils dominierenden f sagen? Versuche zugehörige Resultate noch mit einzubauen.

(8.3.14.) Beispiel: F(x)=x+sin(x). Für große x dominiert f(x)=x. Das Vorzeichen von sin legt fest, ob F nach oben oder nach unten von der Winkelhalbierenden abweicht. Für kleine x wird sinx durch x dominiert, so dass $F(x) \approx 2x$ gilt (Steigung 2!) Damit versteht man den Graphen von F(x)=x+sinx bereits weitgehend, wie die genauen Bilder zeigen:



In der rechten Figur ist neben F(x) noch die bei x=0 dominierende Funktion f(x)=2x eingezeichnet, sowie die beiden Ausgangsfunktionen x und sinx. Man sieht gut, was Dominanz besagt.

☐ Wieso hat F bei x=π horizontale Steigung, wie das mittlere Bild deutlich zeigt?

(8.3.15) Beachten Sie: Inspiziert man F(x)=x+sinx mit Hilfe der Dominanzmethoden, **dann kann man problemlos und unmittelbar eine halbquantitative Skizze des Graphen anfertigen, die weitgehend alle Züge des exakten Graphen enthält. Eine Wertetabelle oder Computerdarstellung ist nicht erforderlich. Überdies läßt sich auf diese Weise vielfach eine Frage nach der Ursache bestimmter Merkmale des Graphen beantworten**. Im Beispiel? Wieso ist die Steigung von F(x) bei Null gleich 2 und bei π gleich Null? Das ist ein wichtiger Schritt im Sinne unserer Fragestellung (8.3.1).

☐ Fertigen Sie mit Hilfe von Dominanzargumenten rasch eine halbquantitative Skizze von F(x)=x+e^{x}.

(8.3.16.) Jetzt wenden wir uns dem Problem der rekursiven Konstruktion von Funktionen zu. Wir haben zwei Verfahren und unsere Grundausstattung. Was erhalten wir damit? Nehmen wir von der Grundausstattung nur die homogenen Polynome h_n, dann können wir über wiederholte Anwendung der beiden Verfahren offensichtlich jede Polynomfunktion (schulisch vielfach "ganzrationale Funktion") aufbauen. Nach endlich vielen Anwendugen erhält man jede Funktion p mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_N x^N$$

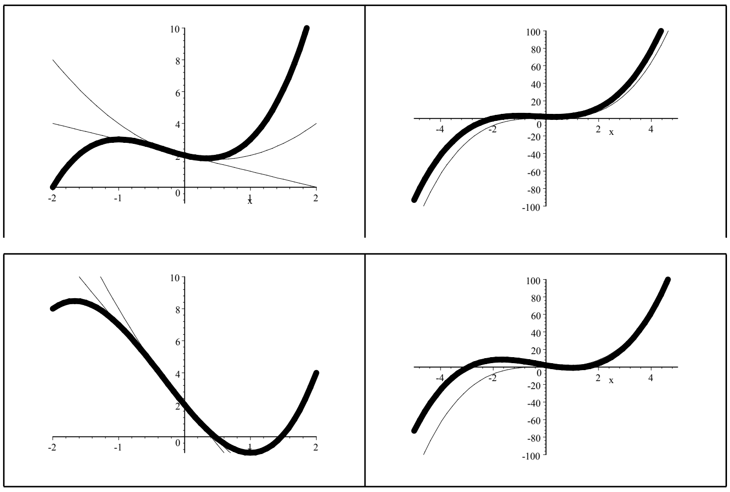
Ist hier $a_N \neq 0$ sprechen wir von einem Polynom vom Grade N. Die Polynome vom Grade 2 haben wir ausführlich in Kap 1.5 besprochen.

(8.3.17) Bei Polynomen hat man immer zwei Dominanzargumente zur Verfügung:

- Bei x=0 dominieren die niedrigsten Potenzen
- Bei großen x die höchsten Potenzen.

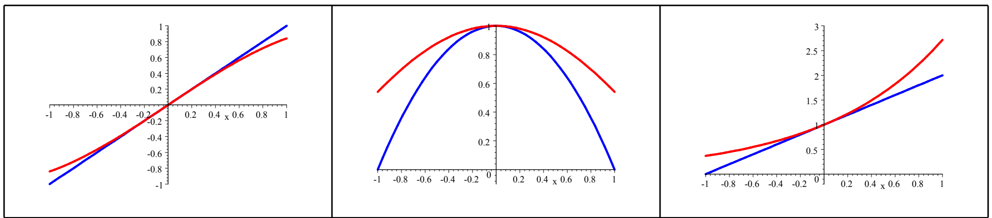
Bei x=0 wird man in den niedrigen Potenzen soweit gehen, wie man den Rechenausdruck problemlos beherrscht! Bei den hohen x-Werten nimmt man fast immer nur die höchste Potenz, also $a_N x^N$. Man skizziert die dominanten Beiträge (im zugehörigen Bereich) und versucht, zu interpolieren. Manchmal ist man damit bereits fertig, manchmal ergeben sich noch ganz bestimmte Fragen zu den dazwischen liegenden x-Werten, die man dann gezielt angehen kann. Insbesondere ist daran zu denken, dass es höchstens N Nullstellen heben kann.

(8.3.18) Beispiel: $p(x) = 2 - x + x^2 + x^3$. Das linke obere Bild zeigt, wie der Graph in der Nähe von 0 durch y=2-x und etwas besser durch y=2-x+x^2 dominiert wird. Das rechte, wie er für große x durch y=x^3 dominiert wird. Bei der Interpolation entsteht nur die Frage, ob es 1 oder 2 oder 3 Nullstellen gibt. Eine **muss** bei negativen x auftreten. Es **könnte** für positive x ein oder zwei weitere geben. Daher geben wir darunter die analogen Figuren für $q(x) = 2 - 5x + x^2 + x^3$. Die jeweils zu analysierende Funktion ist fett gezeichnet, die in bestimmten Bereichen dominierenden Vereinfachungen dünn.



□ Was ist im Rechenausdruck die Ursache dieser beiden weiteren Nullstellen

(8.3.19) In den nachfolgenden Figuren sind Approximationen der weiteren Funktionen der Grundausstattung gegeben, die man häufig für Dominanzüberlegungen benötigt. Die Figur gibt unmittelbar einen Eindruck ihrer Qualität:



sin(x)≈ x bei x=0	cos(x)≈ $1-\frac{1}{2}x^2$ bei x=0	$e^x \approx 1+x$ bei x=0

Diese drei Näherungen sollte man stets verfügbar haben, auswendig wissen.

8.3.2b **Der Vektorraum der Polynome**

(8.3.20) In Kap.3.3.4 haben wir beschrieben, was man mathematisch unter einem Vektorraum versteht: Eine Menge V mit einer inneren und einer äußeren Verknüpfung, so dass alle dort zusammengestellten Vektorraumaxiome erfüllt sind. Es sieht im Augenblick ganz nach einer Situation dieser Art aus. Wir bilden (in Gedanken) die Menge $\mathfrak{P}$ **aller** Polynome. Dann haben wir darin eine Addition, denn die von uns eingeführte Addition zweier Polynome $(p,q) \mapsto p+q = p \boxplus q$ ergibt erneut ein Polynom. Und die Multiplikation von p mit einer Zahl α ergibt auch wieder ein Polynom. Allgemein kann man immer Ausdrücke des Typs $\alpha f + \beta g$, also "Linearkombinationen", bilden.
Es bleibt die Frage nach den Rechenregeln:

□ Prüfen Sie nach, dass alle Vektorraumaxiome erfüllt sind!

! Damit begegnen wir zum ersten Male einem Vektorraum ganz anderer Art, der zunächst kaum etwas mit geometrischen Pfeilen zu tun hat. Seine Dimension erweist sich als unendlich. Das Besondere an diesen Vektoren ist, dass sie zwischen zwei Rollen hin und her wechseln können: Einerseits sind es Vektoren, die alle vektortypischen Rechnungen wie den Schluss von der Summe auf den Summanden gestatten. Und andererseits sind es Funktionen, für die man einen Graphen zeichnen kann, für die man Werte ausrechnet usw. Die jeweilige Problemsituation entscheidet dann über die zu verwendende Rolle.

8.3.2c **Die Übertragung von Symmetrieeigenschaften**

(8.3.21) Wie steht es mit der **Übertragung von Symmetrieeigenschaften** durch unsere Konstruktionen? Die Antworten sind weitgehend so, wie man sie erwartet oder erhofft:

□ Beweisen oder begründen Sie:

- Ist f gerade und α reell, dann ist αf gerade. Ist f ungerade, dann ist auch αf ungerade.

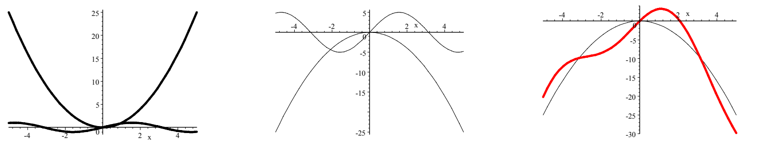
- Ist f gerade und ist g gerade, dann ist auch f+g gerade. Sind f und g beide ungerade, dann gilt dasselbe für f+g.

☐ Insbesondere gilt für Polynome:

- Enthält ein Polynom p nur gerade Potenzen, dann ist p gerade. Enthält p nur ungerade Potenzen, dann ist p ungerade.

Das letzte Resultat ist ausgesprochen nützlich.

(8.3.22) Bei der Verhaltensanalyse von Linearkombinationen wie 3f-g wird man in der Regel so vorgehen, dass man sich zuerst 3f und (-g) vorstellt und dies dann (gedanklich) addiert. Nehmen wir als Beispiel F(x)=5sin(x)-x^2. Die Funktion ist weder gerade noch ungerade. Die Figur zeigt in der Mitte den Zwischenschritt:



x^2 und sinx — -x^2 und 5sinx — F(x)=5x-x^2 und -x^2

8.3.3 Die Multiplikation zweier Funktionen

(8.3.23) Wählt man statt der Addition die **Multiplikation der Werte**, dann ergibt sich eine formal analoge Neukonstruktion einer Funktion. Die Zuordnung $x \mapsto f(x)g(x)$ ist für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich ausführbar, so dass man das folgende Schema bilden kann:

$\Rightarrow$	Gegeben $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ und $g = (D, x \mapsto g(x), \mathbb{R})$
!!	Dann ist $f \cdot g = (D, x \mapsto f(x) \cdot g(x), \mathbb{R})$ die neugebildete Funktion.
	Verbale Charakterisierung: Punktweise Multiplikation (von f und g)

Als reine Wertegleichung

$$\boxed{(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ für alle x aus D}}$$

☐ Was ist im Verlaufsdiagramm (8.3.9) nur abzuändern?

(8.3.24) Die Verhaltens- oder Graphendiskussion ist etwas anspruchsvoller, liefert aber zahlreiche interessante und nützliche Resultate.

(8.3.25) Man verfügt vornehmlich über folgende **Hilfsmittel**, die man **fallspezifisch** einsetzen sollte:

- Symmetrieargumente

- Vorzeichengenargumente

- Nullstellenregeln

- Dominanzargumente

- Einzelwertbestimmung

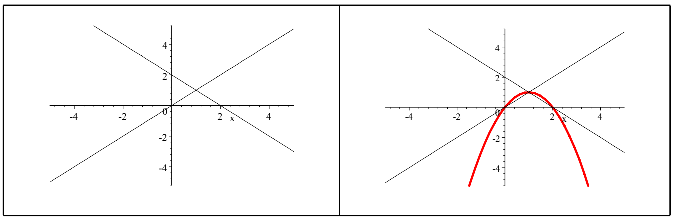
(8.3.26) Für die ersten beiden Punkte dürfte klar sein, was damit gemeint ist, aber auch wie die Resultate aussehen. Dazu einige erläuternde Fragen

☐ Zeigen Sie: Sind f und g gerade, dann ist auch $f \cdot g$ gerade. Welche drei weiteren Regeln gibt es?

☐ Was läßt sich über die Nullstellen von fg aussagen? Was läßt sich über das Vorzeichen von (fg)(x) aussagen, wenn f(x) und g(x) beide positiv sind? Welche weiteren Regeln gibt es?

(8.3.27) Was das **Vorzeichen** anbelangt, wird man den gemeinsamen Definitionsbereich D in Intervalle zerlegen, in denen jeweils f bzw. g gleiches Vorzeichen haben. Daraus folgen dann Intervalle, in denen fg gleiches Vorzeichen aufweist.

(8.3.28) Wir werden unten einige nützliche **Dominanzregeln** entwickeln. Einzelwertbestimmung (="Wertetabelle" des schematischen Vorgehens) wird man **nur** betreiben, wenn einzelne Werte besonders leicht zu erhalten sind und informative Graphenpunkten ergeben oder wenn man anders überhaupt nicht mehr voran kommt.
(8.3.29) Auch hier ist die Ausgangssituation meist so, dass man sich für das Verhalten einer gegebenen Funktion $x \mapsto F(x)$ interessiert und findet, "sieht", dass F(x)=f(x)g(x) gilt, wobei man f und g besser beherrscht.
Beispiel: F(x)=x(2-x)=2x-x^2. Also f(x)=x und g(x)=2-x, beides sind einfache Geraden. Man sieht unmittelbar durch Inspektion, dass F bei x=0 und bei x=2 eine Nullstelle entwickelt. Die Vorzeichen sind (von links nach rechts) -,+,-. Bei x=0 dominiert 2x, für große x dominiert x^2. Damit ist das Verhalten weitgehend festgelegt. Erneut muss man (in Gedanken) die beiden x-Werte miteinander multiplizieren:



(8.3.30) Mit Hilfe dieser Multiplikationsmethode folgt die folgende nützliche Regel:

- Ist ein Faktor (in einem Bereich) angenähert ± 1, dann ist das Produkt F(x) näherungsweise gleich $\pm$ dem anderen Faktor. Ist etwa etwa f(x)≈ -1, dann ist F(x)$\approx -g(x)$.

(8.3.31) Auch für die Nullstellen gibt s eine derartige Regel. Zunächst: Hat f bei x$_0$ eine Nullstelle, dann hat F dort auch eine. Aber in diesem Fall sollte man meist noch etwas mehr Information suchen. Man kann nämlich ein Dominanzargument entwickeln, das angibt, wie sich F in der Umgebung von x$_0$ näherungsweise verhält.
Diese Nullstellendomainanzregel lautet wie folgt:

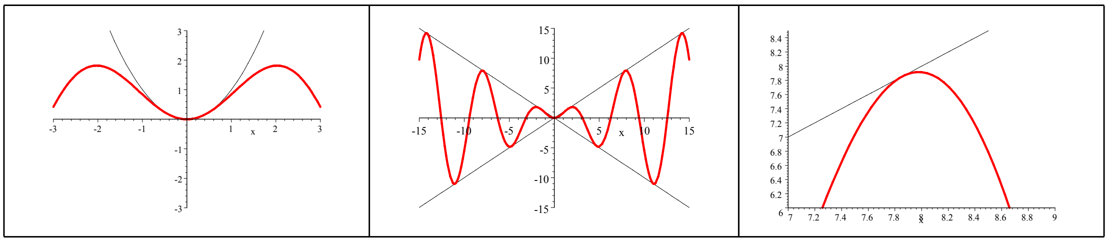
- f habe bei x$_0$ eine Nullstelle und dort gelte als Nullstellenbeschreibung näherungsweise $f(x) \approx N(x)$. Meist wird man $N(x) = A(x-x_0)^\alpha$ haben mit geeigneten Konstanten A und α. Weiter sei $g(x_0) = b$ mit b$\neq$ 0. **Dann ist näherungsweise** $F(x) \approx bN(x)$, speziell $F(x) \approx bA(x-x_0)^\alpha$.

Kurz: Wenn man für f eine Näherung hat, die die Nullstelle bei x_0 gut beschreibt, dann soll der variable Zweitfaktor g(x) in der Nähe der Nullstelle einfach durch die Konstante $b = g(x_0)$ ersetzt werden. Aber nur, wenn $b \neq 0$ gilt.

- Ist auch b=0, dann suche man auch für g eine Approximation, etwa g(x)$\approx M(x)$ und man erhält F(x)$\approx N(x)M(x)$. Beide Faktoren werden approximiert.

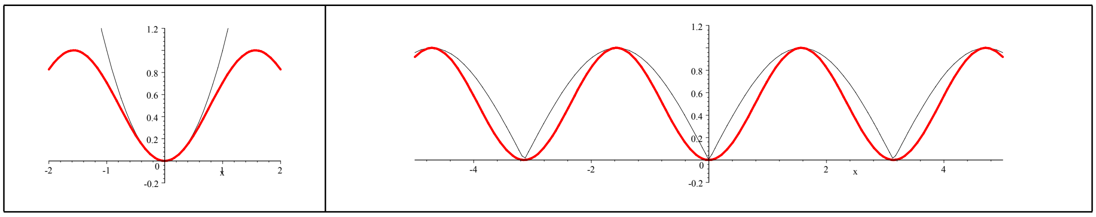
Ist etwa $M(x) \approx B(x-x_0)^\beta$ und $N(x)A(x-x_0)^\alpha$, dann folgt F(x)$\approx AB(x-x_0)^{\alpha+\beta}$. Kurz, **die beiden Nullstellennäherungen werden einfach miteinander multipliziert.**
(8.3.32) Das Beispiel hierzu ist bereits interessant. Genauer: Funktionen dieser Art tauchen etwa in physikalischen Anwendungen gerne auf und es ist wichtig, das Funktionsverhalten unmittelbar zu beherrschen, nicht erst nach einem längeren Arbeitsprozess. Zur Illustration der Regel wählen wir F(x)=xsin(x).
Die übliche Probe ("x durch -x ersetzen...") zeigt, dass eine gerade Funktion vorliegt. Es genügt, sie für x$\geq$ 0 zu analysieren. Die Nullstellen sind die des Sinus. Bei x=0 ersetzen wir sinx durch x, was F(x)$\approx x^2$ (Parabel!) ergibt. Alle übrigen Nullstellen sind einfach. Da $\sin(x) \approx (-1)^n(x-n\pi)$ gilt, folgt nach der Dominanzregel (f(x)=x, also f(x$_0$) $= n\pi$) die Approximation F(x)$\approx (-1)^n(n\pi)(x-n\pi)$. Bei x$_0$ $\approx 2n\pi + 1$ gilt sin(x)$\approx$ 1, also F(x)$\approx x$. Bei x$_0$ $\approx 2n\pi + 3$ dagegen ist sin(x)≈ -1, so dass F(x)$\approx -x$ gilt. Überdies ist $|\sin x| \leq 1$, was $|F(x)| = |x \sin x| \leq |x|$ bedeutet. Damit kann man das tatsächliche Verhalten halbquantitativ vorhersagen, kann unmittelbar eine Skizze machen, die weitgehend korrekt ist. Die Figur zeigt das Verhalten

für zwei Ausschnitte:



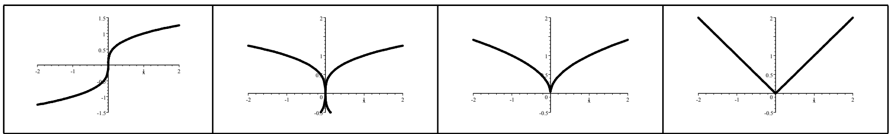
Das dritte Bild zeigt die Funktion F in der Nähe eines Maximums. Man sieht (auf viele Weisen!), dass das Maximum von F **nicht** beim Maximum des Sinus liegt. Das Maximum wird vielmehr etwas nach rechts verschoben. Das Maximum des Sinus (mit Wert 1) gibt den Berührungspunkt mit der Geraden y=x. Die genaue Lage der Extremwerte wäre also noch zu bestimmen.

(8.3.33) Beispiel F(x)=sin$^2 x$. Hier ist f(x)=g(x)=sin(x). Man sieht: F ist gerade, wird nie negativ und alle Nullstellen sind vom Parabeltyp. Da $|\sin(x)| \leq 1$ gilt, folgt $\sin^2(x) \leq |\sin x|$. Schließlich ist F(x)=1, für $\sin(x) = \pm 1$. Das ergibt bereits das korrekte Verhalten:



Inspektion des Bildes läßt vermuten, dass sich die Periode halbiert, nur noch π ist. Die Formel $2sin^2x = 1 - \cos(2x)$, die aus dem Additionstheorem folgt, bestätigt das sofort.

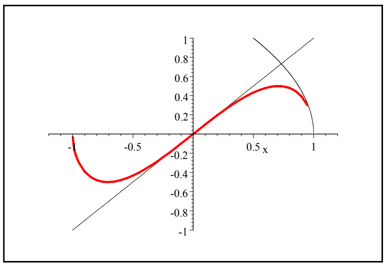
(8.3.34) Eine weitere Beobachtung: Die Funktion x$\mapsto$ $|\sin x|$ hat auf der x-Achse Spitzen wie x$\mapsto$ $|x|$. Durch das Quadrieren verschwinden sie, werden glatt abgerundet. Wann kommen überhaupt Spitzen vor? Immer bei $x \mapsto |x|^a$ mit $0 < a \leq 1$. Die nächste Figur zeigt einige Beispiele wichtigen lokalen Verhaltens.



x$\mapsto$ $\sqrt[3]{x}$	$x \mapsto \sqrt[3]{\vert x\vert}$	$x \mapsto \sqrt{\vert x\vert}$	$x \mapsto \vert x\vert$

Nochmals die Bedeutung dieser Bilder: Man hat eine Funktion F mit unbekanntem Verhalten und Nullstelle bei x_0. Man wendet ein Dominanzargument an und erhält einen Ausdruck der gegeben Art, nur um x_0 verschoben. Dann kann man bei x_0 das gesuchte Verhalten von F skizzieren.

(8.3.35) Beispiel: $F(x) = x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$. Der erste Ausdruck ist nur für x mit $|x| \leq 1$ bildbar. Wir haben drei Nullstellen bei 0 und ± 1. Das Nullstellendominanzargument liefert dort sofort das näherungsweise Verhalten: Bei x=0 produziert der Faktor x die Nullstelle. Der Rest $\sqrt{1-x^2}$ hat für $x_0 = 0$ den Wert 1. **Also gilt** $F(x) \approx 1x$ in der Nähe von x=0. Bei x=1 erzeugt $\sqrt{1-x}$ die Nullstelle. Das ist $\sqrt{|x|}$ nach 1 verschoben. Der Zusatzfaktor $x\sqrt{1+x}$? liefert $x_0 = 1$ einen Faktor $\sqrt{2}$. Und das bedeutet, daß sich die Funktion in der Nähe von 1 wie $\sqrt{2}\sqrt{1-x}$ verhält. Wir müssen aus (8.3.34) den Typ $\sqrt{x}$ wählen. Die Funktion ist ungerade, also ist man fertig. Die Figur gibt den exakten Graphen und die dominanten Näherungen (deren Verhalten man kennt!).



Wie üblich benutzt man Zwischenwertseigenschaft und Glattheit, um zu interpolieren, insbesondere um vorherzusagen, daß es nur ein Maximum geben wird. Die Lage des Maximums bleibt noch offen. Man kann aber wegen des stärkeren Anstiegs der Approximation bei 1 vermuten, daß das Maximum deutlich oberhalb von x=0.5 liegen wird.

☐ Diskutieren sie analog das Verhalten von $F(x) = \sqrt{x(1-x^2)}$.

8.3.4 Reziproke Funktion und Quotient zweier Funktionen

(8.3.36) Ist g(x)$\neq$ 0, dann kann man den Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$bilden. Lässt man aus dem Definitionsberich D alle eventuellen Nullstellen von g fort und bezeichnet man die so entstehende Menge mit D_0, dann kann man eine neue Zuordnung bilden und eine weitere Funktion abstrahieren:

$\Rightarrow$	Gegeben $f = (D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ und $g = (D, x \mapsto g(x), \mathbb{R})$
	Setze $D_0 = \{x \vert x \in D$ und $g(x_0) \neq 0\}$
!!	**Dann** ist $\frac{f}{g} = (D, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \mathbb{R})$ die neugebildete Funktion.
	Verbale Charakterisierung: Punktweise Division (von f durch g)
	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle x$\in D$ mit g(x)$\neq$ 0.

(8.3.37) Ein wichtiger Spezialfall ist die *reziproke Funktion.* Hier ist die Eingabe erneut eine einzige Funktion. Man erhält die folgende formale Konstruktion:

$\Rightarrow$	Gegeben $g = (D, x \mapsto g(x), \mathbb{R})$
	Setze $D_0 = \{x \vert x \in D$ und $g(x_0) \neq 0\}$
!!	**Dann** ist $\frac{1}{g} = (D, x \mapsto \frac{1}{g(x)}, \mathbb{R})$ die neugebildete Funktion.
	Verbale Charakterisierung: Nehme den reziproken Wert.
	$\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$ für alle x$\in D$ mit g(x)$\neq$ 0.

Seien Sie vorsichtig mit der Schreibweise g^{-1} anstelle $\frac{1}{g}$. Diese führt leicht zu Verwechslungen mit der inversen Funktion $\overset{-1}{g}$.

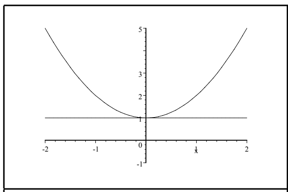
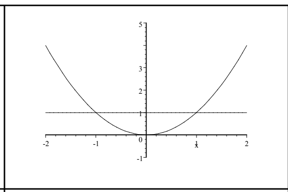
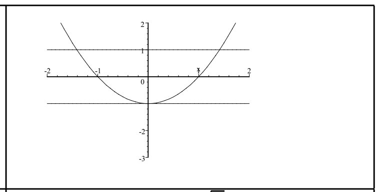
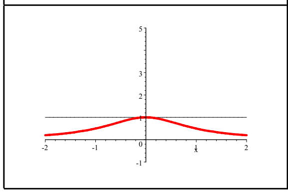
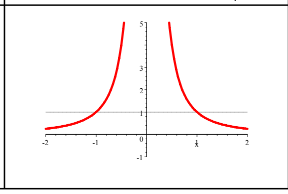
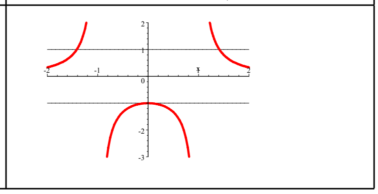
(8.3.38) Wieder ist die formale Bildung (der reziproken Funktion) einfach. Aber man kann meist auch gut verfolgen, was mit dem Graphen geschieht. Folgende elementaren Eigenschaften der Division sind dabei nützlich:

- Für y=1 ist auch $\frac{1}{y} = 1$
- Startet man mit y=1 und vergrössert man y, dann wird $\frac{1}{y}$ kleiner, nähert sich Null.
- Startet man mit y=1 und verkleinert man y, dann wächst $\frac{1}{y}$ schließlich über alle Grenzen.
- Für negatives y hat man analoges Verhalten.

(8.3.39) Hat man jetzt einen Funktionsgraphen G_g gegeben und möchte $G_{\frac{1}{g}}$, dann wird man zunächst möglichst viele festbleibende Stellen mit $g(x) = \pm 1$ suchen und sich von diesen Stellen aus nach beiden Seiten bewegen. Dann sieht man mit Hilfe von (8.3.38), wie der Graph der reziproken Funktion entsteht. Nullstellen von g ergeben jetzt Problemstellen von $\frac{1}{g}$ vom Poltyp, d.h. die Funktionswerte wachsen an dieser Stelle irgendwie über alle Grenzen.

(8.3.40) Als Beispiel betrachten wir die drei Funktionen $g_1(x) = x^2 + 1$, $g_0(x) = x^2$ und $g_{-1}(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Oben der Graph von g samt Schnitt mit y=$\pm$1. unten die Graphen der zugehörigen reziproken

Funktion.

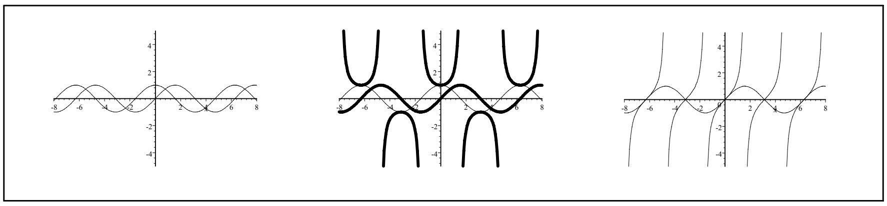
		
Start bei x=0 !	Start bei x=$\pm$1. x$\neq$ 0	Start bei x=$\pm\sqrt{2}$, 0. Pole $\pm$1
		

(8.3.41) Mit g ist offensichtlich auch $\frac{1}{g}$ gerade. Im ersten Fall erhält man eine Funktion in Form einer "Glocke". Im zweiten Fall gibt es einen **Pol** bei Null. Beide *Äste* des Graphen gehen dabei nach $+\infty$. Für große x dagegen nähert sich der Graph der x-Achse von oben.
Der dritte Graph hat zwei Pole. Aber hier haben die beiden Äste jeweils unterschiedliches Vorzeichen! (Wir sagen auch *Pol vom 1/x-Typ* im Gegensatz zum *1/x*^{2}-Typ). Nähert man sich etwa von 0 aus der Stelle x=1, so wechselt g(x) bei x=1 das Vorzeichen. Und das heißt, dass $\frac{1}{g(x)}$ hier von $-\infty$ nach $+\infty$ springt. Jenseits von x=$\sqrt{2}$, dem anderen möglichen Startpunkt wegen g($\sqrt{2}$) = 1 wird $\frac{1}{g(x)}$ dann wieder klein. Das Beispiel zeigt, wie man sich den Graphen der reziproken Funktion relativ leicht zugänglich macht.

☐ Es gilt e^{-x} = $\frac{1}{e^x}$. Skizzieren Sie den (wichtigen) Graphen von $x \mapsto e^{-x}$. Wie sieht insbesondere näherungsweise das Verhalten bei x=0 aus? An (8.3.19) denken.

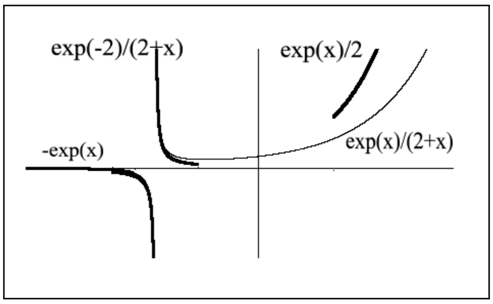
(8.3.42) Einen allgemeinen Quotienten behandelt man analog, eventuell macht man daraus mit Hilfe der Gleichung $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ eine Multiplikation! Nachfolgend ein wichtiges Beispiel.

(8.3.43) Für den Tangens gilt tan(x)=$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $= \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$. Die Bilderfolge zeigt die entstehende Konstruktion des Graphen des Tangens:



Beachten Sie: ungerade/gerade=ungerade. Also ist der Tangens ungerade. Die Nullstellen des Sinus ergeben die des Tangens. Zugleich ist dort cos gleich $\pm$1. Insbesondere tan(x)$\approx x$ für kleine x. Die Nullstellen des cos ergeben Pole vom 1/x-Typ.

(8.3.44) Noch ein Beispiel: F(x)=$\frac{e^x}{2+x}$. Inspektion zeigt einen Pol bei $x = -2$. Auch Pole sind der Dominanzargumentation zugänglich, d,h, das Verhalten sollte durch das von $\frac{e^{-2}}{2+x}$ dominiert werde. Der Pol ist vom $\frac{1}{x} - Typ$. Weiter gilt $F(0) = \frac{1}{2}$. (Einmal ein bestimmter Einzelwert!). Vorzeichen? Positiv für x>-2, negativ für x<-2. Was ist für große x? Die allgemeine Regel besagt: Die Exponentialfunktion dominiert in jeder Hinsicht über alle Potenzen. Für x nach $+\infty$ also Wachstum wie exp. Für x nach $-\infty$ geht der Zähler nach 0, der Nenner nach unendlich, also geht der Quotient nach Null, mit negativem Zeichen. Oberhalb von $x = -2$ muss es ein Minimum geben. In der Figur sind die Näherungen in ihren Dominanzbereichen fett gezeichnet.



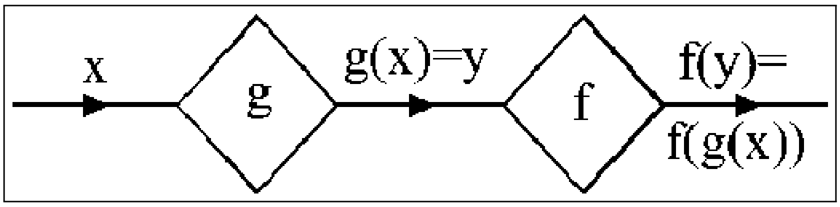
☐ Diskutieren Sie das Verhalten von $F_2(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$ und von $F_3(x) = \frac{x^2}{1-x^3}$.

☐ Mit Hilfe unserer Kostruktionen kann man auch Funktionen mit endlichen Sprüngen und anderen die Glattheit verletzenden Eigenschaften konstruieren. Skizzieren sie die Graphen von $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ und von $\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$. Wie sieht jeweils der Definitionsbereich aus?

8.3.5 Die Zusammensetzung oder Hintereinanderschaltung von Funktionen

Während es sich bei den bisher eingeführten Konstruktionen um Übertragungen von Verknüpfungen der reellen Zahlen handelte, kommen wir jetzt zu einer Konstruktion anderer Art. Sie geht vom allgemeinen Abbildungsbegriff aus, ist für beliebige Abbildungen möglich und wurde in bereits in Kap.7.1.7 eingeführt. Im Zusammenwirken mit den anderen Konstruktionen erweist sie sich für die reellen Funktionen als ausgesprochen wichtig.

(8.3.45) Die Idee ist einfach: Man hat zwei Zuordnungen und gibt den Wert, das Ergebnis, der ersten Zuordnung in die zweite ein. Im Rahmen des Automatenstandpunktes werden die beiden Zuordnungen einfach hintereinandergeschaltet, wobei erneut daran erinnert sei, daß in den zweiten Autoamten nur y=f(x) eingeht, nicht mehr x selbst. Würde das verlangt, müßte man (x,f(x)) eingeben.



(8.3.46) Damit das Zusammenschalten mit Sicherheit funktioniert, fordern wir, daß die Wertemenge der zuerst wirkenden Funktion, der *inneren Funktion* gleich der Urbildmenge der zweiten *äußeren* sein soll. Dies sollte man notfalls durch geeignete Wahl dieser Menge sicherstellen.
Was kann andernfalls geschehen? Nehmen wir als innere Zuordnung $x \mapsto \sin x$ und als äußere $x \mapsto \sqrt{x}$. Dann liefert der erste Automat immer wieder negative Zahlen, die der zweite nicht verarbeiten kann!
(8.3.46) Das **Schema der Konstruktion** sieht wie folgt aus:

⇒	f=(A,x↦ $f(x), B)$ und g=(C,y↦ $g(y), W)$ mit B=C !
!!	Dann hat man eine neue *zusammengestzte* Funktion
T	$g \circ f = (A, x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)), W)$
	Charakterisierung: Hintereinanderausführen der Zuordnungen
!!	Als Wertegleichung: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle x aus A.

(8.3.47) Zweierlei ist bei dieser Konstruktion zu beachten:

1. Die Bedingung B=C. Ist sie erfüllt oder durch Abänderung der Ausgangstripel erfüllbar?
2. Die Änderung der Reihenfolge: Die zuerst wirkende Funktion ist f. Die in der Bezeichnung $g \circ f$ zuerst hingeschriebene Funktion ist dagegen g.

Zu 1): Ist B=C nicht von vornherein erfüllt, wird man so vorgehen: Zuerst wird versucht, die Wertemenge der inneren Funktion zu verkleinern. Die kleinstmögliche Wahl ist Bildf. Vgl. (7.1.18-19). Bisher haben wir in unseren Konstruktionen die größtmögliche Wahl , nämlich ganz $\mathbb{R}$, getroffen. Gelingt es, so B=C zu erreichen, ist die Konstruktion verwendbar. Ist Bildf immer noch zu groß, dann muß man etwas anderes versuchen, wenn man die Umkehrung doch durchführen will. Meist versucht man, die **Urbildmenge A zu verkleinern**. Im Zusammenhang mit der inversen Abbildung kommen wir darauf zurück. Sind beide Abbildungen vom Typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dann tritt das Problem allerdings nicht auf. Oder auch: **Man muß nur vorsichtig sein, wenn die Urbildmenge der äußeren Abbildung nicht ganz $\mathbb{R}$ ist oder allgemeiner alle vier Mengen nicht gleich sind!**

Zu 2) Verwechseln der Reihenfolge führt nicht selten zu Fehlern. Die Konstruktion ist nicht kommutativ. Wenn man $g \circ f$ bilden kann, dann muß $f \circ g$ noch lange nicht existieren. Aber selbst wenn man es bilden kann, wird fast immer $f \circ g \neq g \circ f$ gelten.

(8.3.48) Beispiel: sin=$(\mathbb{R}, x \mapsto \sin x, \mathbb{R})$ und $h_2 = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2, \mathbb{R})$ gibt $sin \circ h_2$ =$(\mathbb{R}, x \mapsto \sin(x^2), \mathbb{R})$ und $h_2 \circ \sin = (\mathbb{R}, x \mapsto \sin^2 x = (\sin x)^2, \mathbb{R})$. Hier tritt das Bildbarkeitsproblem nicht auf. Die beiden resultierende Zusammensetzungen sind jedoch voneinander völlig verschieden.
(8.3.49) Beispiel: $f = (\mathbb{R} - \{0, 1\}, x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}, \mathbb{R})$. Können wir $f \circ f$ bilden? Der vom inneren f ausgegebene Wert darf weder 0 noch 1 sein! f(x)=0 ist offenbar unmöglich. f(x)=1 heißt x(x-1)=1, also $x^2 - x - 1 = 0$ mit Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Also ist $f \circ f$ so nicht bildbar! Man kann das neue Tripel

$$f_1 = (\mathbb{R} - \{0, 1, x_1, x_2\}, x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}, \mathbb{R} - \{0, 1\})$$

bilden, das ja immer noch dieselbe Zuordnung hat, und damit $f \circ f_1$ bauen. Diese Konstruktion ist zulässig!
(8.3.50) Und wir können das Beispiel auch gleich nutzen, um zu verstehen, wie man allgemein den **Berechnungsterm einer zusammengesetzten Abbildung** erhält. Im Beispiel den von $f \circ f_1$. Wir setzen $y = f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ und finden (durch stures Einsetzen):

$$f \circ f_1(x) = f(y) = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)\left(\frac{1}{x(x-1)} - 1\right)} = -x^2 \frac{(x-1)^2}{x^2 - x - 1}.$$

Bemerkenswerterweise ist für diese Zuordnung x=0 und x=1 zulässig! Die problematischen Zwischenstellen $x_{1,2}$ dagegen sind es nicht.

8.3.5a **Der Rechenausdruck**

(8.3.51) Wie erhält man den Rechenausdruck? Der Rechenausdruck der zusammengesetzten Abbildung entsteht als geeignet vereinfachte Endform von g(f(x)). Wie im Beispiel: Einsetzen und wenn möglich vereinfachen.

☐ Sei f(x)=x+x^2. Bilden Sie den Rechenausdruck von $f \circ f$ und von $f \circ f \circ f$. Endform?

8.3.5b **Der Graph einer zusammengesetzten Funktion**

(8.3.52) Jetzt kommen wir zum Hauptproblem: **Kann man auch das Verhalten von $g \circ f$ aus dem Verhalten der Ausgangsfunktionen erschließen?** Das ist tatsächlich mit etwas Übung recht gut möglich.
(8.3.53) Rein schematisch können wir wie folgt vorgehen: Wir skizzieren drei Koordinatensysteme, das erste für die innere Funktion f mit dem Graphen G_f, das zweite für die äußere Funktion g mit dem Graphen G_g und das dritte für $g \circ f$, also den gesuchten Graphen $G_{g \circ f}$. Im dritten wählen wir einen interessierenden Punkt x aus. Wie sieht der zugehörige y-Wert $g \circ f(x)$ aus?

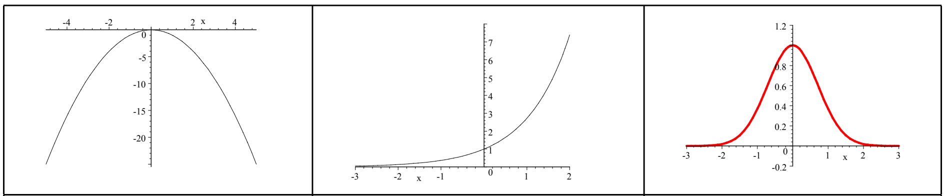
- Wir tragen den gewählten x-Wert im ersten Sytem ab und lesen über G_f den zugehörigen y-Wert y=f(x) ab.

- Dieses y tragen wir als x-Wert im zweiten System ab und bestimmen erneut den y-Wert mit G_g. Der erhaltene Wert ist der gesuchte Wert $g \circ f(x)$ und wird ins dritte System übertragen.

Kurz der entscheidende Punkt: **Trage den y-Wert des ersten Graphen als x-Wert des zweiten ab!**

(8.3.54) In vielen Fällen läßt sich das gesamte Schema im Kopf ausführen und liefert qualitativ die Form des gesuchten Graphen. Wenn möglich, beginnt man mit einem günstigen x-Wert und und bewegt sich von da aus in Gedanken nach beiden Seiten.

(8.3.55) Beispiel: $f = (\mathbb{R}, x \mapsto -x^2, \mathbb{R})$ und $\exp = (\mathbb{R}, x \mapsto e^x, \mathbb{R})$.
und damit $\exp\circ f = (\mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}, \mathbb{R})$. Das gibt:



Starte bei x=0 mit y=0	Für y=x=0 ist y=1	1 zu x=0 abtragen
Von x=0 seitwärts: y wird kleiner!	Man bewegt sich nach links. Der y-Wert fällt!	Die Verkleinerung übertragen.

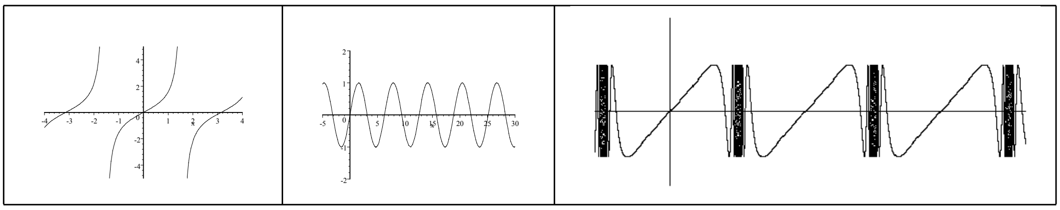
☐ Was ergibt umgekehrt $f \circ \exp$?
Das Beispiel legt auch sogleich eine Symmetriebeobachtung nahe.

☐ Zeigen Sie: Ist f gerade und $g \circ f$ bildbar, dann ist auch $g \circ f$ gerade. (Wie im Beispiel). Was ist, wenn f ungerade ist. (Immer mit dem Schema arbeiten: x durch -x ersetzen und nachschauen, was geschieht).

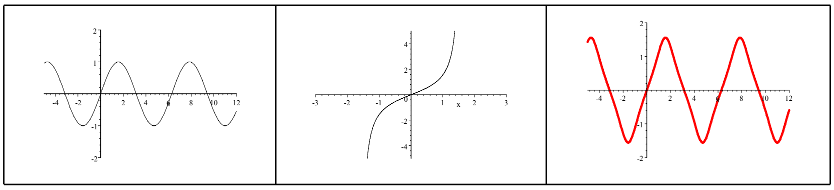
(8.3.56) Jetzt ein interessantes Beispiel, das die Leistungsfähigkeit des Verfahrens verdeutlicht:

- Wie sieht der Graph von x$\mapsto$ $F(x)$ =sin(tan(x))=sin$\circ$ tan(x) aus?

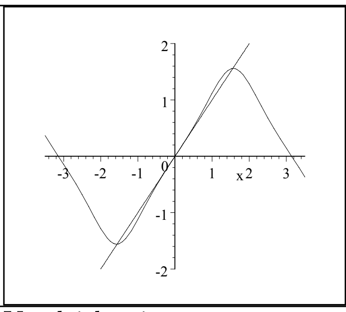
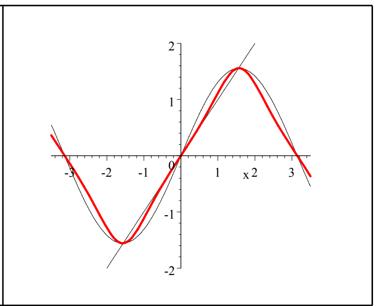
Wir starten im Tangensystem bei x=0. Da sin(0)=0 gilt, startet auch der Graph von F im Ursprung. Jetzt lassen wir x wachsen bis nach $\frac{\pi}{2}$.Dann geht y nach unendlich. D.h. wir müssen im sin-Bild mit x nach unendlich gehen, was unendlich viele Sinusschwingungen bedeutet! Diese treten im F-Bild bis x=$\frac{\pi}{2}$ auf, werden dort zusammengequetscht, was nur andeutungsweise zeichenbar ist. Die Werte liegen natürlich alle zwischen - 1 und +1! Nach x=$\frac{\pi}{2}$ startet man im sin-Bild wieder bei $-\infty$ und bewegt sich auf Null zu usw. Damit ist der resultierende Graph weitgehend verstanden.



(8.3.57) Die umgekehrte Reihenfolge ergibt auch eine interessante Funktion: $G(x) = tan(sin(x)) = tan \circ$ sin(x). Der Sinuswert läuft immer nur zwischen -1 und +1. Im tan-Graphen läuft der x-Wert somit immer zwischen -1 und +1 hin und her. D.h. für den zugehörigen y-Wert: Zwischen -tan1 und +tan1 mit $\tan 1 = 1.55...$.Wir schränken den Tangensbereich gleich entsprechend ein und finden:



Zur Form: Startet man bei Null, dann ist sinx etwas kleiner als y=x. Im Tangensgraphen wird das wieder vergrößert. und zwar zunächst so, daß "der Tangens gewinnt" (=mehr hinzufügt, als der Sinus fortgenommen hat). D.h. tan(sin(x)) ist etwas größer als x. Aber auf Dauer muß der Sinus gewinnen, der ja nie über den Wert 1 hinauskommt. Das bewirkt das Umkippen an der Spitze. Das nächste Bild zeigt einen Ausschnitt des Graphen sowie y=x, um den Sachverhalt zu verdeutlichen.

	
Vergleich mit y=x	Vergleich mit y=tan(1)sin(x)

□ Es sei f periodisch und g∘f ebenso wie f∘g bildbar. Welche Funktion ist dann erneut periodisch? Bleibt die Periode dieselbe?

(8.3.58) Natürlich kann man auch mehr als zwei Faktoren zusammensetzen. Die Automatenintepretation zeigt unmittelbar, daß diese Bildung assoziativ ist, so daß man Klammern immer fortlassen kann ! (Vgl. (3.3.13))

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h \text{ im Sinne der Funktionstripel.}$$

Werteklammern darf man natürlich nicht fortlassen, muß also schreiben:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

(8.3.59) Mit Hilfe dieser Wiederholung (=Iteration) der Zusammensetzung erhält man viele interessante und nützliche Resultate, insbesondere aus dem Bereich chaotischer Systeme.

□ Sei f(x)=ax(1-x). Berechnen Sie $f \circ f(x)$ und $f \circ f \circ f(x)$. D.h. nicht einfach nur einsetzen, sondern den Rechenausdruck in eine angemessene Endform bringen! Es entsteht immer wieder ein Polynom. Welche Ordnung hat das Polynom, das sich so aus N Faktoren f ergibt? Benutzen sie ein Computeralgebrasystem, um die Graphen noch höherer Iterationen zu zeichnen. Wählen Sie dazu a=2.8 und a=3.3 und a=3.6 für $0 \leq x \leq 1$.

(8.3.60) Wie bei den übrigen Konstruktionen hat man es verbreitet mit der vor (8.3.1) beschriebenen Situation zu tun: $x \mapsto F(x)$ ist gegeben und man interessiert sich für das Verhalten von F. Man verfolgt den Rechenweg, den"Lebensweg" von x in F(x) und stellt fest, daß eine Zusammensetzung von Funktionen vorliegt. Dann geht man in x so weit, wie man die zugehörige Funktion beherrscht, und setzt den Funktionswert y. Danach geht man wieder in y so weit, wie man die zugehörige Zuordnung gut beherrscht. Usw. Jeden Schritt notiert man möglichst als Pfeildiagramm. **Am Ende hat man F als Zusammensetzung geläufiger Funktionen dargestellt.**

(8.3.61) Ein Beispiel mit naheliegender Zerlegung:

$F(x) = \sin(e^{x^2+3})$
$x \overset{h}{\mapsto} x^2 + 3 = y \overset{g}{\mapsto} e^y = z \overset{f}{\mapsto} \sin(z)$
$F = f \circ g \circ h$

Hier ist es nicht sinnvoll, h noch weiter zu zerlegen in $u \mapsto u^2 = v \mapsto v + 3$. Denn den Graphen von $h(x) = x^2 + 3$ können wir problemlos zkizzieren.

□ Zerlegen Sie $F(x) = (1 + e^{\sin((x-2)^2)})^3$ über ein Pfeildiagramm in beherrschbare Teile.

! Nochmals das Prinzip: **Gehe im "Schicksalsweg" der jeweiligen Variablen immer so weit, wie man die Zuordnung beherrscht!**

(8.3.62) Es sei $\ell(a) = ax + b$ wobei a und b äußere Parameter sind. Wir nennen ℓ ein *lineare Funktion.* Dann begegnet man ausgesprochen häufig Abbildungen der Form $\ell \circ f$ und $f \circ \ell$. D.h. als Wertegleichung:

$$\ell \circ f(x) = (\ell \circ f)(x) = af(x) + b \quad \text{und} \quad (f \circ \ell)(x) = f \circ \ell(x) = f(ax + b).$$

(8.3.63) Denken Sie etwa an die Beschreibung sinusförmiger Vorgänge in (6.3.30). Ebenso kommen Formen des Typs $\ell_1 \circ f \circ \ell_2$ vor. So läßt sich $t \mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$ wie folgt zerlegen: $t \overset{\ell_2}{\mapsto} \omega t+\varphi = u \overset{\sin}{\mapsto} \sin u = v \overset{\ell_1}{\mapsto} Av+0$.

☐ Unterscheiden Sie $F(x) = e^{x^2}$ und $G(x) = (e^x)^2$ durch Verlaufsdiagramme. Der erste Term ist eigentlich $e^{(x^2)}$ und verwendet eine Klammerersparnis. Er läßt sich nicht vereinfachen. Der zweite läßt sich über die Rechenregeln vereinfachen zu e^{2x}.

☐ Diskutieren Sie x$\mapsto \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x}$ für a>b>0. Beachten Sie dass

$\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x}$=a$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$ mit 0<k<1.

8.3.6 Die inverse Funktion

Auch diese Konstruktion haben wir bereits allgemein für Abbildungen eingeführt. Erneut liegt eine Konstruktion vor, die nur unter gewissen günstigen Voraussetzungen möglich ist. Dann wird aus einer gegebenen Funktion eine neue, die mit $\overset{-1}{f}$ bezeichnet werden soll.

*Im Bereich der Funktionen erhält man über diese Konstruktion eine Reihe von Funktionen, die man ihrer Bedeutung nach ebensogut beherrschen sollte wie die Funktionen der Grundausstattung. Das sind insbesondere die **Wurzelfunktion, der Arcustangens, der Arcussinus und der Logarithmus**.*

(8.3.64) Aus den vorangegangenen Beispielen können wir bereits abstrahieren, welche Punkte neben der einführenden Definition und Beschreibung der Konstruktion zu behandeln sind:

- Was kann man tun, wenn unmittelbare Umkehrbarkeit nicht möglich ist?
- Gewinnen eines Berechnungsverfahrens, also eines Rechenausdrucks für $\overset{-1}{f}(x)$
- Gewinnen des Graphen der inversen Funktion $\overset{-1}{f}$ aus dem für f.
- Vorstellung von Beispielen, insbesondere der eingangs genannten Funktionen.

(8.3.65) Ausgangspunkt für die inverse Funktion ist die Idee, die Zuordnung einer gegebenen Funktion $f = (D, x \mapsto y = f(x), W)$ einfach umzukehren, in umgekehrter Richtung laufen zu lassen. Das ist allerdings nicht immer möglich! Ist es in dem Sine möglich, daß tatsächlich eine neue Zuordnung entsteht, dann erhält man über Tripelergänzung die (zu f) inverse Abbildung $\overset{-1}{f} = (W, y \mapsto \overset{-1}{f}(y), D)$. Diese Funktion wird durch Bedingungen festgelegt, die man entweder auf dem Niveau der Funktionstripel oder dem der Werte formulieren kann. Wir wiederholen die Bedingungen aus (8.1.30):

Werteniveau	$f(\overset{-1}{f}(y)) = y$	für alle y aus W
	$\overset{-1}{f}(f(x)) = x$	für alle x aus D
Abbildungsniveau	$f \circ \overset{-1}{f} = id_W = (W, x \mapsto x, W)$	
	$\overset{-1}{f} \circ f = id_D = (D, x \mapsto x, D)$	

Beachten Sie: Für die Werte sind das unendlich viele Bedingungen! Für jedes x aus D und y aus W eine eigene. Alle sind zu erfüllen! Das legt in diesem Zusammenhang nahe, x bzw. y als äußere Parameter zu behandeln. Für die Abbildungstripel dagegen liegt jeweils nur eine einzige Gleichung vor.

(8.3.66) Ein **einfaches Beispiel**, für das die Konstruktion problemlos durchgeht, bietet die Funktion h_3. Die Umkehrabbildung ist die dritten Wurzel und die ist für alle reellen Zahlen definiert. Damit erhalten wir folgende Konkretisierungen der Wertegleichungen: $f(\overset{-1}{f}(y)) = y$ wird zu $(\sqrt[3]{y})^3 = y$ und $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$ wird zu $\sqrt[3]{x^3} = x$. (Für alle x,y aus $\mathbb{R}$.) Wir haben beispielsweise $\sqrt[3]{-8} = -2$ und $(-2)^3 = -8$. Die zur dritten Wurzel gehörige Abbildung werden wir mit $h_{\frac{1}{3}}$ bezeichnen. Dann gilt $h_{\frac{1}{3}} \circ h_3 = h_3 \circ h_{\frac{1}{3}} = h_1 = id_{\mathbb{R}}$.

☐ Was ist die inverse Funktion zu $\ell(x) = ax + b$ mit a$\neq$ 0?

☐ Was ist allgemein $h_n \circ h_m$? Im Gegensatz zu $h_n h_m$? Was ist $(h_n)^{-1}$?

8.3.6a Die Vorbereitung der Funktion

(8.3.67) Geht man jetzt von h_3 zu h_2 über, so treten die für die Umkehrung typischen Probleme auf. Für reelle Funktionen haben wir in (8.1.9) ein graphisches **Zuordnungsverfahren** entwickelt, mit dessen Hilfe wir das Umkehrproblem studieren können: Wir starteten mit einem vorgebbaren Punkt auf der x-Achse, zogen die Parallele zur y-Achse. Bestimmten den Schnittpunkt mit dem Graphen. **Der mußte eindeutig sein!** Und gingen dann x-parallel zur y-Achse. Der Schnitt gab uns den gesuchten Funktionswert y=f(x).

(8.3.68) Wie sieht die Umkehrung aus? Starte mit einem vorgebbaren Wert auf der y-Achse. Ziehe die Parallele zur x-Achse. Bestimme den Schnitt mit dem Graphen. **Der sollte/muß eine Punkt ergeben!** Von dort gehe y-parallel zur x-Achse. Das gibt den gesuchten Wert der Zuordnungsumkehrung.
(8.3.69) Wir sehen, wo das Problem liegt: Die Parallele zur y-Achse muß keineswegs einen eindeutigen Schnittpunkt ergeben. Wie sieht das im Fall von $h_2 = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2, \mathbb{R})$ aus? Wir wählen $y = -4$. Dann ist der Schnitt leer. Für diesen Fall haben wir die Rettung bereits angedeutet: **Wir verkleinern die Wertemenge** auf das Bild! Bilden also das neue Tripel $p_2 = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2, [0, \infty[)$. Jetzt muß $y \geq 0$ gelten und jede zugehörige Parallele zur y-Achse hat **mindestens** einen Schnittpunkt.

Nun wählen wir $y = 4$. Dann hat die zugehörige Parallele zwei Schnittpunkte. Einen für $x = 2$ und einen für $x = -2$. Erneut können wir nicht umkehren. Die naheliegende Idee ist jetzt, **auch noch die Urbildmenge von $\mathbf{h_2}$ zu verkleinern**. Und zwar so, daß immer genau ein Schnittpunkt übrigbleibt. Aber das geht leider nicht mehr eindeutig. Man hat verschiedene Möglichkeiten und muß sich daraus eine besonders opportune auswählen. In unserem Fall könnte man etwa $[0,\infty[$ oder $]-\infty, 0]$ wählen. Aber es gibt durchaus noch weitere Möglichkeiten. Üblich ist die erste Wahl. D.h. man bildet das (in beiden Mengen verkleinerte) Tripel $q = ([0, \infty[, x \mapsto x^2, [0, \infty[)$ und das ist umkehrbar: Jedes jetzt noch zulässige y gehört zu genau einem x. Für die Umkehrabbildung verwendet man mehrere Bezeichnungen:

$$h_{\frac{1}{2}} = sqr = (([0, \infty[, y \mapsto h_{\frac{1}{2}}(y) = sqr(y) = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}, [0, \infty[)$$

sqr kommt vom englischen "square root".

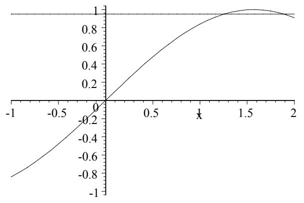
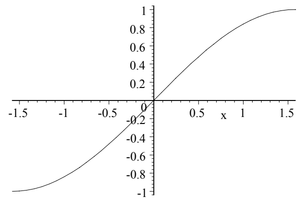
Fassen wir unser Vorgehen zusammen:

- Die Funktion $(D, x \mapsto f(x), W)$ soll umgekehrt werden.
- Schränke die Wertemenge ein auf Bildf. Also $((D, x \mapsto f(x), Bildf)$. Das ist immer eindeutig und möglich.
- Schränke die Urbildmenge geeignet ein auf eine Teilmenge U von D bis die Umkehrung (Bildf, y$\mapsto \overset{-1}{f}(y), U)$ möglich wird. Die Wahl von U ist i.a. nicht eindeutig.

Falls man den letzten Schritt nicht benötigt, wird man ihn auch nicht ausführen.
(5.3.70) Konkret geht man beim zweiten Schritt meist wie folgt vor: Man wählt einen Graphenpunkt (x_0, y_0) aus, der zur Umkehrabbildung gehören soll. Dann geht man von diesem Punkt auf der x-Achse so weit weiter, wie die x-Parallelen nur einen Schnittpunkt produzieren. U.U. geht man von x_0 nach beiden Seiten.
(5.3.71) Nehmen wir als Beispiel den Sinus. Der Ursprung soll in der Umkehrung enthalten sein. Dann können wir bis $x = \frac{\pi}{2}$ nach rechts und $x = -\frac{\pi}{2}$ nach links gehen. In diesem Bereich gibt es immer einen Schnittpunkt. Geht man noch weiter, erhält man für einige y sofort zwei Schnittpunkte. Da Bild(sin)=[-1,1] ist, erhalten wir folgenden eingeschränkten, aber umkehrbaren Sinus

$$sin_E = ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \mapsto \sin x, [-1, 1]) \quad \text{und} \quad \text{asn}=([-1, 1], x \mapsto asn(x), [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]).$$

asn (oder arcsin oder $\sin^{-1}$) ist die übliche Bezeichnung für die Umkehrabbildung von $\sin_E$.Es gilt $\sin_E(x) = \sin x$ für alle x mit :$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Für die übrigen x ist der Wert nicht erklärt. All dies codiert man wie fast immer günstig in einer Skizze:

	
Rechts schon zu weit, links kann man noch weiter.	Hier ist der Sinus umkehrbar!

Die allgemeinen Beziehungen aus (8.3.65) zwischen Funktion und ihrer inversen gelten natürlich auch hier. Also asn(sin(x))=x für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Oder auch $sin(asn(nsin\varepsilon)) = nsin\varepsilon$,was wir in (1.7.8) benutzt haben.

☐ Wieso ist $cos(asn(x)) = \sqrt{1-x^2}$?

8.3.6b **Der Rechenausdruck**

(5.3.72) Damit ist der erste der eingangs in (8.3.64) genannten Programmpunkte abgearbeitet. Der zweite bestand in der Frage: Wie erhält man einen Rechenausdruck für den Wert der Umkehrfunktion? Wir nehmen an, wir verfügten über einen Rechenausdruck f(x) für die Ausgangsfunktion. Dann gilt y=f(x), wobei x unabhängige Variable ist und y abhängig. Jetzt ist y aber nicht mehr zu berechnen, sondern vorzugeben. Das verlangt einen **Rollenwechsel**: Wir machen y zu einem äußeren Parameter und x zu einer Unbestimmten. Dann bestimmen wir die Lösungsmenge. Diese sollte (für alle zulässigen y) genau ein Element haben. Falls wir die Umkehrbarkeit gesichert haben, muß das auch der Fall sein. Falls es nun möglich ist, die Gleichung y=f(x) nach x aufzulösen (umzustellen), sind wir fertig: Die (dann eindeutige) Auflösung gibt die gesuchte Berechnungsformel. ($y = x^3$ nach x auflösen gibt $x = \sqrt[3]{y}$.)
(8.3.73) Ein Beispiel: $f(x) = 8x^3 - 27$. Die Gleichung heißt $y = 8x^3 - 27$. Nach x umstellen gibt: $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y+27}$. Das ist offensichtlich die gesuchte Berechnungsformel.

☐ Invertieren Sie $(D, x \mapsto 5\sin(\frac{1}{2}x + 8) - 12, W)$. Dabei sind D und W geeignet zu bestimmen. Insbesondere soll D den Punkt $x_0 = -4$ enthalten. asn ist als bekannt Funktion anzusehen. (Skizze anfertigen!)

☐ Versuchen Sie sich an y=x+sin(x).

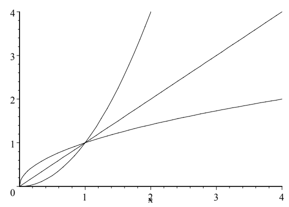
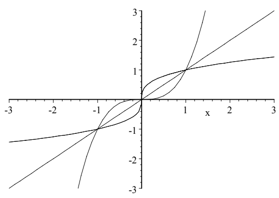
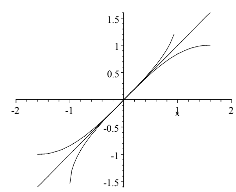
8.3.6c **Der Graph**

(8.3.74) Der dritte Programmpunkt in (8.3.64) beinhaltete die Frage nach dem Graphen der inversen Funktion. Auch hierfür haben wir bereits Vorarbeit geleistet: Wir konnten den Graphen der zu invertierenden Funktion f verwenden, nur waren die beiden Koordinatenachen vertauscht. Die Graphenkonstruktion verlangte, daß man mit der horizontal liegenden Achse begann, nicht mit der vertikal liegenden. Spiegelt man alles an der ersten Winkelhalbierende, dann werden die beiden Achsen vertauscht.

! Ergebnis.

> **Wird der Graph von f an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt, dann erhält man den Graphen der inversen Funktion.**

(8.3.75) Einige Beispiele mit f, $\overset{-1}{f}$ und der Winkelhalbierenden y=x

		
x$\mapsto x^2$ und x$\mapsto \sqrt{x}$	x$\mapsto$x^3 und x$\mapsto \sqrt[3]{x}$	sin und asn

(8.3.76) Hat man den Graphen von f, dann kann man den Graphen von $\overset{-1}{f}$ notfalls wie folgt konstruieren. Man legt ein Winkeldreieck an die Winkelhalbierende an und trägt den jeweiligen Schnittabstand (mit der Figur) nach der entgegengesetzten Seite ab.

☐ Die Zuordnungen $x \mapsto x$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ haben bezüglich der Invertierung eine Besonderheit, die sich sowohl im Rechenausdruck wie im Graphen bemerkbar macht. Welche ist das? Finden Sie noch weitere Beispiele?

☐ Invertieren Sie x$\mapsto \cos x$ in Form einer graphischen Skizze. Und zwar so, daß Sie das übliche Resultat der Taschrechner erhalten

☐ Invertieren Sie den Tangens so, daß der Ursprung enthalten ist. Skizze und Vergleich mit dem Taschenrechner. Vgl. (6.3.30).

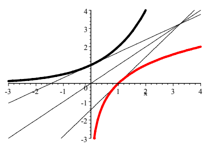
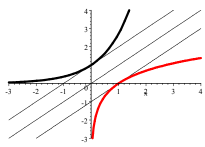
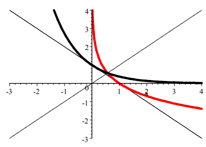
Untersuchen Sie mit Hilfe des Graphen, ob $x \mapsto x + \sin x$ umkehrbar ist.

8.3.6d **Der Logarithmus**

(8.3.77) Inzwischen haben wir praktisch alle Funktionen der Grundausstattung hinsichtlich ihrer Invertierbarkeit analysiert. Eine Ausnahme bildet die Exponentialfunktion. Vgl. Kap.8.2.3. Ihr wenden wir uns jetzt zu.

(8.3.78) Wir inspizieren zunächst den Graphen von $E_a$mit a>1. BildE_a $=]0,\infty[$, wie man sofort sieht. Und hieraus gehört zu jedem y genau ein x-Wert, so daß Umkehrbarkeit vorliegt. Unsere Konstruktionsmethode liefert sofort den Graphen der Umkehrfunktion. Wichtig war bei E_a die Steigung der Tangente an den Punkt (0,1). Bei der Spiegelung wird aus der Geraden y=1+mx die Gerade y=$\frac{1}{m}(x-1)$. Dh. alle Umkehrfunktionen gehen durch (0,1) mit der reziproken Steigung!

(8.3.79) Einige Bilder (von Exponentialfunktionen samt Graph der Umkehrung):

		
x$\mapsto$ 2^x mit Umkehrf und Tangenten	. x$\mapsto$ e^x mit Umkehrf Steigungen 1!	x$\mapsto$ e^{-x} mit Umkehrf Steigungen -1!

(8.3.80) Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion wird *Logarithmus zur Basis a* genannt. Symbol $\log_a$. Bei a=e, also der von uns früher ausgezeichneten Exponentialfunktion, spricht man vom *natürlichen Logarithmus* und verwendet das Symbol ln. Die beteiligten Mengen entnimmt man problemlos den Skizzen. Es folgt selbsterklärend:

$$\begin{array}{ll} E_a = (\mathbb{R}, x \mapsto a^x,]0,\infty[) & \log_a = (]0,\infty[, y \mapsto \log_a(y), \mathbb{R}) \\ \exp = (\mathbb{R}, x \mapsto e^x,]0,\infty[) & \ln = (]0,\infty[, y \mapsto \ln(y), \mathbb{R}) \end{array}$$

Und für die Werte:

y=a^x	x=$\log_a(y)$	$a^{\log_a(y)} = y$	$\log_a(a^x) = x$
y=e^x	x=ln(y)	$e^{\ln(y)} = y$	$\ln(e^x) = x$

(8.3.81) Damit folgt beispielsweise a=$e^{\ln(a)}$. Folglich $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$. Hierdurch ist E_a auf die Exponentialfunktion zurückgeführt, ebenso wie der allgemeine Logarithmus auf den natürlichen. In Gleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_a(x) = a^x = e^{x\cdot\ln(a)} \\ \hline \log_a(y) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}}$$

Wie angekündigt, kann man Hilfe der einen Exponentialfunktion alle übrigen erhalten.

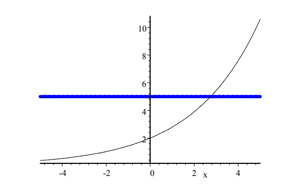
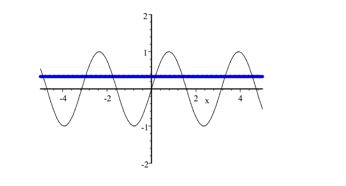
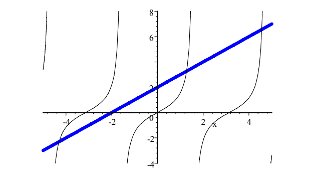
(8.3.82) Dem Graphen entnehmen wir wichtige Eigenschaften des Logarithmus: Er geht nach -∞ für x positiv nach Null. Er hat eine Nullstelle bei x=1 und wächst dann monoton. Hinsichtlich der Stärke des Wachstums (mit multiplikativem Konflikt) gilt eine zur Exponentialfunktion analoge und zu merkende Regel:

Der Logarithmus verliert gegen jede Potenz! D.h. x$^{-a}\ln x$ geht nach Null für große x und a>0. Dasselbe gilt für x$^{a}\ln x$ für x positiv nach Null und a>0!

Wir werden hierauf noch zurückkommen. Denken Sie an diese Regeln besonders auch dann, wenn ein Graphikprogramm Ihnen ein Bildchen produziert, das auf anderes Verhalten hindeutet! Andernfalls können Sie leicht hereinfallen.
(8.3.83) Wir haben in (8.2.34) die Funktion $x \mapsto x^x$ eingeführt. Diese schreiben wir jetzt $x \mapsto e^{x\ln(x)}$. Für x (positiv) nach Null geht das nach der Regel gegen e^0 = 1 in Übereinstimmung mit dem Bild in (8.2.34).

8.3.6e **Das Auflösen von Gleichungen mit Hilfe einer inversen Funktion**

(8.3.84) Es kommt vor, daß man Bestimmungsgleichungen mit Hilfe einer der hier eingeführten inversen Funktionen löst. Etwa $2e^{x/3} = 5$ oder sin$2x = \frac{1}{3}$ oder $tanx = 2 + x$. Dann ist in jedem Fall ein Skizze angebracht, die einen über Lage und eventuelle Zahl der Lösungen informiert. Denn besonders im Falle der trigonometrischen Funktionen liefern einem die inversen Funktionen keineswegs alle Lösungen. Die drei Beispiele ergeben folgendes graphisches Bild:

		
Eine Löung bei x$_0 \approx 3$.	2 Lösungserien x$_{1n}$ und x$_{2n}$	Eine Serie x$_n$.
	asn liefert eine Lösung x$_1$	atn liefert keine Lösung

Man sollte Bilder bzw. Skizzen anfertigen, um Bezeichnungen für die Lösungen einzuführen und ihre Lage abzuschätzen.
(8.3.85) Die erste Gleichung geht problemlos. Auf beide Seiten von 2e$^{\frac{1}{3}x_0}$ = 5 den Logarithmus anwenden (also beide Seiten in die Zuordnung hineinstecken) gibt nach den Rechenregeln für ln:

$$x_0 = 3(\ln 5 - \ln 2) \approx 2.75$$

Das entspricht der Vorhersage der Skizze.
(8.3.86) Wendet man auf die zweite Gleichung sin(2x)=$\frac{1}{3}$ den asn an, erhält man nur die eine Lösung x$_1$ mit $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$. Alle weiteren Lösungen muß man über die Eigenschaften der Sinusfunktion erschließen. Offenbar ergibt x$_{1,n} = x_1 + 2\pi n$ für jedes ganze n die erste Serie. Die auf x$_1$folgende Lösung liegt bei $\pi - x_1$, so daß x$_{2,n} = (\pi - x_1) + 2\pi n$ für ganzes n gilt. Oder: x$_{2,n} = (2n + 1)\pi - x_1$. Den Wert von x$_1$ erhalten wir in Übereinstimmung mit dem Bild zu

$$x_1 = asn(\frac{1}{3}) \approx 0.34.$$

Ohne eine Skizze werden häufig Lösungen vergessen.
(8.3.87) Die dritte Gleichung schließlich können wir nicht auf analoge Weise lösen, da man nicht nach x umstellen kann. Die Figur zeigt uns, wo die Lösungen in etwa liegen. Für die genauere numerische Bestimmung brauchen wir jedoch andere Methoden. Eine davon werden wir später kennen lernen.

8.4 **Hilfen bei der Verhaltensanalyse**

Das Ziel dieses Kurses ist es nicht, die Studenten zu kleinen, schematisch arbeitenden Rechenautomaten auszubilden, sondern zu Personen, die verständig und sinnvoll mit Formeln und Funktionen umgehen können und die in der Lage sind, sich aktiv mit neuartigen Problemen auseinanderzusetzen. Die jetzt zu behandelnden Themen sind hierfür besonders wichtig, fehlen aber meist in den Einführungen.

8.4.1 **Kleine Transformationen**

(8.4.1) Das menschliche Gehirn ist beim Erbringen gewisser geometrischer Leistungen enorm leistungsfähig, kann bestimmte Gestaltveränderungen ausgezeichnet erkennen. Das gilt auch für die Gestalt von Funktionsgraphen. Die jetzt zu besprechende Methode zielt darauf ab, sich diese Leistungsfähigkeit des menschlichen Gehirns zunutze zu machen.

(8.4.2) Die Methode geht davon aus, dass sich bestimmte geometrische Änderungen des Funktionsgraphen durch entsprechende einfache Änderungen des Rechenausdrucks erreichen lassen. Also: Ändert man den Rechenausdruck in einer bestimmten Weise systematisch ab, entspricht das einer bestimmten geometrische Veränderung des Graphen. Und umgekehrt rührt eine solche geometrische Transformation immer von einer Anwendung der Änderungsregel im Rechenausdruck her. Wir wollen die angesprochenen Änderungen *Kleine Transformationen* nennen.

(8.4.3) Nehmen wir etwa den Graphen der Standardparabel $x \mapsto x^2$. Wir können ihn als geometrisches Objekt gut vorstellbar um x_0 parallel zur x-Achse oder um y_0 parallel zur y-Achse verschieben. Und wir wissen, wie man den Rechenausdruck abzuändern hat, um diese beiden Transformationen des Graphen zu bewirken: Im ersten Fall ist einfach überall x durch $x-x_0$ zu ersetzen, im zweiten ist in y=f(x) die Koordinate y durch $y-y_0$ zu ersetzen und das bedeutet, dass y_0 zu f(x) hinzuzuaddieren ist! $y = y_0 + f(x)$.

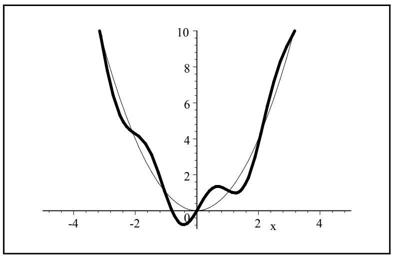
☐ Wie erhält man geometrisch den Graphen von $y=a+(x-a)^2$ aus dem von $y=x^2$?

(8.4.4) Zwei weitere gut vorstellbare Transformationen sind Umskalierungen der beiden Achsen: Geht man etwa von $x \mapsto \sin x$ zu $x \mapsto 2\sin x$ über, so heißt das, dass alle (vertikalen) Höhen verdoppelt werden. Insbesondere gilt das für die Amplitude. Geht man zu $x \mapsto \sin(2x)$ über, so heißt das, dass die Frequenz verdoppelt wird. Oder der gesamte Graph wird in Bezug auf die x-Achse auf die Hälfte zusammengezogen, gestaucht. Ist A negativ, so enthält y=Af(x) noch zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.

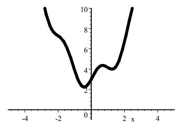
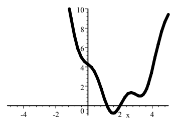
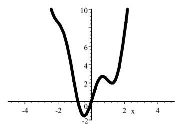
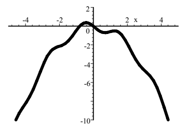
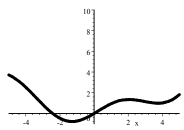
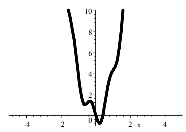
(8.4.5) Nimmt man alles zusammen, so kann man sagen: Man muss nur $x \mapsto \sin x$ kennen, um auch alle Funktionen $x \mapsto B + A\sin(\alpha(x-a))$ zu beherrschen! Ebenso genügt eine einzige Normalparabel für alle Parabeln.

☐ Was besagt der Übergang von y=f(x) zu y=f(-x) geometrisch?

(8.4.6) Wir geben jetzt eine Tabelle, in der wir für die kleinen Transformationen systematisch zusammenstellen, welche Änderung des Rechenausdrucks zu welcher Änderung des Graphen gehört. Als Referenzfunktion wählen wir $y = x^2 + \sin(3x)$ mit nachfolgendem Graphen.x^2



Das Verhalten dieses Graphen selbst sollte klar sein. Zur Verdeutlichung haben wir noch die Parabel mit eingezeichnet.

Modifizierter Rechenausdruck	Transformation	Bildbeispiel
y=f(x)+y_0	Vertikale Verschiebung	 $y_0 = 3$
y=f(x-x_0)	Horizontale Verschiebung	 $x_0 = 2$
y=Af(x) A>0	Vertikale Skalierung	 A=2
y=Af(x), A<0	mit Spiegelung	 A= $-\frac{1}{2}$
y=f($\frac{1}{a}x$) a>0	Horizontale Skalierung	 a=3
y=f($\frac{1}{a}x$) a<0	Mit Spiegelung	 a=-$\frac{1}{2}$

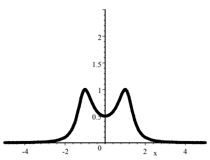
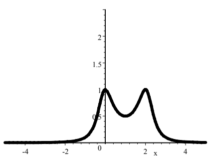
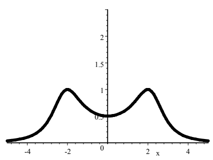
(8.4.7) Betrifft die Transformation die x-Achse, so ist ein Wechsel vorzunehmen: Man hat $x - x_0$ und $\frac{x}{a}$ für die Verschiebung um $+x_0$ und die Multiplikation mit a. Betrifft die Transformation die y-Achse, so ist das nicht der Fall: y_0+f(x) und Af(x). Aber beachten Sie: Das läßt sich auch als $\frac{1}{A}(y - y_0) = f(x)$ schreiben.

☐ Erklären Sie die Punktrichtungsform der Geradengleichung mit Hilfe kleiner Transformationen. Starten Sie mit der einfachen Geraden $y = x$!

☐ Welche kleine Transformation war für die Flugparabel wichtig?

☐ Skizzieren Sie $y = (x^2-1)^2+1$ und dann $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2+1}$. Was ergibt sich durch kleinen Transformationen?

Die Skizze zeigt einige Beipiele kleiner Transformationen. Ergänzen Sie die fehlenden Teile.

		
f(x)	$f_1(x)$ =??	$f_2(x)$ =??
?Skizze??	?Skizze??	?Skizze??
$f_3(x) = 2 + \frac{1}{2}f(x)$	$f_4(x) = \frac{2}{(2x^2-1)^2+1}$	$f_5(x) = \frac{1}{(x^2-2)^2+4}$

☐ Gehen sie aus von der Glockenkurve $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Welche Funktionen lassen sich hieraus durch kleine Transformationen erzeugen? Vgl. (2.3.18)

(8.4.8) Natürlich kann man auch mehrere kleine Transformationen gleichzeitig anwenden. Und es kommt vor, dass verschiedene Änderungen des Rechenausdruckes bei einer bestimmten Funktion zu demselben Resultat führen. So gilt $Ax^2 = (\sqrt{A}x)^2$ für A>0. D.h. Skalierung der y-Achse um A und Skalierung der x-Achse um $\frac{1}{\sqrt{A}}$ ergeben für die Parabel dasselbe Resultat.

☐ Wenden Sie die kleinen Transformationen auf die "Gleichung für den Einheitskreis" $x^2 + y^2 = 1$ an. Was erhält man? Die beiden Achsen auch unterschiedlich skalieren!

8.4.2 Umformungen des Rechenausdrucks

(8.4.9) Wir haben in 1.5.2 und 1.5.3 gesehen, dass ein quadratisches Polynom in mehreren unterschiedlichen Formen auftreten kann. Ein und dieselbe Zuordnung kann durch unterschiedliche Zuordnungsverfahren realisiert werden. Und diese Verfahren können per Inspektion ganz unterschiedliche Information über das Verhalten liefern. Tritt etwa die Zuordnung $x \mapsto p(x)$ in der Form $p(x) = (x-2)(x-3)$ auf, so erkennt man sofort die Lage zweier Nullstellen sowie das Verhalten für große x. Hat man dagegen $p(x) = x^2 - 5x + 6$, so erhalten wir per Dominanzargument das Verhalten bei x=0. Und die Form $p(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$ zeigt uns die Lage des Scheitelpunktes. Vgl. Kap.1.5.3.
(8.4.10) Die Erfahrung des Beispiels läßt sich verallgemeinern: **In vielen Fällen ist es möglich und günstig, das Verhalten von Funktionen dadurch zu studieren, dass man rechnerische Umformungen des Rechenausdruckes vornimmt. Hierdurch kann Information über das Verhalten, die in der ursprünglichen Form verborgen war, leichter zugänglich gemacht werden.**
(8.4.12) Teilweise muss man sich fallspezifische Tricks ausdenken, teilweise gibt es Methoden, die sich einigermaßen systematisch anwenden lassen. Wir wollen einige Beispiele diskutieren, keine systematische Anleitung geben. Das Umformen des Rechenausdrucks ist eine Methode, bei der Phantasie, Beobachtungsfähikeit und Erfahrung kreativ zusammenwirken. Im Hauptteil dieses Kapitels werden wir mit der Tangentenzerlegung eine außerordentlich tragfähige allgemeine Anwendung der Idee kennen lernen.
(8.4.13) Wir geben als Beispiele mehrere kleine Rechnungen, die bei Zuordnungsinterpretation jeweils eine nützliche Umformung des Rechenausdrucks ergeben.

- Ein wichtiges Beispiel zu den **trigonometrischen Funktionen**: Hier sind Umformungen der folgenden Art nützlich:

$$\boxed{\text{x} \mapsto \text{sinx+cosx} = \sqrt{2}\sin(\text{x}+\tfrac{\pi}{4}).}$$

  Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen der rechten Seite über das Additionstheorem. Der erste Rechenausdruck zeigt nur grob an, dass erneut eine sinusartige Funktion entsteht. Es könnte sich durchaus etwas nicht als Sinus Darstellbares ergeben. Die rechte Seite liefert mit Hilfe der kleinen Transformationen sofort: Es liegt eine um$\sqrt{2}$ skalierte Sinuschwingung vor, die in x-Richtung um $-\frac{\pi}{4}$verschoben ist.

(8.4.14) Wie **verallgemeinert** man die Umformung? Man hat es zunächst mi einem Ausdruck der Form $a\sin\alpha + b\sin\alpha$ zu tun. Diesen möchte man in die Form Asin$(\alpha+\delta)$ bringen. Man möchte also die Gleichung

$$a\sin\alpha + b\sin\alpha = A\sin(\alpha+\delta)$$

lösen,wobei A und δ die Rolle von Unbestimmten, der Rest die äußerer Parameter erhalten. Die rechte Seite wird über das Additionstheorem umgeformt. Koeffizientenvergleich gibt Acos$\delta = a$ und Asin$\delta = b$. Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen liefert die erste Unbestimmte zu A=$\sqrt{a^2+b^2}$. Dann folgt für die zweite cos$\delta = \frac{a}{A}$ und sin$\delta = \frac{a}{A}$ und tan$\delta = \frac{a}{b}$.
(8.4.15) Das Ergebnis läßt sich problemlos in ein **Rechenschema** umsetzen. Man muss sich nur die Formel für A, also A=$\sqrt{a^2+b^2}$, merken und diese Größe gezielt ausklammern:

$$a\sin\alpha + b\sin\alpha = A(\tfrac{a}{A}\sin\alpha + \tfrac{b}{A}\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\delta) \text{ mit } \tan\delta = \tfrac{b}{a}$$
$$2\sin\alpha + 3\sin\alpha = \sqrt{13}(\tfrac{2}{\sqrt{13}}\sin\alpha + \tfrac{3}{\sqrt{13}}\cos\alpha) = \sqrt{13}\sin(\alpha+\delta) \text{ mit } \tan\delta = \tfrac{3}{2}.$$

Beachten Sie $\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1$, so dass man $\frac{a}{A} = \cos\delta$ und $\frac{b}{A} = \sin\delta$ setzen kann. (Dasselbe δ!)

- Beispiel: Eine **Wurzelfunktion**:

$$\boxed{\text{x} \mapsto x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{(1-x)(1+x)}}$$

  Die Zerlegung des Faktors $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ über den 3. Binomi erweist sich vielfach als nützlich. Zunächst erkennt man: Nullstellen bei 0 und ±1. (Die bei -1 wird gern übersehen!) Außerdem kann man per Dominanzargument sofort das genauere Verhalten verstehen. Bei x=1 ergibt sich etwa $f(x) \approx \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Bei x=0 hat man $f(x) \approx x$. Dass eine ungerade Funktion vorliegt wird dagegen über die erste Form deutlicher.

- Besonders nützlich ist die Methode im Bereich der **rationalen Funktionen**, also der Quotienten aus zwei Polynomen. Ein typisches Beispiel:

$$\boxed{\mathrm{x}\mapsto \tfrac{x}{x^2-9}=\tfrac{x}{(x-3)(x+3)}=\tfrac{1}{2}\tfrac{(x-3)+(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{x+3}+\tfrac{1}{x-3}\right)}$$

Die erste Form zeigt die Parität: Die Funktion ist ungerade. (x durch -x ersetzen). Die zweite zeigt Existenz und Lage zweier Pole. Die dritte gibt einen rechnerischen Trick, der unmittelbar zur vierten Form führt. und diese vierte Form erlaubt je ein Dominanzargument bei den beiden Polstellen. Das Verhalten bei Null dagegen ersieht man wieder aus der ersten Form, aber nicht aus der letzten. Dafür bietet sich ebenso die zweite Form an. Schließlich kann man noch schreiben

$$\frac{x}{x^2-9}=\frac{(1/x)}{1-\frac{9}{x^2}}.$$

Diese Form zeigt, dass die Funktion für große x asymptotisch wie $x\mapsto\frac{1}{x}$ nach Null geht. Man erhält diese Form generell, indem man durch die höchste Variablenpotenz aus Zähler und Nenner dividiert.

- Eine andere sehr nützliche Umformung ergibt sich durch **gezieltes Ausklammern** von Faktoren in einem Nenner:

$$\boxed{\tfrac{1}{3x^2+4}=\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\frac{3x^2}{4}+1}=\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+1}=\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\left(\frac{x}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}\right)^2+1}}$$

Die letzte Form zeigt, dass wie man die Funktion über zwei kleine Transformationen aus der Standardglocke erhält.

- Bei Potenzen ist **quadratische Ergänzung** immer wieder nützlich. Das folgende Beispiel ist typisch:

$$\boxed{x\mapsto e^{-x^2+2x}=e\cdot e^{-(x-1)^2}}$$

Die zweite Form folgt über kleine Transformationen aus der Gaußschen Glockenkurve.

☐ Wie sollte man $y=\frac{1}{x^2+6x+10}$ umformen?

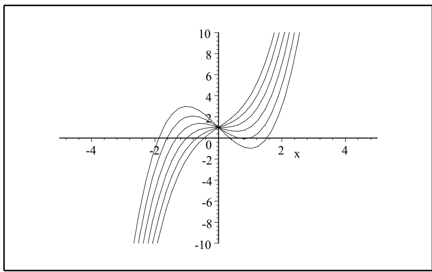
(8.4.16) Im Bereich physikalischer Formeln findet man häufig Funktionsargumente der Form $\omega t+\varphi$ vor. Wir erinnern etwa an die Argumente sinusförmiger Vorgänge in Kap.(6.3.3). Diesen Ausdruck formt man nützlicherweise wie folgt um $\omega t+\varphi=\omega(t-t_0)$ mit $\mathrm{t}_0=-\frac{\varphi}{\omega}$. In der ersten Form wird zuerst skaliert und dann der Ursprung verschoben, in der zweiten wird erst der Ursprung verschoben und dann skaliert. Die zweite Form ist in der Regel nützlicher: $\sin(\omega(t-t_0))$ besagt geometrisch: Um t_o verschobener Sinus mit Kreisfrequenz ω.

(8.4.17) In 1.6 haben wir besprochen, wie man ebene Figuren mit Hilfe von Gleichungen zwischen den Koordinaten beschreibt. Die Methode der kleinen Transformationen ist auch auf solche Gleichungen anwendbar. Neben reinen Termumformungen kann man hier auch Gleichungsumformungen vornehmen. So kann man beispielsweise die Gleichung $x^2+y^2=r^2$ in das gleichwertige $y^2=r^2-x^2$ umwandeln und durch anschließendes Wurzelziehen (mit Rollenwechsel) die Lösungsmenge parametrisieren: $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$. Das sind naheliegende Ergänzungen und Verallgemeinerungen der besprochenen Methoden, auf die man bei Bedarf eigenständig kommen sollte. Vgl.(8.4.51)

8.4.3 **Kurvenscharen**

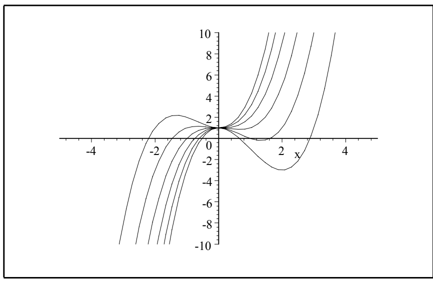
(8.4.18) Häufig hängt eine Funktion noch von einem (oder mehreren) äußeren Parametern ab. Man spricht dann gerne von einer *Kurvenschar.* Ändert man den Parameterwert, so ändert sich das Verhalten der Funktion. Aber in der Regel nicht irregulär willkürlich, sondern in einer ganz bestimmten Weise. Bestimmte Merkmale der Form des Graphen ändern sich, während andere erhalten bleiben. Es kommt dann darauf an, zu erkennen, was sich ändert und dies möglichst prägnant zu charakterisieren. Insbesondere sollte man erkennen, ob Änderungen von der Art der kleinen Transformationen vorliegen. Vgl. die Beispiele aus dem Bereich der komplexen Widerstände in Kap. 6.3.3.

(8.4.19) Zwei sehr einfache Beispiele für Kurvenscharen sind $f_a(x) = \sin(ax)$ und $g_A(x) = A \sin x$. Im ersten Fall wird die Periode, im zweiten die Amplitude verändert, beides mit Hilfe kleiner Transformationen.
(8.4.20) Ein Beispiel, bei dem die Änderung nicht vom Typ der kleinen Transformationen ist, wird durch $p_m(x) = x^3 + mx + 1$ gegeben. Der Einfluss von m ist einfach zu erfassen: Für große x dominiert x^3. Bei $x = 0$ hat man $y = mx + 1$ als von m abhängige Approximation. Also eine Gerade durch (0,1) mit Steigung m. Jetzt kann man sofort interpolieren. m>0 und m<0 geben qualitativ unterschiedliches Verhalten: Für m>0 liegt dieselbe Art von Wachstum vor, wie für große x. Im Falle von m<0 ist das anders. Und sobald m ausreichend negativ ist, werden auch drei Nullstellen vorliegen. Die Graphik verdeutlicht das Gesagte:



$p_m(x) = x^3 + mx + 1$
für $m = -3, -2, ..., 2$.
Etwa ab $m = -2$
entstehen drei Nullstellen
$y \approx mx + 1$ bei x=0.
(0,1) ist gemeinsam.

(8.4.21) Wir ändern das Beispiel etwas ab und betrachten $q_m(x) = x^3 + mx^2 + 1$. Hier ist $y = mx^2 + 1$ bei x=0 dominant. D.h. die Korrektur erfolgt zu beiden Seiten des Ursprungs in dieselbe Richtung. Die Ursprungssteigung ist immer 0. Wieder einige Beispiele:

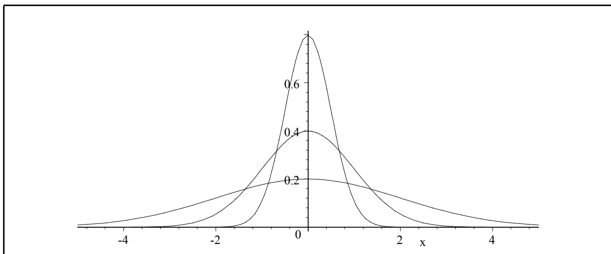


$q_m(x) = x^3 + mx^2 + 1$
$m = -3, -2, ..., +2$
Dominanz: 1+x^2 bei x=0.
Alle mit Steigung Null
in x=0.
Der Einfluß von m reicht
hier weiter.

(8.4.22) Wie weit reicht der Einfluss des mx^2-Termes? Als Anhaltspunkt könnte man verlangen, dass dieser Term nur noch weniger als 10% des führenden Beitrages ausmacht. Das ergibt einen Wert für x, von dem ab das der Fall ist:

$$\frac{|mx^2|}{|x^3|} \leq \frac{1}{10} \text{ Also ab } |\mathrm{x}| \approx 10\,|m|\,.$$

☐ Führen sie eine analoge Betrachtung für die vorherige Schar durch. Was ändert sich?
(8.4.23) Die Glockenkurven vom Typ der Gaußschen Normalverteilungen bilden ein wichtiges Beispiel einer Kurvenschar mit einem äußeren Parameter σ. Wir stellen Form und Rechenausdruck vor. Die Entstehung der Glockenform haben wir bereits bei der Zusammensetzung von Funktionen erklärt. Der Parameter σ beschreibt die Breite der Glocke.



$n_{0,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
$\sigma = \frac{1}{2}, 1, 2$
Die Breite wächst mit σ.
Dagegen nimmt die Höhe
mit σ ab. Der Flächeninhalt
bleibt konstant!

☐ Bestimmen Sie eine Schar überall glatter Kurven, deren Graphen die (für x=0 nicht definierte) Funktion x$\mapsto$ $|x| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$ approximiert. Nehmen Sie $\mathrm{f}_a(x) = \frac{2}{\pi} atn(\frac{x}{a})$ für a>0. Was geschieht für a gegen Null? Wodurch wird f_a in der Nähe von x=0 dominiert?

☐ Diskutieren Sie das Verhalten der Funktionen $g_n(x) = \frac{H}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^n}$ für n nach unendlich.

8.4.4 **Geometrische und einheitenfreie Größen**

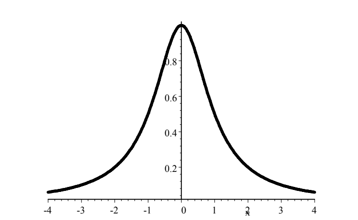
(8.4.24) Hat man die Gleichung einer Kurvenschar, dann kann man auch hier versuchen, den Rechenausdruck geeignet umzuformen, **wobei die äußeren Parameter einzubeziehen sind**. Meist wird man dabei Hilfsgrößen einführen. So ergeben sich einige neue und nützliche Vorgehensweisen.
(8.4.25) Wir werden zwei Zielrichtungen verfolgen: **Einmal die eventuellen äußeren Parameter so umzugestalten, daß sie eine manifeste geometrische oder auch physikalische Bedeutung erhalten.** So finden wir mit quadratischer Ergänzug

$$y = x^2 + 2ax + 4 = (x - (-a))^2 + (4 - a^2).$$

Und das besagt, dass eine Normalparabel vorliegt mit Scheitel im Punkte $(-a, 4 - a^2)$. Oder auch: Mit Scheitel auf der Parabel $y = 4 - x^2$!. D.h., wir haben eine unmittelbare geometrische Beschreibung der Kurvenschar. Hätte man mit $x^2 + 3bx + 4$ begonnen, so könnte man $3ax = 2 \cdot \frac{3b}{2}x$ schreiben und $a = \frac{3b}{2}$ als Hilfsgröße einführen.
☐ In $x \mapsto \frac{H}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^n} = \frac{b^n}{a^n+x^n}$ und $H = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ hat H unmittelbare geometrische Bedeutung, b dagegen nicht. Begründen sie das. Wie steht es dagegen mit den Maßeinheiten?
(8.4.26) Die zweite Zielrichtung sieht wie folgt aus: Kommt die Formel aus dem physikalischen Bereich, dann haben die einzelnen Buchstaben der Formel eine physikalische Einheit. **Durch Umformung, besonders Division, kann man versuchen, einheitenfreie Größen einzuführen.** Hierdurch wird die Zahl der Parameter und der zu diskutierenden Fälle vielfach stark reduziert. Vgl. (4.6.14-30) aus dem Bereich der Schnittmengenbestimmung und Kap.6.3.3.
(8.4.27) Beispiel:

$$f_{A,a,b}(x) = \frac{A}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{A/b^2}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} = \frac{y_0}{u^2+1}$$

Alle Funktionen der Schar gehen jetzt durch kleine Transformationen aus der folgenden "Normalkurve" hervor:



$v = v(u) = \frac{1}{u^2+1}$
$v(0) = 1$
$v(1) = \frac{1}{2}$

a und b haben dieselbe Einheit wie x. Sie haben eine geometrische Interpretation. a gibt die Lage des Mittelpunktes der Glocke und b die "Halbwertsbreite" der Glocke. Die Größen $v = \frac{y}{y_0} = \frac{y}{A/b^2}$ und $u = \frac{x-a}{b}$ dagegen sind beide einheitenfrei. Man kann sie als systembezogene Einheiten im Sinne von Kap.2.3.3 interpretieren.
(8.4.28) Im Zusammenhang mit Flugparabelrechnungen taucht vielfach die Größe $\frac{v^2}{2g}$ auf. etwa in (4.5.25). Sie hat die Einheit einer Länge. Man kann auch schreiben $\frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{m}{2}v^2}{mg\Delta H}\Delta H$. Das erlaubt die folgende Interpretation mit Hilfe des Energiesatzes: Starte eine vertikale Bewegung mit der Geschwindigkeit v, also kinetischer Energie $\frac{m}{2}v^2$. Im Scheitel ist die Geschwindigkeit 0, die gesamte Energie ist in die potentielle Energie $mg\Delta H$ umgesetzt. ΔH ist der maximal ereichbare Höhenunterschied. Nach dem Energiesatz ist $\frac{m}{2}v^2 = mg\Delta H$ und der Quotient ist 1. Also $\frac{v^2}{2g} = \Delta H$. Wir haben es mit einer typischen systemspezifischen Längengröße zu tun. Bei dem Rampenproblem in 4.6.2 haben wir daraus die einheitenfreie Größe $Q = 2\frac{\left(\frac{v^2}{2g}\right)}{A} = 2\frac{\Delta H}{A}$ gebildet. Also bis auf die 2 das Verhältnis von Steighöhe und Rampenweite A.
☐ Welche systembezogene Bedeutung haben Größen des Typs $\frac{v}{g}$ im Flugparabelbereich? (v eine Geschwindigkeit.)
(8.4.29) Fassen wir zusammen: **Drücke Variable mit Einheit möglichst als einheitenfreie Vielfache von systembezogenen Einheiten aus! Strebe eine Rückführung auf eine Normalform an.**

8.4.4a **Periodische Funktionen und Oszillationen**

(8.4.30) Sinus und Cosinus sind periodische Funktionen. Allgemein heißt eine Funktion f **periodisch** mit Periode P>0, wenn für alle x gilt f(x+P)=f(x). D.h.: Geht man mit x um P weiter, so erhält man denselben Funktionswert wie für x. Über Rechnungen wie f(x+2P)=f(x+P)=f(x) sieht man, dass sich der Funktionswert auch nicht ändert, wenn man um ein ganzzahliges Vielfaches von P weitergeht. Daher soll die Periode P immer die kleinste (echt) positive Zahl mit der Eigenschaft f(x+P)=f(x) sein. (Sofern f nicht konstant ist!) Sinus und Cosinus haben beide die Periode P=2π. Der Tangens dagegen hat ebenso wie $\sin^2$ die Periode π. Falls eine periodische Funktion vorliegt, ist deren **Periode** P eine herausragende geometrische Beschreibungsgröße des Graphen. Sie bietet sich etwa als natürliche, systembezogene Einheit der Achse an.

☐ Es seien f und g periodische Funktionen mit derselben Periode P. Welche unserer rekursiven Neukonstruktionen ergeben dann erneut eine periodische Funktion? Was läßt sich jeweils über die Periode sagen? (Zwei Fragen! Vorsicht bei der zweiten! Denken Sie an den Tangens). Bei der Zusammensetzung $g \circ f$ benötigt man weniger Voraussetzungen. Was genügt bereits? Überlegen Sie sich auch hierfür ein Beispiel, bei dem sich die Periode verkleinert.

(8.4.31) Die periodischen Funktionen liefern ein wichtiges Beispiel für den Unterschied zwischen rechnungsbezogenen und geometrischen Größen. Die übliche rechnerische Form eines sinusförmigen Vorganges ist $Asin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega(t - t_0)$ wie in Kap.6.3.3 besprochen. Die Kreisfrequenz ω ist nicht geometrisch, legt aber die Periode (="Schwingungsdauer") T über die Formel

$$\boxed{\text{T}=\tfrac{2\pi}{\omega} \text{ oder } \omega\text{T}=2\pi}$$

fest. Lesen Sie die Formel wie folgt: Wählt man den Zeitunterschied $\Delta t = T$, dann wird $\omega\Delta t = 2\pi$, also gleich der mathematischen Periode von Sinus und Cosinus! Damit schreibt sich unser sinusförmiger Vorgang $Asin(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$. Wir sehen: $\frac{t}{T}$ ist eine **einheitenfreie** Größe. Diese Größe durchläuft ein Intervall der Länge 1, wenn die physikalische Größe t eine Periode T durchläuft. D.h. $z = \frac{t}{T}$ ist die Zeit, gemessen in Einheiten der Systemgröße T.

☐ Ist x eine räumliche Koordinate und $f(x) = sin(\alpha x)$ so setzt man $\alpha x = 2\pi\frac{x}{\lambda}$. Welche geometrische Bedeutung hat $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$?

(8.4.32) Man wird daher allgemein versuchen, bei periodische Funktionen die Periode einzuführen und dann den Rechenausdruck so umzuschreiben, dass die unabhägige Variable nur noch in Form dieser einheitenfreie Hilfsgröße auftritt.

(8.4.33) Interessant und für Anwendungen relevant sind Anschlußprobleme der folgenden Art: Angenommen f ist perodisch mit Periode P_1 und g ist periodisch mit Periode P_2. Was läßt sich über die Funktion S=$\alpha f + \beta g$ sagen, eine Funktion, die die *ungstörte Überlagerung (von Größen)* beschreibt? Etwa zweier zeitabhängiger Wellenamplituden. Ist S erneut periodisch und wenn ja, mit welcher Periode? Man überlegt sich leicht: Gibt es zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 mit $n_1 P_1 = n_2 P_2 = P$, **dann ist S P-periodisch**, weil ja

$$S(x + P) = \alpha f(x + n_1 P_1) + \beta g(x + n_2 P_2) = S(x)$$

gilt. U.U. ist die Periode jedoch kleiner als $n_1 P_1 = n_2 P_2$. Man muss jeweils die kleinstmögliche Wahl treffen. Beispiel: S(x)=3sin(2x)+5cos(3x). Perioden sind $P_1 = \frac{2\pi}{2}$ und $P_2 = \frac{2\pi}{3}$. Also $P=2P_1 = 3P_2$ kleinstmöglich. Oder $P = 2\pi$ und ein $\omega=\frac{2\pi}{P} = 1$, was man über die Additionstheoreme sofort verifiziert. Damit folgt nämlich eine Form, die die Periode 2π sofort zeigt:

$$S(x) = 3\sin(2x) + 5\cos(3x) = 6\sin x\cos x + 20\cos^3 x - 15\cos x$$

☐. Verifizieren Sie diese Periode mit Hilfe der Graphen.

(8.4.34) Folgendes ist eine nützliche Modifikation der Fragestellung: Sei f periodisch mit Periode P und G beliebig. Was läß t sich über F=fG aussagen? Also F(x)=f(x)G(x). Etwa F(x)=$e^{-ax}\sin(\omega x)$. Die neue Funktion F wird i.a. nicht periodisch sein. Aber eventuelle Nullstellen werden von f auf F übertragen. Und diese Nullstellen folgen in f wegen der Periodizität im Abstand P aufeinander. Das bedeutet:

> Hat die periodische Funktion f eine Nullstelle bei x_0, dann hat F=fG eine Serie von Nullstellen im Abstand P. Oder verkürzt: **Die Periode von f gibt den Nullstellenabstand von fG.**

So hat F(x)=$e^{-ax}\sin(\omega x)$ eine Serie von Nullstellen bei 2nπ und eine zweite bei (2n+1)π. D.h. die Periode des Faktors f legt den Abstand 2π gleichartiger Nullstellen in F fest.

(8.4.35) Damit sind wir in der Lage, das für die Nachrichtentechnik wichtige Phänomen der *Schwebungen* zu diskutieren. Wir betrachten dazu die folgende Funktion

$$F(t) = a\sin(\omega_1 t) + b\sin(\omega_2 t).$$

Hier ist weder die Methode aus (8.4.14) anwendbar, die $\omega_1 = \omega_2$ verlangt, noch reicht die aus (8.4.33), weil $P_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ und $P_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ so sein könnten, dass sie keine gemeinsame Periode oder aber nur eine extrem große besitzen. Ist etwa $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 1.11$, also beides Perioden in der Größenordnung von 6, dann muss man $n_1 = 100$ und $n_2 = 111$ wählen, was eine gemeinsame Periode von $P = 100 \cdot 2\pi \approx 628$ gibt. Die kombinierte Periode ist sehr viel größer! Wie sieht die Funktion F aus? Zugehörige Graphen zeigen ein Erscheinungsbild, dass zunächst schwierig und komplex erscheint. **Hier hilft Umformen des Rechenausdrucks.** Die Umschreibung führt man günstig im Komplexen aus. Wir betrachten dazu $\underset{\sim}{F}(t) = ae^{i\omega_1 t} + be^{i\omega_2 t}$ und formen diese Größe trickreich um. Das gesuchte F ist dann der Imaginärteil (a,b reell und $\omega_2 \geq \omega_1$).

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{F}(t) &= ae^{i\omega_1 t} + be^{i\omega_2 t} = e^{i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t}\left(ae^{i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t} + be^{-i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\right) \\
&= e^{i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t}\left(\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t} + \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)e^{-i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\right) \\
&= e^{i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t}\left(\frac{a+b}{2} \cdot 2\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t) + \frac{a-b}{2} \cdot 2i\sin(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\right)
\end{aligned}$$

Alle Umformungen verifiziert man mit der Tunnelmethode leicht. Vgl.(6.1.21). Jetzt können wir den Imaginärteil bilden und finden:

$$\boxed{\begin{gathered}
a\sin(\omega_1 t) + b\sin(\omega_2 t) = F(t) = \mathrm{Im}(\underset{\sim}{F}(t)) \\
= (a+b)\sin(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t) \cdot \cos(\tfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t) \\
+(a-b)\cos(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t) \cdot \sin(\tfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t)
\end{gathered}}$$

Und das ist ein Form, die sich mit etwas Mühe diskutieren läßt! Dazu nehmen wir zunächst an, dass die beiden Kreisfrequenzen etwa gleich groß sind, so dass $\frac{|\omega_2-\omega_1|}{2} \ll \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ gilt. (Im gegebene Zahlbeispiel $\frac{0.11}{2} \ll \frac{1}{2}$.) Dann folgt für das Beispiel:

$$F(t) = 2sin(1t) + 3sin(1.11t) = 5\sin(1.055t)\cos(0.055t) - \cos(1.055t)\sin(0.055t)$$

Der erste Faktor in jedem der beiden Summanden liefert Schwingungen mit einer kleinen Periode $\frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$. **Während einer solchen Schwingung ist der zweite Faktor aber näherungsweise konstant** (Dominanz!)**.** Ersetzt man den zweiten Faktor per Dominanzargument durch eine Konstante, so kann man die in (8.4.14) besprochene Umformung des Rechenausdrucks vornehmen und man erhält eine Schwingung der Form $A\sin(1.055t + \delta)$ mit geeignetem A und δ.

(8.4.36) Man kann aber auch so argumentieren: Man nimmt die Umformung (8.4.14) ohne Beachtung der t-Abhängigkeit vor und erhält dann t-abhängiges A und δ. Aber diese beiden Funktionen ändern sich nur langsam, so dass man sie über 1 oder 2 Schwingungen von sin(1.11t) im Rahmen eines Dominanzargumentes als konstant ansetzen kann. Die Rechnung:

$$\boxed{\begin{aligned}
&F(t) = 5\sin(1.055t)\cos(0.055t) - \cos(1.055t)\sin(0.055t) \\
&= A(t)\sin(1.055t + \delta(t)) \\
&\text{mit } A(t) = \sqrt{25\cos^2(0.055t) + 1\sin^2(0.055t)} \\
&\text{und } \tan(\delta(t)) = -\tfrac{1}{5}\tan(0.055t)
\end{aligned}}$$

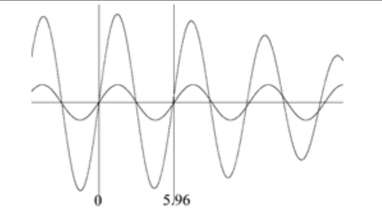
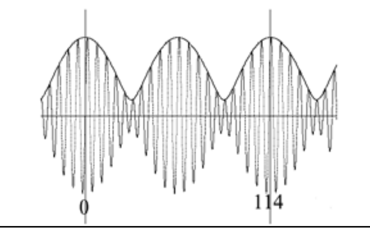
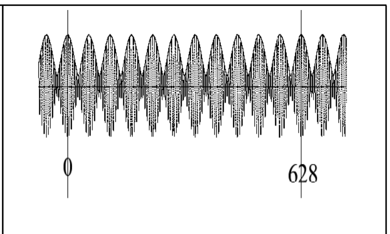
Damit können wir die Kurvenform verstehen: **Es liegt eine schnell veränderliche fast sinusförmige Schwingung der Kreisfrequenz 1.055 vor, deren Amplitude näherungsweise durch A(t) festgelegt, moduliert wird** ($\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$). Und infolge der t-Abhängigkeit von $\delta(t)$ werden auch die Nullstellenabstände der schnellen Schwingung leicht verändert. In A(t) treten Sinus und Cosinus nur als Quadrate auf, was eine Halbierung der Periode (und Verdopplung der Frequenz) bewirkt. Die Frequenz ist also nicht mehr $\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}$ sondern $\omega_A = |\omega_1 - \omega_2|$.

☐ Zeigen sie, dass A(t)=$\sqrt{25 - 24\sin^2 t} = \sqrt{13 - 12\cos(2t)}$ gilt. Wie sieht der Graph aus?

(8.4.37) Insgesamt haben wir es mit 3 Perioden zu tun. Es sind

- die kleine Periode der schnellen Schwingung mit $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Im Beispiel ist $\omega = 1.055$. Die zugehörige Periode ist etwa 6.
- die große Periode des Amplitudenfaktors A(t) mit Kreisfrequenz $\omega_A = \frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}$. Im Beispiel ist $\omega_A = 2 \cdot 0.055 = 0.11$. Die zugehörige Periode ist etwa 57.
- Und schließlich, sofern vorhanden, die ganz große Periode der gesamten Funktion. Im Beispiel ist sie $100 \cdot 2\pi \approx 628$.

Graphisch ergibt unser Beispiel für Bereiche in der Größe der drei Perioden das nachfolgende Bild. Dabei ist neben t$\mapsto f(t)$ auch t$\mapsto A(t)$ eingezeichnet. Man sieht erneut die Leistungsfähigkeit der Dominanzargumentation.

		
f und A über 2 kleine Perioden.	f und A über zwei große Perioden	Eine exakte Periode von f

Im ersten Bild ist eine kleine Änderung des Nullstellenabstandes zu erkennen. (Die Koordinatenlinien geben den von konstantem δ vorhergesagten Abstand.)

(8.4.38) Beachten Sie schließlich: Ändert man ω_1 oder ω_2 leicht ab, etwa $\omega_1 = 1.007$, dann ändern sich die ersten beiden Perioden kaum. Die dritte Periode dagegen enorm. Die exakte Periode ist daher eine Größe, die für die Anwendungen meist wenig wichtig ist.

☐ Für a=b ergibt sich eine beträchtliche Vereinfachung. Diskutieren Sie diesen Fall genauer. (Die üblichen Physikeinführungsbücher stützen sich auf das Verhalten dieses Falles. Welches Phänomen des allgemeinen Falles geht dabei verloren?)

(8.4.39) Generell kann man analog zu (8.4.36) die folgende Umschreibung des Rechenausdrucks als Grundlage der Diskussion vornehmen:

F(t)=$a\sin(\omega_1 t) + b\sin(\omega_2 t) = A(t)\sin(\omega t + \delta(t))$
mit $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ und $\omega_A = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ und
A(t)=$\sqrt{(a+b)^2\cos^2(\omega_A t) + (a-b)^2\sin^2(\omega_A t)}$ und
$\tan\delta(t) = \frac{a-b}{a+b}\tan(\omega_a t)$

Damit argumentieren wir wie folgt: A(t) ist eine Funktion, die zwischen |a+b| und |a-b| mit der Kreisfrequenz $2\omega_A$ hin und her oszilliert. Also $|F(t)| = |A(t)\sin(\omega t + \delta(t))| \leq A(t)$. F muss also immer zwischen $-A$ und A laufen. Ist ω nicht sehr viel größer als $|\omega_A|$, dann wird der Bereich zwischen den beiden Begrenzungskurven nur wenig und irregulär aufgefüllt. Die Begrenzungskurven selbst werden immer wieder berührt und die Nullstellenabstände weichen stärker von der kleinen Periode ab.

☐ Inspizieren Sie mit Hilfe eines Computeralgebraprogrammes die Phänomene, die für

$$F(t) = a\sin(\omega_1 t) + b\sin(\omega_2 t) + c\sin(\omega_3 t)$$

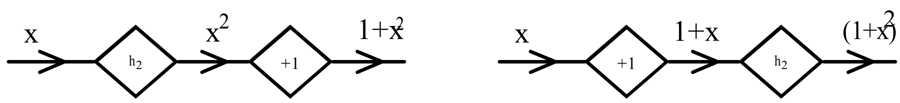
auftreten.

8.4.5 Konstruktions- und Verlaufsdiagramme

(8.4.40) Rechenausdrücke oder Terme kann man entweder als Zeichenfolge, als reine Benennung eines mathematischen Gebildes ansehen oder aber als eine Art Bauplan, als rechnerische Konstruktionsbeschreibung, die angibt, wie man aus bestimmten Eingabegrößen einen Endwert bestimmt.
(8.4.41) Vom ersten Standpunkt aus gesehen hat der Formelausdruck vornehmlich die Funktion, unterschiedliche Ausdrücke per Benennung auseinanderzuhalten, was wegen fehlenden Strukturverständnisses dann schwer fällt. So beobachtet man, dass Terme wie $\frac{1}{\sqrt{x}+a}$ und $\frac{1}{\sqrt{x+a}}$ verwechselt werden, einfach weil nicht gesehen wird, welcher Rechenablauf jeweils beschrieben wird.
(8.4.42) Anfänger tendieren gerne dahin, sich dem ersten Standpunkt anzunähern, ihm verhaftet zu bleiben, also den beschriebenen Rechenablauf nicht oder nur unzulänglich wahrzunehmen. Wir sind auf diese Probleme bereits in Kapitel 3 eingegangen und haben dort das Hilfsmittel der Verlaufsdiagramme vorgestellt und eingeführt.
(8.4.43) Im Zusammenhang mit den reellen Funktionen sind Verlaufsdiagramme ausgesprochen nützlich. Dann ist ein Buchstabe als unabhängige Variable spezifiziert und eventuelle weitere Buchstaben sind als Konstanten oder äußere Parameter anzusehen.

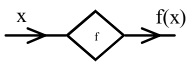
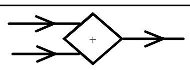
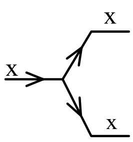
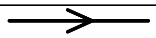
> Das Verlaufsdiagramm beschreibt den Rechenweg der unabhängigen Variablen, beschreibt, welches *Schicksal* die Eingabegröße auf ihrem Weg zum Ergebnis erleidet.

(8.4.44) Dabei kommt es im mathematischen Bereich sehr auf die **Reihenfolge** der Erlebnisse an. Betrachten wir etwa $1 + x^2$ und $(1 + x)^{2}$. Im ersten Beispiel wird x erst quadriert und zum Ergebnis wird 1 addiert.Im zweiten Fall wird 1 zu x addiert und dann das Ergebnis quadriert. Das sind zwei unterschiedliche Prozesse oder Abläufe, die auseinander zu halten sind. Ein anderes wichtiges Beispiel bilden die beiden Terme e^{x^2} und $(e^x)^2$.
(8.4.45) Wir sagten bereits, dass es nützlich sei, sich den Ablauf graphisch darzustellen. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten. Generell kommt es eher darauf an, sich mit so einer Darstellung rasch ZUgang zum Verständnis zu verschaffen, als genaue Zeichennormen einzuhalten. Meist verwenden wir weitgehend selbsterklärende Diagramme der folgenden Art:

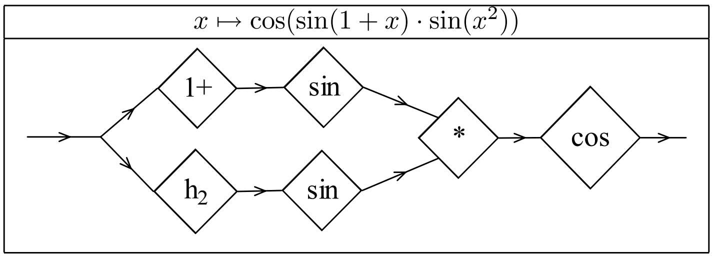


(8.4.46) Was für Bestandteile wird man für die Anfertigung eines Verlaufsdiagrammes für reelle Funktionen benötigen? Wir geben eine Liste von Elementen, mit denen man üblicherweise im Bereich der reellen Funktionen auskommt. Man kann sich das immer so vorstellen, dass dies Bauteile sind, mit denen man einen Automaten bauen würde, der gerade die rechnerischen Leistungen des Termes reproduziert. Auf Definitionsbereich und Wertebereich wird bei diesen Diagrammen in der Regel nicht geachtet. Dagegen lesen wir die Diagramme fast immer von links nach rechts.

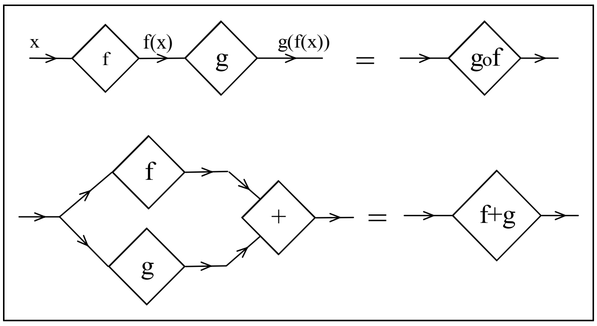
Liste der üblicherweise benötigten Bauelemente:

		Elementarer Automat, der die Wirkung einer als elementar angesehenen Funktion f erzeugt. Etwa Funktionen der Grundausstattung h_n, sin, cos, exp,...
		Ein Automat, der eine der in $\mathbb{R}$ vorhandenen Verknüpfungen repräsentiert Dabei werden zwei Eingabewerte zu einem Ausgabewert verknüpft. (Etwa $+, \cdot, /$ usw.)
		Eine Leitungsverzweigung. Der links hereinkommende Wert läuft entlang beider Ausgabeleitungen weiter.
		Leitungen, in den Zahlwerte transportiert werden.

(8.4.47) Ein Beispiel: Links startet man mit einer Zahl x, diese wird auf zwei Wege geschickt, deren Resultat eine Multiplikation zusammengefasst wird. Insgesamt ergibt sich folgende Zuordnung:



Der * steht für das Multiplikationszeichen.
(8.4.48) Abgesehen von der Bildung der inversen Funktion lassen sich alle besprochenen Neukonstruktionen von Funktionen durch Diagramme dieser Art darstellen, da man ja in jedem Fall den jeweiligen Wert der neukonstruierten aus den Werten der Eingabefunktion bestimmen kann. Wir stellen dies für die Zusammensetzung $g \circ f$ und die Funktionsaddition $f+g$ dar. Gleichheit zweier Diagramme bedeutet hier immer, dass beide Diagramme dieselbe Zuordnung produzieren.

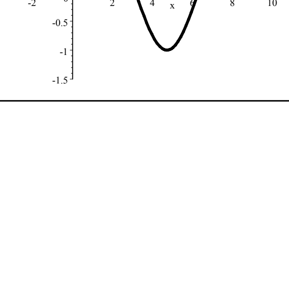


☐ Schreiben Sie die Gleichungen aus (8.3.65) zur inversen Funktion in Diagrammform.

8.4.6 **Elementar konstruierbare Funktionen**

(8.4.49) Wir sind von den Funktionen der Grundausstattung ausgegangen. Aus ihnen können wir ein oder zwei auswählen und darauf unsere Neukonstruktionsverfahren anwenden. Auf die Ergebnisse können wir die Verfahren erneut anwenden und so fort. Auf dies Weise erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine enorm große Menge von Funktionen, die wir "**elementar konstruierbare Funktionen**" nennen wollen. Jede dieser Funktionen können wir durch ein Verlaufsdiagramm darstellen, das aus unseren elementaren Bausteinen (und eventuell weiteren für die Umkehr von Funktionen) aufgebaut ist. Die üblichen Rechenausdrücke, denen man in Formeln begegnet, gehören zu solch elementar konstruierbaren Funktionen. Man trifft jedoch auch auf Ausdrücke oder Zuordnungen die nicht zu dieser Menge gehören. Wir nennen zwei Beispiele: Für die Nullstellen von Polynomen der Ordnung 5 und mehr gibt es keine elementar konstruierbaren Formeln. Und viel unbestimmte Integrale lassen sich nicht elementar konstruieren. Beispiele geben wir in Kap. 12.
Alle elementar konstruierbaren Funktionen lassen sich schematisch differenzieren, wie wir sehen werden.
(8.4.50) Schließlich kommt relativ häufig noch eine weitere Neukonstruktion vor, die darin besteht, dass man den Definitionsbereich unterteilt und für jeden Bereich einen eigenen (elementar konstruierbaren) Rechenausdruck angibt. Man sagt dann, die Funktion sei "stückweise elementar konstruierbar. Ein Beispiel, aus drei derartigen Stücken:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für x<0} \\ \sin(x) & 0 \le x \le \frac{5}{2}\pi \\ 1 & x \ge \frac{5}{2}\pi \end{cases}$$



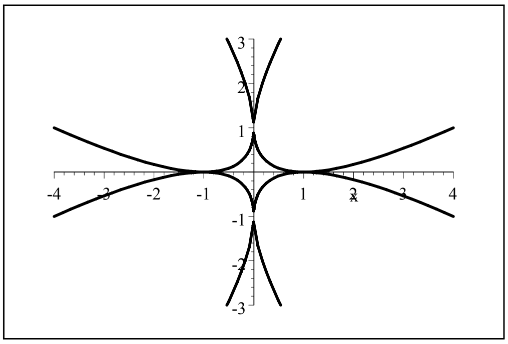
Gestückelte Funktionen treten beispielsweise bei der idealisierten Beschreibung von An- und Ausschaltvorgängen auf, wie das Beispiel selbsterklärend verdeutlichen sollte.

□ Elementar konstruierbare Funktionen können **in ihrem Definitionsbereich** mit nicht glatten Funktionen übereinstimmen. So ist x$\mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$ für x$\neq$ 0 definiert und dort gleich $|x|$. Wie steht es mit x$\mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2}}$?

8.4.7 **Beschreibung geometrischer Figuren durch Funktionen**

(8.4.51) Der Kreis, genauer Kreisrand, ist eine Figur mit einem inneren Freiheitsgrad, aber nicht der Graph einer Funktion. Die einfachste Beschreibung ist die durch eine Koordinatengleichung. Vgl- Kap. 1.6.1. Für den Kreis (Kreisrand mit Radius r um den Ursprung) hat man die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Auflösen nach y gibt y=$\pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Dies zeigt, dass man den Kreis als Vereinigung von zwei Funktionsgraphen darstellen kann. Die beiden Funktionen gehören zu den Zuordnungen x$\mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ und x$\mapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$.

□ Beim Auflösen von Wurzelgleichungen ist generell Vorsicht geboten, weil man u.U. durch Quadrieren Vorzeichenunterschiede verliert. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$. Offensichtlich haben wir $|x|, |y| \leq 1$. Durch Quadrieren geht das über in y=(1-$\sqrt{|x|}$)^2. Hierfür gilt die Eischränkung nicht mehr. Analysieren Sie die Ursache. Welche weiteren Funktionsgraphen enthält die nachfolgende Figur. welcher Teil davon gibt die durch $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ beschriebene Figur?



□ Was ist zu tun, wenn man die Lösungsmenge von tan(y)=x durch Funktionsgraphen beschreiben will?

□ Kurvendiskussion des Herzens: Zeigen sie mit Hilfe einfacher Dominanzargumente, das das Herz durch die Vereinigung der Graphen der folgenden beiden Funktionen beschrieben wird:

$$H_{\pm}(x) = \sqrt{|x|} \pm \sqrt{1 - x^2}.$$