****

Vorkurs Mathematik

Teil II Analysis

F. Krause

Kapitel 7

Zuordnungen undAbbildungen

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Kap.7: **Zuordnungen und Abbildungen**

In den Überlegungen des ersten Teiles tauchten zahlreiche Zuordnungen auf. In einem langfristigen historischen Entwicklungsprozeß hat sich deren Bedeutung für die Mathematik herauskristallisiert. Immer dann, wenn sich Formeln und Gleichungen zur Behandlung neuartiger und schwieriger Probleme als unzulänglich erwiesen, war die Abstraktion geeigneter Zuordnungen und Abbildungen nützlich, wie Teil I bereits deutlich zeigt. Schließlich hat sich der ***Abbildungsbegriff in der Mathematik als universales Handwerkszeug*** *herausgebildet. Die Lehrenden sollten entsprechend auf die Vermittlung dieses Begriffssystems Mühe verwenden und die Lernenden sollten sich nicht von* ***scheinbarer*** *Abstraktheit und sog. Praxisferne davon abhalten lassen, zugehöriges Verständnis und erforderliche Kompetenz zu erarbeiten. Das trägt hohe Zinsen, sobald man mit nicht leichtem neuen Stoff oder mit neuartigen Problemen konfrontiert wird.*

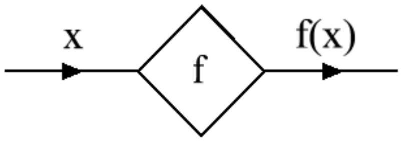
7.1 **Der allgemeine Formalismus**

7.1.1 **Zuordnungen**

(7.1.1) Wir beginnen mit einer kurzen einführenden Zusammenfassung des Begriffsapparates, illustrieren ihn an einer Reihe unterschiedlicher Beispiele aus dem ersten Teil und abstrahieren daraus den allgemeinen Abbildungsbegriff.
(7.1.2) Was ist eine *Zuordnung?* Wir wiederholen kurz die zugehörigen Überlegungen aus Kap. 3.1. und betrachten sie aus einer etwas anderen Perspektive. Man nimmt Objekte einer Art her und ordnet jedem Objekt in eindeutiger Weise ein anderes Objekt eventuell anderer Art zu. Wir haben es also immer mit einer festgelegten **Richtung** vom ersten zum zweiten Objekttyp zu tun und dazu mit der **Eindeutigkeitsforderung** (für das Resultat). Formal haben wir das wie folgt dargestellt

$x \mapsto f(x)$	gelesen "(dem Objekt) x wird (das Objekt) f-von-x zugeordnet".

Einem Menschen wird (zu einem bestimmten Zeitpunkt) sein Alter oder sein Gewicht zugeordnet. Einem chemischen Element wird seine Ordnungszahl zugeordnet. Einem sich ändernden physikalischen System wird die Zahl seiner Freiheitsgrade zugeordnet. Usw.
(7.1.3) Beachten Sie, dass wir hier nicht davon sprechen *wie die Zuordnung erfolgt.* Es geht immer nur darum, dass sie vorhanden ist und eventuell irgendwie realisiert werden kann. Anders gesagt: Man sollte *Zuordnung* und *Zuordnungsverfahren* begrifflich unterscheiden. Verschiedene Verfahren können durchaus zu demselben Resultat, derselben Zuordnung führen! Die mathematische Abbildungstheorie macht Aussagen über die Zuordnungen, nicht über die Zuordnungsverfahren. Natürlich legt jedes Zuordnungsverfahren automatisch ein Zuordnung fest. Verfügt man dagegen über ein Zuordnung, so hat man noch lange kein konkretes Zuordnungsverfahren. Man kann über eine Zuordnung sprechen, mit ihr arbeiten, ohne über ein zugehöriges Verfahren zu verfügen.
(7.1.4) Das besagt, dass man sich Zuordnungen immer modellmäßig als Automaten vorstellen kann mit einem Eingabe- und einem Ausgabeschlitz: Gibt man in den Eingabeschlitz ein zulässiges x ein, dann kommt immer ein y=f(x) aus dem Ausgabeschlitz heraus. Also: Jedes zulässige x darf eingegeben werden und man erhält dann immer ein y. Und gibt man mehrfach dasselbe x ein, dann muss immer dasselbe y herauskommen! **Das erfaßt bereits das grundlegende mathematische Konzept einer Zuordnung.**



Gibt man x in den Automaten ein,
so wird dies Objekt durch f zu y=f(x) verarbeitet
und f(x) wird ausgegeben.
x selbst wird nicht mehr mit ausgegeben.

(7.1.5) Achtung: Natürlich kann es vorkommen, dass man zwei voneinander verschiedene x eingibt, und in beiden Fällen dasselbe y herauskommt. Formal $f(x_1) = f(x_2)$. Das wird durch die Eindeutigkeitsforderung keineswegs untersagt. Zwei verschiedene Personen können durchaus dasselbe Alter haben, aber ein und derselben Person sollen nicht zwei Alter zugeordnet werden. Eine Zuordnung ist eine **gerichtete Beziehung:** Was in der einen Richtung gilt, muss nicht auch für die andere gelten.

☐ Angenommen ihr Automat soll nicht nur f(x) ausgeben, sondern zusätzlich noch x. Wie formalisieren Sie das Ausgabeobjekt?

(7.1.6) Wodurch unterscheiden sich Zuordnungen, wenn man einmal von der genauen Werteangabe absieht? Insbesondere in den Arten und Typen oder wenn man will *Sorten* der beteiligten Objekte. Diese können extrem unterschiedlich sein.

(7.1.7) Verdeutlichen wir Unterschiedlichkeit und Gemeinsamkeit an einer Reihe von Beispielen des ersten Teiles des Kurses.

- **Algebraische Verknüpfungen** wie die Addition reeller Zahlen oder das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt
  $$\boxed{(x,y)\mapsto x+y \qquad (\vec{x},\vec{y})\mapsto(\vec{x}\cdot\vec{y}) \qquad (\vec{x},\vec{y})\mapsto\vec{x}\times\vec{y}}\,.$$
  Allen diesen Beispielen gemeinsam ist, dass ein **geordnetes Paar** aus zwei Objekten eingegeben wird (Typfestlegung!). Im zweiten und dritten Fall haben wir es mit zwei verschiedenen Zuordnungen zu tun, die beide dieselben Eingabeobjekte aufnehmen, aber unterschiedliche Ausgabetypen produzieren. Im Rahmen der Vektorrechnung hatten wir auch noch die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl $(\alpha,\vec{x})\mapsto\alpha\vec{x}$ betrachtet. D.h. es kommen Paare vor mit Komponenten unterschiedlichen Typs.

- **Geradenparametrisierung.** Jedem Parameterwert wird ein Ortsvektor zugeordnet:
  $$\boxed{\alpha\mapsto\vec{x}_g(\alpha)=\vec{a}+\alpha\vec{d}.}$$
  Hier haben wir sowohl eine Bezeichnung für das herauskommende Objekt als auch ein Berechnungsverfahren in Form eines Rechenausdrucks, das diese Zuordnung festlegt.

- **Flugparabel.** Das war weitgehend analog zur Geradenparametrisierung, nur dass man eine andere Zuordnung hatte und dass der Parameter, die Eingabegröße, eine inhaltliche Bedeutung in Form einer Zeitpunktfestlegung besaß:
  $$\boxed{t\mapsto\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)+\tfrac{1}{2}\vec{g}(t-t_0)^2.}$$

- **Ebenenbeschreibung.** Hier sind die Eingabeobjekte Zahlpaare, das Ergebnis ein Vektor:
  $$\boxed{(\alpha,\beta)\mapsto\vec{x}_E(\alpha,\beta)=\vec{a}+\alpha\vec{e}+\beta\vec{f}.}$$
  Läßt man beliebige reelle Zahlen für α und β zu, dann erhält man die gesamte Ebene. Läßt man nur Zahlen zwischen 0 und 1 zu, erhält man ein Parallelogramm. Wählt man α =1 und β frei, dann erhält man eine in E liegende Gerade usw. Es ist somit wichtig, zu wissen, welche Eingabewerte zulässig sind.

- **Matrix eines linearen Gleichungssystems.** Ist A eine $m\times n-Matrix$, dann haben wir in Kap.5.1.4 dieses Objekt als Zuordnung interpretiert, das aus einem n-Tupel $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ nach der Regel *Zeile mal Spalte* ein m-Tupel $\vec{y}=A(\vec{x})=A\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ machte:
  $$\boxed{\vec{x}\mapsto A\vec{x}.}$$
  Hierzu ein wichtiger Punkt: Mit "von-Klammern" darf man i.a. nicht distributiv rechnen. D.h. f(x+y) ist i.a. ungleich f(x)+f(y), sofern man diese Terme überhaupt bilden kann. Nur in Ausnahmefällen sind beide stets gleich. und insbesondere bei Matrizen ist das der Fall. D.h. es gilt $A(\vec{x}+\vec{y})=A(\vec{x})+A(\vec{y})$. Vgl. (5.1.27).

- **Die Beziehung zwischen $\mathbf{E}^3$ und $\mathbb{V}_0^3$.** Legte man einen Ursprung 0 des Konfigurationsraumes E^3 fest, dann konnte man jeden Punkt P durch seinen Ortsvektor beschreiben. Das ist erneut eine Zuordnung:
  $$\boxed{\mathrm{P}\mapsto\vec{x}_P.}$$
  Diese Zuordnung hat eine besondere keineswegs immer vorhandene Eigenschaft: Man kann sie **umkehren**. Also jedem geometrischen Pfeil seinen Endpunkt zuordnen.
  $$\boxed{\vec{x}_P\mapsto P}$$

- **Eine Geradenparametrisierung.** Wir betrachten die Geraden in der Koordinatenebene und bilden die folgende Zuordnung: Jeder Geraden g wird der übliche Steigungswinkel $\alpha = \alpha(g)$ (nicht der Tangens desselben!) zugeordnet und der kürzeste Abstand A=A(g) der Geraden vom Ursprung. Also

$$\boxed{g \mapsto (\alpha(g), A(g)).}$$

  Die Eingabetyp sind hier Geraden! Die Zusammenfassung der Ausgabegrößen erfolgt durch Tupel. Erneut ist die Zuordnung umkehrbar. Ein Zuordnungsverfahren ist noch nicht verfügbar.

- Wir betrachten Teilmengen, also Figuren des E^3. Gewisse von ihnen sind vom Kurventyp, sie haben einen (inneren) Freiheitsgrad und lassen sich durch eine Zahlangabe parametrisieren. Andere sind vom Flächentyp und benötigen zur Festlegung zwei (innere) Freiheitsgrade. Wieder andere sind räumliche Körper, die drei Freiheitsgrade besitzen. Man nennt die Zahl der Freiheitsgrade auch die "Dimension der Figur". Ein Vollzylinder ist dreidimensional, der Zylindermantel nur zweidimensional. Das (schwere) Problem: Gibt es eine Zuordnung, die **jeder** Figur F im Konfigurationsraum eine zugehörige "Dimension" zuordnet? Und wenn ja, welche Dimensionswerte tauchen auf? Wir werden hierzu unten noch etwas sagen.

- **Eine Nullstellenmenge.** Es sei q eine quadratische Gleichung. Wir rechnen ihre reellen Nullstellen aus und bilden die "Menge $\mathbb{L} = \mathbb{L}(q)$ dieser Nullstellen". Sind keine reellen Nullstellen vorhanden, dann ist das die leere (=elementlose) Menge. Wir können dann jeder quadratischen Gleichung ihre Nullstellenmenge zuordnen

$$g \mapsto \mathbb{L}(q).$$

  Unsere Eingangsforderungen (eindeutig, gerichtet) sind alle erfüllt. Umgekehrt kann man natürlich von der Nullstellenmenge nicht auf die qudratische Gleichung schließen!

⇑ Die Beispiele sollten ausreichen, um einerseits die Vielfalt der Zuordnungsmöglichkeiten, der dabei auftretenden Typen, zu erkennen ebenso wie das Gemeinsame, die gerichtete Beziehung zwischen den Objekten.

7.1.2 Abbildungstripel

(7.1.8) Was der jeweiligen Zuordnung noch fehlt, ist die genaue Festlegung, welche Objekte in die Zuordnung eingegeben werden können und was für Objekte herauskommen müssen. Im Beispiel über die Ebenenparametrisierung haben wir das mit Hilfe des Kontextes getan. Aber man sollte die Festlegung auch formalisieren können. Das geschieht mit Hilfe des elementaren *naiven* Mengenbegriffs. Man legt zwei Mengen fest, eine Menge U für die Eingabe und eine Menge W für die Ausgabe und erhält insgesamt ein **Tripel**, das wir "Abbildung" oder "Abbildungstripel" nennen wollen:

$$\boxed{\boxed{f = (U, x \mapsto f(x), W)}}$$

Die Interpretation ist wie folgt:

$x \mapsto f(x)$		Steht für die jeweilige Zuordnung
		oder (falls vorhanden) das Zuordnungsverfahren.
	x	x bezeichnet ein beliebig wählbares oder vorgebbares Element aus der Menge A
A	T	A heißt Urbildmenge (der Abbildung) und x ein (mögliches) Urbild
W	T	W heißt Wertemenge (der Abbildung)
	f(x)	f(x) bezeichnet das Objekt, das x (von der Zuordnung) zugeordnet wird.
		f(x) **muss** aus der Wertemenge W sein. D.h. f(x) hat sicher alle Eigenschaften,
		die jedem Element aus W zukommen.
f	T	Bezeichnet die gesamte Abbildung, das gesamte Tripel!
	f(x)	f(x) heißt "Wert der Abbildung f an der Stelle x".
		Die Bezeichnung f der gesamten Abbildung ist gleich dem, was vor der
		von-Klammer des Wertes f(x) steht.

!!! Die Vorgabe einer Abbildung oder eines Abbildungstripels verlangt daher, drei Dinge festzulegen: Die Urbildmenge, die Zuordnung und die Wertemenge.

Bitte halten Sie begrifflich immer auseinander: Die "Abbildung f" und der "Wert f(x) der Abbildung im Punkte x". Das sind zwei ganz verschiedene Dinge. (Niemand käme es im Alltag in den Sinn, einen Zigarettenautomaten mit einer von diesem Automaten ausgebenen Zigarettenschachtel zu verwechseln. Beim Umgang mit mathematischen Größen fallen dagegen vielfach sämtliche derartige Skrupel.). Allerdings ist es so, dass man besonders in physikalischen Texten auch gerne mit einer Rollenzuweisung arbeitet: Je nach Situation wird dann ein und dasselbe Symbol f(x) als Abbildung f oder als Wert interpretiert. In der Regel durch Rollenzuweisung an x: Variable, äußerer Parameter oder feste Konstante. Wer das Begriffssystem beherrscht, kann sich das leisten. Wer es nicht kann, sollte das zunächst lieber lassen!

(7.1.9) Die Struktur des Abbildungstripels legt fest, welche Objekte x als Urbilder in die Zuordnung eingespeist werden dürfen. Es sind genau die Elemente von U. Der Buchstabe x hat dann die Rolle einer unabhängigen Variablen. Man darf ihn aber durch jeden anderen Buchstaben ersetzen, der noch keine im Kontext festgelegte Bedeutung hat. D.h. es gelten beispielsweise Gleichungen der folgenden Art

$$(U, x \mapsto f(x), W) = (U, y \mapsto f(y), W) = (U, A \mapsto f(A), W).$$

(7.1.10) Bitte unterscheiden Sie, ob eine Schreibweise formal zulässig ist davon, ob sie opportun oder nützlich ist. Die Schreibweise $(U, y \mapsto f(y), W)$ wird in vielen Fällen nicht opportun sein, nämlich immer dann, wenn es naheliegt, y als Hilfsgröße für f(x) zu verwenden. Ist weiterhin a ein festes Element aus U, so nimmt man stillschweigend einen Rollenwechsel vor und schreibt $a \mapsto f(a)$. So wird $x \mapsto f(x) = x^2$ für x=3 zu $3 \mapsto f(3) = 9$.

(7.1.11.) Die Wertemenge ist in der Regel von allen drei Objekten am wenigsten festgelegt. Es wird immer nur verlangt, dass jeder Wert f(x) in dieser Menge liegt, **so dass man sicher sein kann, dass f(x) die allgemeinen Eigenschaften der Elemente dieser Menge hat**. Hat man ein Abbildungstripel $(U, x \mapsto f(x), W)$, dann kann man in der Regel die Wertemenge W problemlos vergrößern. Denn die Werte liegen dann ja erst recht in der größeren Menge.

(7.1.12.) Unterscheiden sich Abbildungen durch die Art der beteiligten Mengen, dann sagt man gern, dass sie von unterschiedlichem Typ seien. Eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ etwa bezeichnet man als reelle Funktion, eine des Typs $V_0^3 \to \mathbb{R}$ dagegen als Skalarfeld. Auf die Frage "Von welchem Typ ist die Abbildung $\vec{x} \mapsto \frac{(\vec{a}\vec{x})}{1+\vec{x}^2}\vec{x}$ " erwartet man meist eine Antwort wie "Vektorfeld". Vgl. Kap.3.4.

Mit wieviel derartigen Typen haben wir es in unseren bisherigen Ausführungen etwa zu tun, ohne kleinere Modifikationen? Dazu müssen wir nur die Mengen durchgehen, mit denen wir typischerweise arbeiten. Das wären $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, $V^3, V_0^3, \mathbb{C}$. Verteilt man diese 8 auf alle Weisen auf Urbildmenge und Wertemenge, so erhält man bereits 64 Typen von Abbildungen.

☐ Wir betrachten Zahlfolgen wie $a_n = \frac{1}{1+n}$ oder $b_n = 2^n$ $c_n = e^{in}$ für n=0,1,2,.... Was für ein Abbildungstyp liegt vor? Machen sie aus den beiden Beispielen ein vollständiges Abbildungstripel.

☐ Ergänzen Sie alle Zuordnungen aus (7.1.7) zu vollständigen Abbildungen. Scheuen Sie sich nicht, bei Bedarf für eine festzulegende Menge eine Bezeichnung einzuführen. Vgl.(1.8.10).

7.1.3 Die Vorgabe von Abbildungstripeln

(7.1.13) In der typischen Anwendung, besonders des physikalischen Bereiches, liefert einem die Situation zumeist zunächst die Zuordnung, etwa in Form eines Rechenausdrucks, in dem eine unabhängige Variable spezifiziert ist. Dazu überlegt man sich eine Urbildmenge,die einerseits die Gegebenheiten der Problemsituation erfüllen muss und die andererseits nur Elemente enthalten darf, für die die Zuordnung zulässig ist. Schließlich fixiert man die Wertemenge nach Opportunität. Man muss nur darauf achten, dass sie nicht zu klein wird. Sie muss mindestens alle herauskommenden Werte enthalten. Bei der Geradenbeschreibung etwa haben wir mit der Zuordnung $\alpha \mapsto \vec{x}_g(\alpha) = \vec{a} + \alpha\vec{d}$ gearbeitet. Interessiert die gesamte Gerade, wählt man $\mathbb{R}$ als Urbildmenge. Herauskommen soll immer ein Ortsvektor. Das ergibt die Wertemenge. Insgesamt entsteht das Tripel

$$\boxed{\vec{x}_g = (\mathbb{R}, \alpha \mapsto \vec{x}_g(\alpha) = \vec{a} + \alpha\vec{d}, V_0^3).}$$

Dabei haben wir die Regel benutzt, die gesamte Abbildung "mit dem zu bezeichnen, was vor der von-Klammer steht". Dieselbe Regel führt zu der folgenden Abbildungsbezeichung für den Sinus:

$$\boxed{\sin=(\mathbb{R},\alpha \mapsto \sin(\alpha),\mathbb{R}).}$$

Oder: $\vec{r}$ bezeichnet die gesamte Flugparabelabbildung und $\vec{r}(t)$ den Wert zur Zeit t. Und $\vec{x}_E$ ist die Abbildung, eine Parametrisierung der Ebene E, wogegen $\vec{x}_E(3,5)$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene ist.

Denken Sie an den Ratschlag aus aus (1.4.8). D.h. hier vielfach: Zuerst die Tripelform hinschreiben .. =(...,...,...), daran das Gesicherte eintagen und dann vom Ballast befreit über den Rest nachdenken.

7.1.4 Unterschiedliche Schreibweisen für Abbildungstripel

(7.1.14) Infolge der ungeheuren Allgemeinheit gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Bezeichnungs- und Schreibweisen für Abbildungen. Gemeint ist immer dasselbe, letztlich ein Tripel der skizzierten Art. Aber die Bezeichnungen sind vielfach historisch und individuell gewachsen und halten sich in der Literatur und sie hängen von den persönlichen Vorlieben ab. Man muss sich immer nur fragen: **Kann ich aus der gegebenen Information oder aus der Bezeichnung und dem Kontext ein volles Abbildungstripel rekonstruieren?**
(7.1.15) Beispiele für gebräuchliche Schreibweisen

y=f(x)	x ist als unabhängige Variable spezifiziert, U und W sind aus dem Kontext zu ergänzen.
f(x) oder f=f(x)	statt f, x ist im Kontext unabhängige Variable.
f:x$\mapsto f(x)$	In der Mathematik, wenn die beiden Mengen aus dem Kontext klar sind.
x$\stackrel{f}{\mapsto} f(x)$ U$\to W$	**Vollständige Schreibweise der Mathematiker**. Besonders günstig für die Tafelarbeit.
f:U$\to W$	Wenn die Zuordnung aus dem Kontext klar ist und man auf die Mengen verweisen will.

Die ersten beiden Schreibweisen tauchen häufig in physikalischen Texten auf, aber meist mit anders bezeichneten Variablen. Etwa Z=Z(ω) , für einen komplexen Widerstand, der in Abhängigkeit von ω betrachtet werden soll. Oder man sagt: "Die Steigung m(ε)..." oder "die Höhe h(t)". Im Zweifelsfall sollten Sie sich immer fragen: "Wie sieht das zugehörige vollständige Abbildungstripel aus?" Um dann korrekt den allgemeinen Formalismus anwenden zu können.

7.1.5 Weitere Beispiele

(7.1.16) Wir geben jetzt zur Gewöhnung einige Abbildungen unterschiedlichen Typs in Form der vollen Tripel an. Vgl. Kap. 3.4.

$(\mathbb{R}, x\mapsto x\sin(x^2), \mathbb{R})$	Reelle Funktion
$(\mathbb{R}, t\mapsto \frac{1}{2}\vec{g}t^2-\vec{a}, V_0^3)$	Bahnkurve
$(V_0^3, \vec{x}\mapsto \vec{x}^2, \mathbb{R})$	Skalarfeld
$(V_0^3, \vec{x}\mapsto \vec{x}+\vec{a}\times\vec{x}, V_0^3)$	Vektorfeld ($\times$ Vektorprodukt)
$(\mathbb{R}^3_K, (x,y,z)\mapsto(0,y,z), \mathbb{R}^3_K)$	Projektion auf die y-z-Ebene
$(\mathbb{R}, t\mapsto re^{it}, \mathbb{C})$	Kreisbewegung in der kompl.Ebene

Anstatt der reinen Werte**bezeichnung** steht hier in jedem Fall ein Berechnungsterm.

7.1.6 Die einer Abbildung zugeordnete Mengen: Bild und Graph

(7.1.17.) Eine erste allgemeine Konsequenz des eingeführten Abbildungsbegriffes besteht darin, dass zu jeder Abbildung zwei Mengen gehören, die wichtige Information über die Abbildung enthalten. Man nennt diese Mengen Bild und Graph (der Abbildung). Zur Einführung verwenden wir die Mengensymbolik, wie wir sie auch bereits in 2.4.4 zur Beschreibung von Figuren benutzt haben. Das läuft immer so ab, dass man ein Gleichung der folgenden Art vorgibt:

$$M = \{x|\text{ wobei } \text{ x....}\}.$$

Solche Gleichungen sollten Sie nach folgendem Schema bilden und insbesondere auch decodieren :

x	vor dem |	Die gewählte Bezeichnung für die betrachtenen Objekte.
"wobei x..."	nach dem |	Eigenschaft, die die zu erfassenden Objekte x eindeutig festlegt.
{....}		Bilde und betrachte die Menge aller so erfaßten Objekte.
M		(Eine meist abkürzende) Bezeichnung für die gesamte eingeführte Menge
M={..|...}		Gleichheit zwischen zwei Mengen.
		D.h. es kommt auf die Reihenfolge der Elemente nicht an.

Im Zweifelsfall ist es wichtig, dass Sie bei einer zu verstehenden Mengenbildung die Vorgehensweise des soeben gegebene Schemas einhalten!

☐ Die in Kap.2.5 besprochene Produktmenge war nach diesem Schema definiert:

A×B={(a,b)|.....}	$A \times B \times C = \{....\|,,,\}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{V}_0^3 = ...$

Vervollständigen Sie diese Definitionsgleichungen

(7.1.18) Jetzt führen wir die beiden angekündigten Mengen nach dem skizzierten Muster ein:

Definition:	Sei $f = (U, x \to f(x), W)$ eine vorgegebene Abbildung.
	Dann kann man dazu immer die folgenden beiden Mengen bilden:
T	$Bild(f) = \{y \| y \in W$, es gibt ein x$\in U$ mit y=f(x)}. (Gelesen "Bild von f")
T	$Graph(f) = G_f = \{(x,y) \| x \in U, y \in W$,y=f(x)}. (Gelesen "Graph von f")

(7.1.19) Gehen wir die Definition etwas durch: In Bildf wurde y als Elementbezeichnung gewählt, weil y aus der Menge W sein soll, die in der Zuordnung auf der rechten Seite von $\mapsto$ steht. Bildf ist eine Teilmenge, eine Figur aus W. Kurz Bildf$\subset W$. Aber es sollen nicht alle Elemente aus W genommen werden, sondern nur die, die tatsächlich aus dem Automaten herauskommen. Ein Beispiel: Sei $q = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2, \mathbb{R})$. Beim Quadrieren kommen nur nicht negative Zahlen heraus, aber die auch alle. Also $Bildq = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$. Hierbei haben wir folgende Konvention benutzt: Ein Komma zwischen zwei Aussagen im Bereich |....} steht abkürzend für ein "und". Also:

$$\boxed{\text{Bildq}=\{x|x\in \mathbb{R},\ x\geq 0\}=\{x|x\in \mathbb{R} \text{ und } x\geq 0\}.}$$

Wir sehen: Sachlich wichtig ist bei der Konstruktion vornehmlich der Bereich |....}. Der Rest ist mehr formales, aber nützliches Beiwerk.

(7.1.20) Ist $\vec{x}_g$ Parametrisierung der Geraden g, die wir jetzt als Teilmenge von V_0^3 interpretieren wollen, dann gilt g=Bild($\vec{x}_g$). Die Bildung von Bild drückt das Vergessen der Bezeichnung der Punkte von g durch die Parametrisierung aus.

(7.1.21) Graph(f) oder Graphf und G_f sind mehrere Bezeichnungen derselben Menge. Diese zweite Menge Graphf enthält als Elemente geordnete Paare, wie wir sie aus dem Bereich der Vektoren kennen. Kap.2.3.2. Allerdings muss die erste Komponente aus der Urbildmenge von f und die zweite aus der Wertemenge sein. Und dann die entscheidende Forderung: y muss gerade der Wert von x unter der Abbildung f sein. Für unser Beispiel folgt

$$\boxed{\text{Graph(q)}=\{(x,y)|x\in \mathbb{R}, y=x^2\}=\{(x,x^2)|x\in \mathbb{R}\}}$$

Das ergibt die Figur der üblichen Normalparabel der Ebene, die hier das "Schaubild", den Graphen der Normalparabelfunktion y=x^2 ausmacht. Ist f:U$\to W$ (gelesen "f Abbildung von U nach W"), dann ist Graphf eine Teilmenge, eine Figur aus der Produktmenge $U \times W$. Vgl. die Frage aus (7.1.17). Formal: Graph(f)$\subset U \times W$.

(7.1.22) Bildf liefert meist nützliche zusammenfassende Information über die Abbildung f und Graphf erweist sich insbesondere bei den reellen Funktionen als außerordentlich wichtiges Hilfsmittel.

☐ Interpretieren Sie verbal die folgenden formalen Konstruktionen

$$\boxed{A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\} \text{ und } \quad A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}}$$

☐ Es sei $t \mapsto \vec{r}(t)$ die Bahnbeschreibung eines Massenpunktes. Welche (physikalische) Interpretation hat Bild$\vec{r}$?

☐ $u = (\mathbb{N}, n \to e^{in}, \mathbb{C})$. Was läßt sich über Bild(u) sagen? Man kann einige bemerkenswerte Eigenschaften aufdecken.

☐ $h = (\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto h(x, y) = x^2 + y^2, \mathbb{R})$. Wieso läßt sich dann Graph(h) als Fläche im Raum interpretieren.Genauer als Rotationsfläche einer Parabel? Und dieselbe Fläche folgt mit $\vec{x}_F = (\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2), \mathbb{R}^3_K)$. Welche Beziehung besteht nämlich zwischen Bild$\vec{x}_F$ und Graph(h)?

☐ Etwas Formalismus im Anschluss an die Frage aus (7.1.5): Es sei f=(U,x$\mapsto$ $f(x), W$) und F=(U,x$\mapsto$ $(x, f(x)), U \times W$). Welche Beziehung besteht zwischen BildF und Graphf ?

7.1.7 Die Zusammensetzung von Abbildungen

(7.1.23) In den Verlaufsdiagrammen haben wir Zuordnungen gerne hintereinander geschaltet und so neue Zuordnungen konstruiert. Vgl. etwa (3.1.7). Das können wir jetzt verallgemeinern, wie das nachfolgende Schema zeigt:

U	$\xrightarrow{g}$	B=C	$\xrightarrow{f}$	W
x	$\mapsto$	g(x)=y	$\mapsto$	f(y)=f(g(x))

Was benötigt man als Zutaten dieser Konstruktion? Zunächst zwei Abbildungen $g = (U, x \mapsto g(x), B)$ und $f = (C, y \mapsto f(y), W)$. Und damit das, was aus dem ersten Automaten g herauskommt, auch sicher in den zweiten Automaten f eingegeben werden kann, fordern wir B=C. Jetzt kann man alles zusammensetzen und erhält eine neue Abbildung

$$\boxed{f\circ g=(U,x\mapsto f \circ g(x)=f(g(x)),W)}.$$

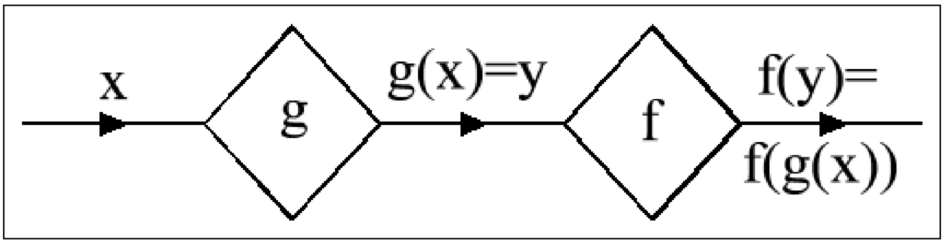
(7.1.24) Decodieren wir das noch einmal: Man geht aus, von der Zuordnung x$\mapsto$ $f(g(x))$ wie sie durch die Automatenschaltung nahegelegt wird. Dann überlegt man sich die zugehörigen Mengen, hier U und W. Das gibt bereits das Tripel. Man benötigt noch einen Namen, für den konventionellerweise f∘g genommen wird. **Es entsteht die zentrale und zu merkende Gleichung für alle Werte:**

$$\boxed{\boxed{(f\circ g)(x)=f(g(x)).}}$$

Klammersparend schreibt man meist $f \circ g(x)$ für $(f \circ g)(x)$.

(7.1.25) Damit die Konstruktion insgesamt klappt, haben wir noch B=C gefordert. Die Konstruktion ist auch durchführbar, wenn B nur Teilmenge von C ist. Dann denken wir uns einfach in g die Wertemenge B bis auf C vergrößert, was immer zulässig ist, so dass B=C erfüllt wird.

(7.1.26.) Man nennt $f \circ g$ "die *Zusammensetzung* der beiden Abbildungen f und g". Gelesen wird das "f nach g". Das "nach" erinnert an die Automatenkonstruktion: Darin erlebt das Objekt x **zunächst** die Verarbeitung durch den Automaten g, wird zu y=g(x) und dieses Objekt erlebt da**nach** die Verarbeitung durch f und wird zu z=f(y)=f(g(x)). Beachten Sie unbedingt die gewechselte Reihenfolge zwischen *Erleben* (erst g, dann f) und *Schreiben* (erst f dann g) in $g \circ f$. Das ist wichtig, da diese Konstruktion nicht kommutativ ist.



(7.1.27) Bei der Quantifizierung der Punkte des Konfigurationsraumes traten die beiden Abbildungen $(E^3, P \mapsto \vec{x}_P, V^3_0)$ und $(V^3_0, \vec{x} \mapsto \vec{x}^K, \mathbb{R}^3_K)$ auf. Man kann sie zusammensetzen und erhält die zusammengesetzte Abbildung $(E^3, P \mapsto x^K_P, \mathbb{R}^3_K)$, die jedem Punkt unmittelbar seinen Koordinatenvektor (im System K) zuordnet. Diesen drei Abbildungen geben wir keinen gesonderten Namen, legen sie vielmehr durch Angabe des Tripels oder der Zuordnung fest.

7.1.8 Die inverse Abbildung

(7.1.28.) Bei gewissen Abbildungstripeln kann man die Richtung der Zuordnung umdrehen und so die *inverse Abbildung* konstruieren. Wann ist das möglich? Sei $f = (U, x \mapsto y = f(x), W)$. Wann kann man den Automaten rückwärts laufen lassen? Nun dann muss zu jedem y genau ein x gehören. D.h. zunächst, dass jedes y aus W als Wert tatsächlich herauskommt. Oder W=Bildf. Und es darf nie geschehen, dass zwei verschiedene x, sagen wir x_1 und x_2, dasselbe y ergeben. Denn dann weiß der Umkehrautomat nicht, welches x er zu wählen hat. Er muss immer **genau ein** x finden. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, können wir die Zuordnung umkehren und erhalten eine neue Zuordnung, bei der die Reihenfolge der beiden Mengen vertauscht ist:

$$\boxed{\overset{-1}{f} = (\mathrm{W}, y \mapsto \overset{-1}{f}(y), \mathrm{U})}$$

Diese Abbildung heißt dann, *die zu f inverse Abbildung.*

(7.1.29) Die Abbildungen $(E^3, P \mapsto \vec{x}_P, V_0^3)$ ist umkehrbar. Mit Umkehrabbildung $(V_0^3, \vec{x} \mapsto P_{\vec{x}}, E^3)$. Hier haben wir spontan eine Bezeichnung für den Wert (=Endpunkt des Pfeiles $\vec{x}$) eingeführt. Auch $(V_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{x}^K, \mathbb{R}_K^3)$ ist umkehrbar. Und diese Umkehrung können sogar "ausrechnen". Sind nämlich $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ die drei Einheitsvektoren des Koordinatensystems, dann gilt für die Umkehrung: $(\mathbb{R}_K^3, (x, y, z) \mapsto x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, V_0^3)$. Das ist unsere alte Konstruktion des geometrischen Pfeiles mit Hilfe eines achsenparallelen Weges. Bitte benutzen Sie für die inverse Abbildung nicht die Schreibweise $(W, f(x) \mapsto x, U)$. Für die jeweilig vorgebbare unabhängige Variable ist eine einfaches unverbrauchtes Symbol angebracht.

(7.1.30) Wir müssen die Definition oder Charakterisierung der inversen Abbildung noch in eine besser handhabbare Form bringen. Das erreichen wir, indem wir f und $\overset{-1}{f}$ zusammensetzen. Denn *Umkehren der Zuordnung* besagt doch: Erlebt x$\in U$ erst f und dann $\overset{-1}{f}$, passiert nichts, kommt erneut x heraus. Oder $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$. Aber auch: Erlebt y$\in W$ erst $\overset{-1}{f}$ und dann f, passiert auch nichts, es kommt erneut y heraus. Also $f(\overset{-1}{f}(y)) = y$. Das können wir entweder als **Gleichung für alle Werte** formulieren oder aber als **Gleichung zwischen Abbildungstripeln.** (Unbedingt unterscheiden!) Im nachfolgenden Schema sind beide Formen (derselben Sache) zusammengestellt:

Werteniveau	Abbildungsniveau
$\overset{-1}{f}(f(x)) = x$ für **alle** x$\in U$	$\overset{-1}{f} \circ f = (U, x \mapsto x, U)$
$f(\overset{-1}{f}(y)) = y$ für **alle** y$\in W$	$f \circ \overset{-1}{f} = (W, y \mapsto W)$

Hat man zwei zueinander inverse Abbildungen, sind diese 4 Beziehungen erfüllt. Will man zu f die inverse Abbildung konstruieren, muss man entweder die beiden linken oder die beiden rechten Gleichungen realisieren. Die jeweils verbleibenden gelten dann automatisch.

☐ Was für eine geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben:

$$p = (\mathbb{R}_K^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0), \mathbb{R}_K^3)\ ?$$

Was ergibt sich für $p \circ p$?

☐ Welche geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben

$$r = (\mathbb{R}_K^2, (x, y) \mapsto (-y, x), \mathbb{R}_K^2)\ ?$$

Bestimmen Sie $r \circ r$ rechnerisch und geometrisch? Existiert die inverse Abbildung zu r? Wenn ja, wie sieht sie aus?

☐ 2×2-Matrizen sollten nach Kap.5,1 als Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretiert werden. Sei M=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ und N=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Abbildung $M \circ N$ und zeigen Sie, dass diese sich erneut als 2×2-Matrix interpretieren läßt. Sie müssen also zunächst $M(N(\vec{x}))$ ausrechnen mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Testen Sie auch, dass diese neue Matrix aus den beiden gegebenen nach der in (5.1.20) besprochenen Regel *Zeile*$\times$*Spalte* entsteht.