****

Vorkurs Mathematik

F. Krause

Kapitel 6

Erweiterung der Vektorrechnung

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Copyright F.Krause

Kap.6.1: **Das Skalarprodukt**

Inhaltsübersicht Kap. 6.1

Mit Hilfe der bisher eingeführten Begriffe der Vektorrechnung sind wir in der Lage, eine Reihe geometrischer Größen und Objekte im Konfigurationsraum quantitativ zu beschreiben und zu bestimmen: Punkte, Geraden und Parabeln, Ebenen sowie Schnittpunkte solcher Figuren, Treffpunkte usw. Einige weitere Größen, die wir im üblichen geometrischen Umgang verwenden, sind uns jedoch vektoriell unzugänglich. Hierzu gehört insbesondere der ***Winkelbegriff****. Wie bestimmt man etwa den Winkel, den zwei geometrische Pfeile miteinander bilden? Wie können wir entscheiden, ob eine Gerade* ***senkrecht*** *auf einer Ebene steht? Ein weiteres Defizit ist, dass wir nicht in der Lage sind, systematisch die* ***Länge*** *von Vektoren zu bestimmen. Oder gleichwertig, den* ***Abstand zweier Punkte****. Die für Vektoren eingeführten Rechenregeln geben keinerlei Hinweis, wie man diese Fragen beantworten könnte.*

Etwas konkreter: Es ist uns bisher nicht möglich, die Winkelhalbierenden eines Dreiecks vektoriell zu beschreiben, so wie wir das für die Seitenhalbierenden getan haben.

Wir werden sehen, dass man diese Fragen mit Hilfe des nachfolgend einzuführenden Skalarproduktes zu beantworten kann. Das ist eine Konstruktion, die aus zwei Vektoren eine Zahl macht. Das Skalarprodukt kommt zu den Regeln der Vektorrechnung hinzu, folgt nicht aus ihnen.

Wir wählen den folgenden ***Weg zum Skalarprodukt****: Wir diskutieren eine naheliegende Frage und Überlegung zu den linearen Gleichungen. Dabei entdeckt man die gesuchte Konstruktion. Etwas offenes Herumspielen sowie das Bewußtsein für die angesprochenen Probleme führt einen dann zu der gesuchten Struktur.*

6.1.1 **Die Komponentenform des Skalarproduktes**

(6.1.1) Wir beginnen mit einer naheliegenden Überlegung zu den linearen Gleichungssystemen. Und zwar betrachten wir ein homogenes lineares $1{\times}3$-Gleichungssystem:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Das Gleichungssystem wird in der Regel m=ℓ=1 haben: Eine Bedingung für drei Unbestimmte. Damit folgt k=2. D.h. als Lösungsmenge ist typischerweise eine Ebene zu erwarten.

☐ Wieso *typischerweise?* Wann ist die Aussage k=2 falsch?

(6.1.2) Bisher haben wir die Unbestimmten zu einem Tupel zusammengefaßt und nur die Lösungen des Systems als Koordinatenvektoren geometrisch interpretiert. **Aber liegt es nicht nahe, auch die drei Koeffizienten zu einem Tripel zusammenzufassen und als Koordinatenvektor zu interpretieren?** Das erweist sich als fruchtbare Idee. Wir verwenden wieder Zeilenvektoren und setzen $\vec{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$. Solange wir nur ein festes Koordinatensystem verwenden, lassen wir den Index K fort. Wir stellen die folgende Frage:

- Angenommen wir interpretieren $\vec{a}$ als Koordinatenvektor eines geometrischen Pfeiles. Dann wird durch $\vec{a}$ einerseits das Gleichungssystem und dessen Lösungsmenge festgelegt. **Können wir dann die Lösungsebene andererseits auch geometrisch bestimmen,** ohne das System zunächst zu lösen? Besteht irgendein geometrischer Zusammenhang zwischen $\vec{a}$ und der Lösungsebene?

Wenn man sich fragt, was als Lösungsebene in geometrischer Hinsicht überhaupt in Betracht kommen könnte, bleibt eigentlich nur die folgende Möglichkeit: **Dass die Lösungsebene die zu $\vec{a}$ senkrechte Ebene durch den Ursprung ist.** Denn die senkrechte Ebene und nur diese wird durch $\vec{a}$ allein bereits vollständig bestimmt. Alle übrigen Ebenen benötigen noch zusätzliche Information zur vollen Festlegung.
So könnte man auch noch an eine (**eine,** nicht **die)** Ebene denken, die $\vec{a}$ enthält. Aber davon gibt es eben viele, von denen wiederum keine besonders ausgezeichnet ist.

(6.1.3) Einfache Beispiele stützen diese Vermutung sofort. Sei etwa $\vec{a} = \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Das zugehörige Gleichungssystem lautet $x_3 = 0$ mit der Lösung $\vec{x}_L(x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Das ist tatsächlich die zu $\vec{e}_3$ senkrechte Ebene.

☐ Überlegen Sie sich selbst den Fall $\vec{a} = (1, 1, 0)$.

(6.1.4) Das bringt einen dazu, die folgende Konstruktion zu betrachten, die gerade die Bildung der linken Seite der Gleichung aus den beiden Tripeln beschreibt:

- Zu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ soll die folgende Zahl (=Skalar) gebildet werden:

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Ist etwa $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (4, -1, 0)$, so ergibt sich die Zahl $1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 2$.

(6.1.5) Als Zuordnung abstrahiert:

> Wir ordnen jedem (geordneten) Paar von Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3_K$ eine **Zahl** zu, die wir mit $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bezeichnen und *das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$* nennen wollen.
> Die Berechnung erfolgt über die Zuordnung
> $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$

(6.1.6) Mit Hilfe dieses Skalarproduktes schreibt sich unsere Ausgangsgleichung $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$. Und die Vorüberlegungen legen folgende Vermutung (Hyothese) nahe, die sich tatsächlich bestätigen wird:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ ist gleichbedeutend damit, dass } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufeinander senkrecht stehen.}}$$

(6.1.7) Bitte halten Sie auseinander:

- Eine innere Verknüpfung zweier Vektoren macht daraus erneut einen **Vektor**. Das später zu besprechende Vektorprodukt ist ein Beispiel.
- Das Skalarprodukt macht aus zwei Vektoren eine Zahl, ein **Skalar**.
- Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl macht aus einem Skalar und einem Vektor erneut einen Vektor.

$\Downarrow$ Als Nächstes probieren wir einfach aus, was man mit der neuen Zuordnung anfangen kann. Physiker nennen so etwas gerne *Herumspielen.*

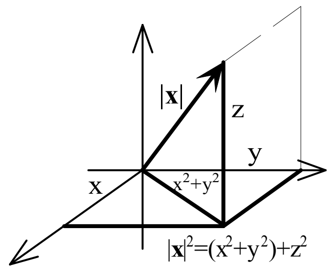
6.1.1a: **Der Betrag eines Vektors**

(6.1.8) Was kann man mit der Zuordnung anfangen? Der zweite geometrisch interessante Fall (neben $\vec{a}$ senkrecht $\vec{b}$) ist $\vec{a} = \vec{b}$. Dann haben beide Vektoren dieselbe Richtung. Dafür gibt unsere Zuordnung

$$(\vec{a}, \vec{a}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Zwei rechtwinklige Dreiecke.

$$(\vec{x}, \vec{x}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{x} = x^2 + y^2 + z^2$$



Die Skizzze zeigt (über zweifache Anwendung des Pythagoras), dass dies -also $\vec{a} \cdot \vec{a}$ - gleich dem Quadrat der Länge des geometrischen Pfeiles $\vec{a}$ ist. Bezeichnen wir die *Länge des geometrischen Pfeiles* $\vec{a}$ mit $|\vec{a}|$ (=Betrag von $\vec{a}$), dann erhalten wir:

Die Länge oder der Betrag von $\vec{a}$ wird gegeben durch:
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

(6.1.9) Anstelle von $\vec{a} \cdot \vec{a}$ schreibt man gerne auch $\vec{a}^2$. Damit folgt die nützliche Gleichung $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Links steht das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit sich selbst, rechts das Quadrat einer reellen Zahl. Rechnen Sie daher nie mit der unsinnigen Gleichung $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$.

Nützliche Gebrauchsregel: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ oder $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

(6.1.10) Nicht erklärt und sinnvoll sind Ausdrücke wie $\vec{a}^3$ oder $\vec{a}^4$, auch wenn man ihnen in schludrigen Darstellungen immer wieder begegnet. $\vec{a}$ ist Vektor, $\vec{a}^2$ aber eine Zahl. Sinnvolle (und gemeinte) Terme sind dann $\vec{a}^2\vec{a}$ und $(\vec{a}^2)^2$.
(6.1.11) In physikalischen Texten schreibt man anstelle von $|\vec{a}|$ vielfach einfach a (derselbe Buchstabe). Insbesondere für $|\vec{r}|$ oder $|\vec{x}|$ schreibt man r. Dabei steht r dann für *Radius.* (Nicht aber x für $|\vec{x}|$)
(6.1.12) Es seien P und Q zwei Punkte des E^3 und $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K \in \mathbb{R}_K^3$ zugehörige Koordinatenvektoren. Unter dem *Abstand von P und Q* versteht man die Größe $\left|x_P^K - \vec{x}_Q^K\right|$, also die Länge des Differenzvektors. Diesen Differenzvektor $x_P^K - \vec{x}_Q^K$ sollte man *Abstandsvektor* nennen und beides nicht verwechseln. Der *kürzeste Abstand einer Geraden vom Ursprung* ist daher eine Zahl, kein Vektor. (Vgl. Frage und Figur aus (3.3.11)).

6.1.1b **Einheitsvektoren**

(6.1.13) Mit Hilfe des Betrages kann man beliebige Vektoren ($\neq \vec{0}$) formelmäßig nach Richtung und Länge zerlegen. Dazu schreibt man einfach $\vec{a} = |\vec{a}| \left(\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right)$. (Gezieltes Ausklammern, Kap. 1.2.3.)

T Einen Vektor vom Betrage 1 nennt man einen *Einheitsvektor.* Beispielsweise ist $\vec{e}_1$ ein solcher, ebenso wie $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$. Und allgemein ist $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ein Einheitsvektor in Richung von $\vec{a}$.

$$\boxed{\text{Für jedes } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ ist } \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ Einheitsvektor in Richtung von } \vec{a}.}$$

☐ Bestimmen Sie die Einheitsvektoren für (1,1,0) und (1,1,1) und (1,2,3).

☐ Welche Interpretation hat $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}$

(6.1.14) In physikalischen Formeln trennt man auf diese Weise in Vektortermen gerne Richtung und Betrag voneinander. Ein typisches Beispiel ist die Formel für die Coulombkraft, die die Kraft beschreibt, die eine elektrische Punktladung (im Ursprung) auf eine zweite mit Ortsvektor $\vec{r}$) ausübt. Für diese Kraft gilt:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}.}$$

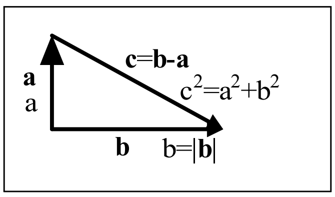
☐ Wie groß ist die Kraft, wenn die krafterzeugende Ladung sich nicht im Ursprung befindet, sondern in einem Punkt mit Ortsvektor $\vec{R}$?

☐ Jetzt können wir auch die Winkelhalbierende zwischen zwei gegebenen Vektoren bestimmen. Überlegen sie selbst, dass deren Richtung durch $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ festgelegt wird. Welcher Unterschied besteht zu $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$? Welcher zusätzliche Faktor ist anzubringen, damit man den Vektor der Winkelhalbierenden im Dreieck erhält?

6.1.1c **Das Skalarprodukt senkrechter Vektoren**

⇕ **(6.1.15)** Nachdem wir durch Herumspielen gesehen haben, dass die eingeführte Zuordnung *Skalarprodukt* nützlich ist, wenden wir uns der Vermutung (6.1.6) zu. Dazu müssen wir zunächst auf irgendeine Weise festlegen, wie *Senkrechtstehen* geometrisch zu überhaupt zu verstehen ist. Wir tun das ohne weitere Rechtfertigung und Begründung über den Pythagoras, den wir mit Hilfe des Abstandsbegriffes jetzt vektoriell formulieren können:

> Es seien $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ geometrische Pfeile.
> Dann steht $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ genau dann senkrecht, wenn für das durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Dreieck der Pythagoras gilt. In Formeln:
> $|\vec{a}|^2 + |b|^2 = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2$



(6.1.16) Nach (6.1.9) können wir diese Gleichung wie folgt umschreiben:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lädt zunächst dazu ein, sie distributiv auszurechnen. Ist das zulässig? Wir müssen uns fragen, ob für das Skalarprodukt die Distributivgesetze gelten. Wir werden gleich zeigen, dass das der Fall ist. Allgemeiner ist die folgende Rechnung zulässig, bei der auch $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ benutzt wird:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Zusammengenommen folgt aus dieser Gleichungskette $0 = \vec{a}\cdot\vec{b}$. Jetzt argumentieren wir wie folgt: Wenn das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Dreieck den Pythagoras erfüllt (1. Gleichheitszeichen!), gilt obige Rechnung. Und das heißt $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist Null.
Ist umgekehrt $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, dann folgt:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + b^2 - 0 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}).$$

Und das ist gerade der Pythagoras.

T **(6.1.17)** Ist mindestens einer der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor, dann gilt auch noch $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. In diesem Fall entartet das Dreieck. Um unangenehme Fallunterscheidungen zu vermeiden, **sagt man (vereinbarungsgemäß), dass der Nullvektor auf jedem Vektor senkrecht steht.**

⇑ **(6.1.18)** Damit können wir folgendes zusammenfassende Resultat formulieren:

Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3_K$. Dann gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen.

!⇑ Unsere ursprüngliche Vermutung, die den Einstieg in die Überlegungen lieferte, ist damit bestätigt: **Ist** $\vec{a} \neq \vec{0}$, **dann besteht die Lösungsebene der linearen Gleichung** $\vec{a}\cdot\vec{x} = 0$ **aus der Ebene senkrecht zu** $\vec{a}$.

□ Es sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit gegebenem $\vec{a}^K = (a_1, a_2, a_3)$. Sie suchen zwei unabhängige Vektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen. (Zwei, nicht alle!). Eine mögliche Lösung können Sie sofort - ohne Rechnung - hinschreiben, $\vec{s}_1^K = (.,.,.)$ und $\vec{s}_2^K = (.,.,.)$. Nämlich?

6.1.1d **Die Rechenregeln des Skalarproduktes**

⇓ Erfüllt das Skalarprodukt tatsächlich die soeben benutzten Regeln? Diese Frage bleibt zu prüfen.
(6.1.19) Zunächst das **Kommutativgesetz**. Es ist offensichtlich erfüllt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Die Gleichheit in der Mitte ist für die Rechtfertigung entscheidend. Dort wird $a_1b_1 = b_1a_1$ benutzt. Das ist das Kommutativgesetz für die Zahlmultiplikation.
(6.1.20) Wie steht es mit den **Distributivgesetzen**? Wir möchten $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ nachweisen. Wir rechnen wie folgt, wobei wir naheliegend die 1-Komponente von $\vec{a}+\vec{b}$ mit (a+b)$_1$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b+c)_1 + a_2(b+c)_2 + a_3(b+c)_3 \\
&= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3) \\
&\overset{!}{=} a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.
\end{aligned}$$

Am Anfang und Ende der Rechnung werden wieder nur Definitionen eingesetzt. In der mittleren Zeile ($\overset{!}{=}$) wird - entscheidend für die Gültigkeit der Rechnung - das Distributivgesetz für die reellen Zahlen benutzt. Wie kommt man schließlich auf die vorletzte Umformung?

(6.1.21) Dazu der nachfolgende Einschub zur *Tunnelmethode.*

> **Die Tunnelmethode**
> Anfänger haben erfahrungsgemäß beim Überprüfen - oder der Verifikation - von Hypothesen wie "Für das Skalarprodukt gelten die Distributivgesetze" zunächst vielfach große Schwierigkeiten. Zwar können sie die einzelnen Rechenschritte nachvollziehen, sehen aber nicht, wie man auf sie kommt, wie man selbst diesen Schritt findet. Oben in der Rechnung ist der vorletzte Schritt ein Beispiel. Als Hilfe in derartigen Fällen sollte man sich merken.
> **Der Tunnel durch die Finsternis darf , ja sollte, von beiden Seiten begonnen werden!**
> Die zu prüfende Gleichung ist ja - als Hypothese - bekannt. Man rechnet beide Seiten - in unserem Fall $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ - getrennt soweit wie möglich aus und versucht schließlich die Resultate in Übereinstimmung zu bringen. In unserem Fall gelangt man problemlos von beiden Seiten bis zu der kritischen Umformung und sieht sofort die Gleichheit.
> . In der Endformulierung des Beweises muß man dann nur die Umformungen des zweiten Teiles in der **umgekehrten Reihenfolge** aufgeschrieben, wodurch diese Umformaungen vielfach schwierig erscheinen. (Im Extremfall faßt sich der Leser an den Kopf und fragt: Wie ist der Autor nur auf diese geniale Umformung gekommen? Das kann ich nie. Was nicht stimmt. Man muß nur einen Teil der Rechnung in der umgekehrten Richtung ausführen.) Für die Gültigkeit Gleichheit ist diese Umkehrung der Reihenfolge natürlich zulässig.

Wir werden im Verlauf des weiteren Kurses eine Reihe von Anwendungsbeispielen dieser Methode begegnen. (Vgl. etwa (6.2.14))
(6.1.22) Das erste Distributivgesetz ist damit bewiesen. Das zweite folgt über die Kommutativität.
☐ Beweisen Sie die folgende Regel, die wir bereits von der Matrixliniearität (5.1.27) her kennen:

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) \quad \text{für} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

(6.1.23) Die Regel erweist sich als sehr nützlich. Generell ist es empfehlenswert, gemeinsame Faktoren, eventuell auch Hauptnenner aus Tupeln auszuklammern. Bei einer zusätzlichen Skalarproduktbildung können dann derartige Faktoren einfach vorab zusammengezogen werden.Beachten Sie, was diese Regel bewirkt: Ist $\vec{c}=(1,2,2)$ mit $|\vec{c}|=5$, so folgt $|3\vec{c}|=3\cdot 5=15$.
☐ Rechnen Sie dazu das Skalarprodukt der folgenden beiden Vektoren auf zwei Weisen aus: $\vec{x}=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5})=\frac{1}{30}(15,10,6)$ und $\vec{y}=(14,21,35)=7(2,3,5)$.
Man begegnet leider immer wieder einem erstaunlichen Drang zum umständlichen Rechnen, wohl weil man dabei ohne Anwendung der *abstrakten Formel* $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b})=\alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$ auskommt. Sagen wir $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{5},\frac{1}{7},-\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{10}+\frac{2}{21}-\frac{3}{14}=....$ statt $...\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{35}(3,4,3)(7,5,15)=\frac{21+20-45}{210}=-\frac{2}{105}$
(6.1.24) Die Distributivgesetze und die zuletzt bewiesene Regel sind für das Rechnen mit Skalarprodukten ausgesprochen wichtig. Ihre Form ist analog zu der der Linearitätsregeln aus dem Matrixbereich, nur dass sie hier für beide Faktoren gelten. Man charakterisiert sie daher als *Bilinearität.* Zusammengefaßt erhält man folgenden Satz von **Rechenregeln für das Skalarprodukt:**

Kommutativität	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	für alle $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$
Bilinearität	$\vec{a}\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{y}$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}$ $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$	für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ und $\alpha\in\mathbb{R}$.

⇑ Damit sind alle Regeln bewiesen, die wir zur Ausführung der Pythagorasrechnung benötigt haben. Das in (6.1.18) angegebene Resultat ist bewiesen.
(6.1.25) Eine weiteres anstehendes Problem: Wie rechnet man üblicherweise mit dem Skalarprodukt, was sind die zu merkenden **Gebrauchsregeln**? Was für Umformungen sind zu vermeiden und fehlerhaft? Hierzu vergleicht man nochmals mit den üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen, wobei man findet, dass weitere für sie gültige Regeln **nicht** übertragbar sind. Nehmen wir das Assoziativgesetz. Also die beiden Terme $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ und $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$. Der erste Term ist ein Vektor in Richtung von $\vec{c}$, der zweite einer in Richtung von $\vec{a}$. Die Ausdrücke können nicht allgemein gleich sein. Das Assoziativgesetz und die daraus gefolgerten Konsequenzen gelten nicht.

Zusammengefaßt erhalten wir den folgenden Satz von Gebrauchsregeln für den Umgang mit dem Skalarprodukt:

- ♦ Mit Hilfe des Skalarproduktes dürfen immer nur Produkte aus **zwei** Vektoren gebildet werden. Das Skalarprodukt ist sorgfältig vom Produkt zweier Zahlen und vom Produkt eines Vektors mit einer Zahl zu unterscheiden.
- ♦ Man darf nie durch einen Vektor teilen. D.h. $(\vec{a}\cdot\vec{x}) = b$ hat viele Lösungen.
- ♦ Alle Termumformungen, die nur die Rechenregeln aus (6.1.24) verwenden, sind zulässig. Insbesondere gilt für das Produkt von zwei Summen die Regel *Jeder mit jedem,* wobei reine Zahlfaktoren noch vorgezogen werden können. Damit lassen sich viele Rechnungen völlig analog zu reellen Rechnungen ausführen.

(6.1.26) Verstöße gegen die erste Regel findet man nicht selten. So begegnet man immer wieder Umformungen wie "$(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x} = \vec{a}\vec{x}^2$. Oder $(\vec{a}\vec{x})^2 - \vec{a}^2\vec{x}^2 = 0$. So etwas führt dann zu abenteuerlichen geometrischen und physikalischen Konsequenzen, die jedoch übersehen werden. Etwa: "Jedes Dreieck hat den Flächeninhalt 0."

☐ Wieso sind die folgenden beiden Terme zulässig, kein Verstoß gegen die zweite Regel?

$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}{\vec{a}^2} \quad \text{und} \quad \frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}}{\vec{x}^2}.$$

Die folgenden Termumformungen dagegen sind grausame Regelverstöße:

$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}{\vec{a}^2} = \vec{x}^2 \qquad \frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}}{\vec{x}^2} = \vec{a}.$$

Wie steht es mit $\frac{\vec{x}^2}{|\vec{x}|} = |\vec{x}|$?

☐ Berechnen Sie $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})\cdot(3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$. (An das sinnvolle Ordnen denken!)

☐ Wie läßt sich das Skalarprodukt in die Methode der Verlaufsdiagramme einfügen? Kap. 3.1.1 und speziell (3.2.6). Analysieren Sie damit einige Terme und Rechengesetze.

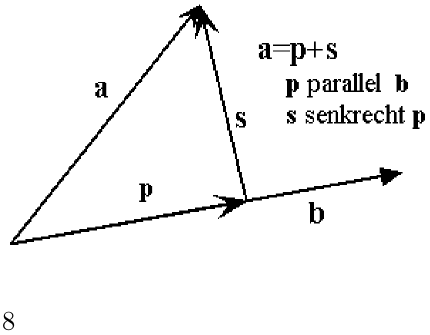
T Bisher haben wir das Skalarprodukt immer durch einen Punkt angedeutet, also $\vec{a}\cdot\vec{b}$ geschrieben. Diesen Punkt läßt man meist (gefahrlos) fort. Klammern sollte man dagegen nicht sparen. Es ist besser für $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ einfach $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ zu schreiben, nicht aber $\vec{a}\cdot\vec{b}\vec{c}$.

☐ Aus 4 Zahlfaktoren kann man 5 zulässige Beklammerungen, aus 5 bereits 14 bilden. (Frage in (3.3.13).) Gilt das Assoziativgesetz, so liefern alle diese Beklammerungen dasselbe Resultat. Wieviel unterschiedliche Zuordnungen (Rechenausdrücke) erhält man, wenn man 4 bzw. 5 Vektorfaktoren nimmt und und auftretende Produktzeichen je nach Zulässigkeit als Skalarprodukt, als Produkt eines Vektors mit einer Zahl oder als Produkt zweier reeller Zahlen interpretiert? (Feste Reihenfolge der Faktoren. Verwenden sie unterschiedliche Bezeichnungen für die verschiedenen Produkte. Arbeiten sie mit Verlaufsdiagrammen.)

6.1.2 Die geometrische Form des Skalarproduktes

(6.1.27) Wir kommen jetzt zu einem äußerst wichtigen Resultat, das uns eine geometrische Interpretation der Skalarproduktbildung liefern wird. Seien $\vec{a}^K$ und $\vec{b}^K$ zwei Vektoren ungleich Null aus $\mathbb{R}^3_K$. Wir bilden die Konfiguration der Skizze. D.h. wir zerlegen $\vec{b}^K$ in eine eine zu $\vec{a}^K$ parallele und eine zu $\vec{a}^K$ senkrechte Komponente. Also $\vec{b}^K = \vec{p}^K + \vec{s}^K$, wobei $\vec{p}^K$ parallel zu $\vec{a}^K$ sein soll und $\vec{s}^K$ senkrecht auf $\vec{a}^K$ und damit $\vec{p}^K$ steht. Den Winkel, den $\vec{a}^K$ und $\vec{b}^K$ miteinander bilden, bezeichnen wir mit ϑ. Er hängt nur von den beiden Pfeilen ab, nicht von der Wahl der Koordinatenachsen.

Zerlegung von $\vec{a}^K$ in eine zu $\vec{b}^K$ parallele und senkrechte Komponente: $\vec{a}^K = \vec{p}^K + \vec{s}^K$ $(\vec{p}^K\cdot\vec{s}^K) = 0$ und $\vec{p}^K || \vec{b}^K$. ϑ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Dann folgt aus der Skizze sofort $\left|\vec{p}^K\right| = \left|\vec{b}^K\right| \cos\vartheta$ und damit $\vec{p}^K = \left(\left|\vec{b}^K\right| \cos\vartheta\right) \frac{\vec{a}^K}{|\vec{a}^K|}$. Außerdem gilt nach (6.1.18), dass $\vec{a}^K \cdot \vec{s}^K = 0$ ist. Jetzt rechnen wir unter Ausnutzung der Bilinearität wie folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K &= \vec{a}^K(\vec{p}^K + \vec{s}^K) = \vec{a}^K\vec{p}^K + \vec{a}^K\vec{s}^K = \vec{a}^K\vec{p}^K = \vec{a}^K \cdot \left(\left(\left|\vec{b}^K\right| \cos\vartheta\right) \frac{\vec{a}^K}{|\vec{a}^K|}\right) \\
&= \left(\left|\vec{b}^K\right| \cos\vartheta\right) \frac{\left(\vec{a}^K\right)^2}{|\vec{a}^K|} = \left|\vec{a}^K\right| \left|\vec{b}^K\right| \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Es ist $\vec{a}^K$ Koordinatenvektor des geometrischen Pfeiles $\vec{a}$. Dann gilt $\left|\vec{a}^K\right| = |\vec{a}|$. Die Länge von $\vec{a}$ ist gleich der mit Hilfe des Skalarproduktes berechnete Zahl $\left|\vec{a}^K\right| = \sqrt{\vec{a}^K \cdot \vec{a}^K}$.
(6.1.28) Damit folgt insgesamt:

$$\boxed{\boxed{\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\vartheta}}$$

!! Das ist die versprochene geometrische Interpretation des Skalarproduktes. Die linke Seite wird koordinatenabhängig wie bisher bestimmt. **Die rechte Seite dagegen hat eine rein geometrische Bedeutung, da nur die Längen der beiden Pfeile und der Winkel zwischen ihnen vorkommen.**
(6.1.29) Bisher haben wir das Skalarprodukt nur für Tupel aus $\mathbb{R}^3$ bzw. für Koordinatenvektoren aus $\mathbb{R}^3_K$ definiert. Jetzt können wir die Definition auf geometrische Pfeile aus V^3_0 bzw. V^3 ausdehnen. Wir setzen einfach:

Die geometrische Form des Skalarproduktes	
Für $\vec{a}, \vec{b}$ aus V^3_0 bzw. V^3 sei	$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\vartheta.$

Damit kann man für eine Konfiguration zweier geometrischer Pfeile das Skalarprodukt ausrechnen. In vielen Beispielen - besonders der Physik - sind die Beträge und der Winkel bekannt und dann kann man diese Formel anwenden.
(6.1.30) Führt man zusätzlich zum Ursprung ein volles Koordinatensystem K ein, dann kann man das Skalarprodukt entweder geometrisch oder über die Komponenten ausrechnen. **Und beide Wege ergeben dieselbe Zahl:**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^K \cdot \vec{b}^K}.$$

Dies bedeutet, dass die oben formulierten Rechenregeln auch für die geometrische Form des Skalarproduktes gelten.
(6.1.31) Führt man ein anderes kartesisches Koordinatensystem L mit **demselben Ursprung** ein, dann ändern sich die Komponenten der beteiligten Vektoren, nicht aber die geometrische Konfiguration. D.h. es gilt

$$\boxed{\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K = \vec{a}^L \cdot \vec{b}^L}.$$

☐ Konkretisieren Sie diesen Sachverhalt an einem einfachen Beispiel in der Ebene!
Das letzte Resultat ist von großem Wert für die Anwendungen. Denn damit ist gesichert, dass man mit Hilfe des Skalarproduktes **beobachterunabhängig** geometrische und physikalische Phänomene beschreiben kann.
(6.1.32) *Arbeit* ist eine typische Größe die durch ein Skalarprodukt zweier Vektoren beschrieben wird. Stellen Sie sich vor, Sie müßten einen Stein einen Hang emporschleppen. Die Arbeit ist ein Maß für die Anstrengung, die Sie dabei zu erbringen haben. **Beobachterabhängigkeit** würde folgendes bedeuten: Oben am Hangende steht der Beobachter, der die Koordinatenachsen festlegt. Mag er Sie persönlich, dreht er die Achsen so, dass der Arbeitswert klein wird, Sie ohne Mühe hinaufsteigen können. Mag er Sie nicht, dreht er die Achsen so, dass Sie kaum noch vorankommen.
Sieht man von Beschreibungsgrößen wie dem Koordinatenvektor ab, so sind physikalische Größen erfahrungsgemäß nicht beobachterabhängig, sollten es nicht sein. Zumindest sollte man die Frage der eventuellen Beobachterabhängigkeit jeweils sorgfältig analysieren. So haben wir in (4.2.7) gesehen, dass der durch den beobachterabhängigen Schwerpunktsvektor festgelegte Punkt aus E^3 beobachterunabhängig war. Oder: "freie Vektoren " hängen nicht von der Wahl des Koordinatenursprunges ab, gebundene tun es in ganz bestimmter Weise.
☐ Wie steht es mit der Geschwindigkeit?

☐ Nicht selten wird das Skalarprodukt durch Analogisierung wie folgt gebildet:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3).$$

Zeigen Sie über einfache Konkretisierungen, dass der entstehende Vektor (=geometrische Pfeil) bei festem Ursprung beobachterabhängig ist, was diese Bildung als an und für sich nahe liegendes Vektorprodukt disqualifiziert. (Stellen Sie sich den Beobachter hier einmal als Windgott vor!)

(6.1.33) Die Argumentation aus (6.1.27) liefert noch ein weiteres Resultat. Wir haben dort den Vektor $\vec{b}$ in eine zu $\vec{a}$ parallele und eine senkrechte Komponente zerlegt. $\vec{b} = \vec{p} + \vec{s}$. Für $\vec{p}$ und $\vec{s}$ lassen sich Formeln angeben, die häufig nützlich sind:

Es galt $\vec{p} = \left(\left|\vec{b}\right| \cos\vartheta\right) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\vartheta\right) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{a}^2}\vec{a}$. Sind also $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bekannt, so kann man die Projektion $\vec{p}$ durch Skalarproduktbildung bestimmen. $\vec{s}$ erhält man anschließend durch $\vec{s} = \vec{b} - \vec{p}$.

	Die Zerlegung in parallele und senkrechte Komponente.
$\Rightarrow$	Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit $\vec{b} \neq \vec{0}$.
!	Dann kann man $\vec{a}$ eindeutig in eine zu $\vec{b}$ parallele Komponente $\vec{p}$ und eine zu $\vec{b}$ senkrechte Komponente $\vec{s}$ zerlegen.
	D.h. es gilt $\vec{a} = \vec{p} + \vec{s}$ mit $\vec{p}$ parallel zu $\vec{b}$ und $\vec{p} \cdot \vec{s} = 0$.
	$\vec{p}$ und $\vec{s}$ werden durch folgende Formeln gegeben:
!!!	$\vec{p} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b}$ und $\vec{s} = \vec{a} - \vec{p}$.

☐ **(6.1.34)** Es sei K ein kartesisches Koordinatensystem und $\vec{x} \in V^3$ bzw. V_0^3. Beweisen und diskutieren Sie die folgenden Formeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3 \\ \text{Also} \quad x_1 = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1), \quad x_2 = (\vec{x}\cdot\vec{e}_2) \quad \text{und} \quad x_3 = (\vec{x}\cdot\vec{e}_3), \end{array}}$$

6.1.3 Winkel und Projektion

(6.1.35) Eingangs wurde gesagt, dass wir noch nicht in der Lage seien, vektoriell Winkel zu bestimmen. Das ist jetzt anders. Die geometrische Form des Skalarproduktes löst das Problem sofort, man muss die Formel nur nach $\cos\vartheta$ auflösen:

$\Rightarrow$	Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren $\neq \vec{0}$.
$\Rightarrow$	ϑ sei der Winkel zwischen den beiden Vektoren mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$.
!!!	Dann gilt $\cos\vartheta = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$.

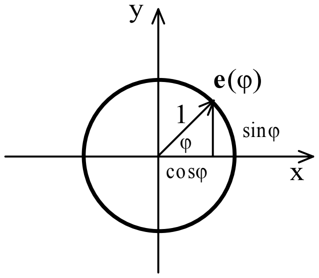
Die zur Winkelbestimmung benötigten Skalarprodukte können fallspezifisch über die Komponentenform oder die geometrische Form bestimmt werden.

Beispiel: $\vec{a}^K = (1,1,1)$ und $\vec{b}^K = (2,-3,2)$. Es folgt (ohne jede schriftliche Zusatzrechnung, sofort!) $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{17}}$. Wir raten dagegen dringend von Rechnungen und Darstellungen der folgenden Art ab, die die Anwendung der Formel zu einem Schreibexerzitium zu machen, das etwa so aussieht:

$$cos\vartheta = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^1 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{1\cdot 2 - 1\cdot 3 + 1\cdot 2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}} = ...$$

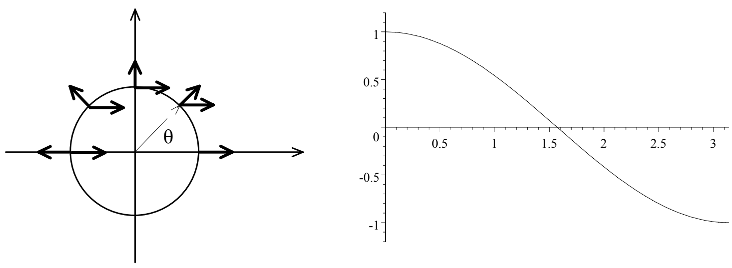
Es gibt keine sinnvolle Begründung für diese Art sinnloser Arbeitsbeschaffung, der man leider allzu häufig begegnet.

(6.1.36) Wir betrachten jetzt eine feste Ebene mit Koordinatensystem K. Der Raum der zugehörigen Koordinatenvektoren ist $\mathbb{R}_K^2$. Wir legen einen Kreis mit Radius 1 um den Ursprung. Jeder Punkt auf dem Kreis bestimmt dann einen Einheitsvektor $\vec{e}(\varphi)$, wobei φ der Winkel zwischen der 1-Richtung und dem Vektor sein soll. Aus der Skizze liest man sofort die angegebene Darstellung des Einheitsvektors ab. (Vgl. (4.5.20))



$\vec{e}(\varphi) = \cos(\varphi)\vec{e}_1 + \sin(\varphi)\vec{e}_2$
$\vec{e}^K(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$
Orts- und Koordinatenvektoren
Der Punkte des Einheitskreises

Skalarproduktbildung gibt $\cos(\varphi) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}(\varphi)$. Jetzt sieht man unmittelbar, wie sich der Wert des Skalarproduktes (bei festen Vektorlängen) mit dem Winkel ändert: Man startet mit dem Wert 1 beim Winkel Null. Bei spitzen Winkeln erhält man einen positiven Wert unter 1. Senkrecht gehört zum Wert Null, ein stumpfer Winkel liefert einen negativen Wert und Antiparallelität gibt schließlich den Wert -1.



(6.1.37) *Zusammenfassung: Das Skalarprodukt ist eine Bildung, die aus jeweils zwei Vektoren gleichen Typs eine Zahl, ein Skalar macht. Die Auswertung kann entweder über die* ***Komponentenform*** *oder über die* ***geometrische Form*** *erfolgen. Die Gleichheit des Resultates wird durch (6.1.31) sichergestellt.*
Die Rechenregeln für den Umgang mit dem Skalarprodukt sind in (6.1.23) und (6.1.25) zusammengatellt. Man sollte sie zur Termumformung verwenden, aber auf Unterschiede zum Zahlrechnen achten.
Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich die geometrischen Begriffe Länge, Abstand und Winkel in das vektorielle Beschreibungsschema einfügen. Insbesondere stehen zwei Vektoren genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.
Eine nützliche Konstruktion ist die Zerlegung eines Vektors in eine zu einem zweiten Vektor senkrechte und parallele Komponente. Die Formeln werden in (6.1.33) gegeben.
Nachfolgend geben wir noch einige Anwendungsbeispiele, die aufzeigen, wie weit das Spektrum an Problemen ist, das durch einen Formalismus wie den des Skalarprodutes überdeckt wird. Die erste Anwendung besteht in der Abrundung unserer Einstiegsidee in das Thema. Die zweite ist vom Routinetyp, einer Winkelbestimmung. In der dritten Anwendung wird ein Winkel über eine zusätzliche Idee, also nicht routinemäßig bestimmt. Und bei der vierten geht es um eine Verallgemeinerung des Formalismus.

6.1.4 Anwendungsbeispiele

6.1.4a Gleichungsbeschreibung von Ebenen im Raum

(6.1.38) Kehren wir zu unserem Einstiegsproblem, der geometrischen Interpretation der 1×3-Gleichung zurück. Die homogene Gleichung schreibt sich jetzt $(\vec{a} \cdot \vec{x}) = 0$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$. Lösungsmenge ist die geometrisch eindeutig festgelegte Ebene aller auf $\vec{a}$ senkrechten Vektoren. Übergang zur inhomogenen Gleichung $(\vec{a} \cdot \vec{x}) = b$ bedeutet nach den allgemeinen Resultaten in (5.3.24) **Parallelverschiebung der Lösungsmenge**. Wie weit ist parallel zu verschieben? Sei $\vec{X}$ irgendeine Lösung unserer Gleichung (Lösungsrolle, also gilt $\vec{a} \cdot \vec{X} = b$). Wir zerlegen $\vec{X}$ in eine zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und finden $\vec{X} = \frac{(\vec{X} \cdot \vec{a})}{\vec{a}^2}\vec{a} + \vec{s} = \frac{b}{\vec{a}^2}\vec{a} + \vec{s}$. Das ergibt offensichtlich für jedes $\vec{s}$ aus der zu $\vec{a}$ senkrechten Ebene eine Lösung. Wir berechnen mit Bilinearität

das Quadrat der Länge von $\vec{X}$ und finden wegen $\vec{a}\cdot\vec{s}=0$ sofort: $\vec{X}^2 = \frac{b^2}{\vec{a}^2} + \vec{s}^2$. Das heißt, der kürzeste Abstand gehört zu $\vec{s}=\vec{0}$ und der Vektor des kürzesten Abstandes ist einfach $\frac{b}{\vec{a}^2}\vec{a}$. **Um diesen Vektor ist die Lösungsebene parallel zu verschieben.**
(6.1.39) Das Resultat läßt sich noch anders interpretieren. In der Ebene hatten wir in Kap. 1.6 Geraden zunächst nicht vektoriell, sondern durch zugehörige Gleichungen beschrieben. Die Lösungen von y-mx-b=0 ergaben die Koordinatenvektoren der Punkte der Geraden. Wie sieht die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen aus? Nun die Lösungen von $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ ergeben die Koordinatenvektoren einer Ebene senkrecht zu $\vec{a}$. Eine skalare lineare Gleichung beschreibt also in drei Dimensionen eine Ebene, nicht eine Gerade, wie man vielleicht naiv verallgemeinert.
(6.1.40) Die Ebenengleichung läßt sich ebenso wie die Geradengleichung in eine Reihe **unterschiedlicher Formen** bringen, aus denen man jeweils bestimmte geometrische Konfigurationsgrößen ablesen kann. Wir starten mit der allgemeinen Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ und gehen durch Gleichungsumformung zu drei speziellen Formen über. Dabei nutzen wir die Bilinearität (6.1.24) des Skalarproduktes.

Umformung	Gleichung	Geom. Interpretation
Division durch $\lvert\vec{a}\rvert$ mit $\vec{n}=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\vec{n}$ Einheitsvektor	$\vec{n}\cdot x=\alpha$	$\alpha=\frac{b}{\lvert\vec{a}\rvert}$ kürzester Abstand der Ebene vom Ursprung
Division durch b mit $\vec{A}=\frac{\vec{a}}{b}$	$\vec{A}\cdot\vec{x}=1$	$\vec{A}=(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ a,b,c Achsenabschnitte .
Division durch a_3 mit $\vec{N}=\frac{1}{a_3}\vec{a}$	$\vec{N}\cdot\vec{x}=\frac{b}{a_3}$	z=$\frac{b}{a_3}$-$\frac{a_1}{a_3}x-\frac{a_2}{a_3}y$ Höhenfunktion

Beachten Sie: Die vorletzte Gleichung schreibt sich $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Den Schnitt mit der z-Achse erhält man durch Nullsetzen von x und y. Es bleibt $\frac{zs}{c}=1$ oder $z_s=c$.D.h. c gibt wie behauptet den zugehörigen Achsenabschnitt. Und die letzte erlaubt den Übergang zu einer Parameterdarstellung der Ebene

$$(x,y)\mapsto(x,y,z(x,y))=(x,y,\frac{b}{a_3}-\frac{a_1}{a_3}x-\frac{a_2}{a_3}y).$$

6.1.4b **Der Winkel zwischen zwei Geraden im Raum**

(6.1.41) Ein anderer Problemkreis: **Bestimme den Winkel zwischen zwei (eventuell windschiefen) Geraden**. Ist das ein sinnvolles Problem? Ja, startet man mit zwei sich schneidenden und nicht parallelen Geraden. Verschiebt eine Gerade in die Richtung, **senkrecht zu beiden Geraden**, bleibt der "Winkel" offensichtlich sinnvoll und unverändert. Stellen Sie sich dazu vor, dass Sie in Richtung der Verschiebungsrichtung auf die Konfiguration blicken! Man kann verschieben, bis sich die beiden Geraden treffen.
☐ Ausnahme: Die beiden Geraden sind parallel. Was geht schief? Macht das etwas?
(6.1.42) Die eigentliche Ausführung der Winkelbestimmung ist dann unproblematisch. Seien g und h die Geraden und $\vec{x}_g(a)=\vec{x}_0+a\vec{d}$ sowie $\vec{x}_h(b)=y_0+b\vec{f}$ zugehörige Parametrisierungen. **Der Winkel zwischen den Geraden ist gleich dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren** $\vec{d}$ und $\vec{f}$. Also $\cos(\gamma)=\frac{(\vec{d}\cdot\vec{f})}{\lvert\vec{d}\rvert\lvert\vec{f}\rvert}$.

Was ist, wenn man statt $\vec{f}$ den entgegengesetzten Vektor $-\vec{f}$ genommen hätte? Dann hätte man den negativen cos-Wert erhalten und damit den supplementären Winkel $\pi-\gamma$.
Hüten Sie sich davor, anstelle der Richtungsvektoren die Aufpunktsvektoren oder gar die Ortsvektoren in die Winkelformel einzusetzen. Das ergibt ziemlichen Unsinn. (Ursprungsabhängiger Winkel)

6.1.4c **Weitere Anwendungen**

(6.1.43) Wie erhält man die Gerade, die senkrecht auf zwei gegebenen unabhängigen Vektoren steht? (Wurde in (6.1.41) benötigt.) Die Antwort ist mit den Resultaten dieses Kapitels nicht schwer. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die beiden gegebenen Vektoren. $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ bestimmt alle Vektoren senkrecht zu $\vec{a}$. Will man zusätzlich senkrecht zu $\vec{b}$ erreichen, so muss man noch $\vec{b}\cdot\vec{x}=0$ fordern. Dh. die gesuchte Gerade folgt als Lösung des folgenden 2×3-Systems $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{x}=0, \quad \vec{b}\cdot\vec{x}=0}$. Ist hier ℓ=2, so folgt $k=3-2=1$. Die Lösungsmenge ist eine Gerade mit den gewünschten Eigenschaften.

(6.1.44) Wie groß ist der *Tetraederwinkel?* Das Tetraeder ist ein regelmäßiger symmetrischer Körper mit vier Eckpunkten. Wir legen den Ursprung in den Mittelpunkt des Körpers. Die Ortsvektoren der vier Eckpunkte sollen mit $\vec{x}_1,...,\vec{x}_4$ bezeichnet werden. Aus Symmetriegründen haben sie alle 4 dieselbe Länge a=$|\vec{x}_1| = |\vec{x}_2| = |\vec{x}_3| = |\vec{x}_4|$. Der Winkel zwischen zwei verschiedenen dieser Ortsvektoren ist der Tetraederwinkel τ. Auch er hat aus Symmetriegründen stets denselben Wert. Der Mittelpunkt stimmt mit dem Schwerpunkt überein (bei gleichen Massen). Dann gilt für unsere Ursprungswahl $\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4=\vec{0}$. Oder $\vec{x}_1 = -\vec{x}_2-\vec{x}_3-\vec{x}_4$. Von beiden Seiten dieser Gleichung bilden wir das Quadrat (im Sinne des Skalarproduktes). Beachten Sie, dass infolge der Bilinearität solche Zweierprodukte nach der üblichen Regel *jeder mit jedem* auszumultiplizieren sind. Es folgt:

$$\vec{x}_1^2 = (\vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4)^2 = \vec{x}_2^2+\vec{x}_3^2+\vec{x}_4^2+2\vec{x}_2\vec{x}_3+2\vec{x}_2\vec{x}_4+2\vec{x}_3\vec{x}_4.$$

Ausrechnen der Skalarprodukte mit der geometrischen Form und Einsetzen der aus der Symmetrie folgenden Relationen gibt $a^2 = 3a^2+6a^2\cos\tau$. Erwartungsgemäß fällt a heraus, denn dieser Wert bestimmt ja die Tetraedergröße. Man findet cos$\tau = -\frac{1}{3}$. Das negative Vorzeichen zeigt, dass es sich um einen stumpfen Winkel handelt. Sein numerischer Wert liegt etwas unter 110^0.
Beachten Sie: Wir haben nur die Rechenregeln für das Skalarprodukt und die Symmetrieeigenschaften des Körpers verwandt. Die Koordinatenvektoren $\vec{x}_i^K$ selbst haben wir nicht bestimmt.

☐ Wie wird man die (Plural!) entsprechenden Winkel beim Würfel bestimmen?

☐ Zeigen sie, dass in einer Raute (Viereck mit gleichlangen Seiten) die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

6.1.4d **Verallgemeinerung des Skalarproduktes**

(6.1.45) Bisher haben wir das Skalarprodukt nur für höchstens dreidimensionale Vektoren eingeführt. Läßt es sich auch auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern? Die Verallgemeinerung der Komponentenform ist problemlos möglich. Man hat nur n statt 3 Summanden a_ib_i zu nehmen. Aus der Komponentenform folgen dann aber auch sofort alle Rechenregeln. Diese gelten daher weiter. Wie steht es mit der geometrischen Form? Hat man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgewählt, so kann man die daraus erzeugte Ebene bilden und sich vorstellen, das sei ein Konfigurationsraum. Wir erwarten, dass darin die übliche ebene Geometrie gilt. Entsprechend übernehmen wir alle geometrischen Formeln für Betrag und Winkel. Damit können wir etwa den Winkel zwischen zwei Vektoren im Vierdimensionalen bestimmen. Sagen wir $\vec{a}=(1,2,3,4)$und $\vec{b}=(1,0,-1,0)$.Es folgt cos$\gamma = \frac{-2}{\sqrt{30}\sqrt{2}}$.

☐ **(6.1.46)** Eine vertrauensbildende Maßnahme für die soeben gegebene Überlegung: Betrachten Sie das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Dreieck. Rechnen Sie die drei Seitenlängen dieses Dreiecks (im Vierdimensionalen) aus. Dann zeichnen sie ein Dreieck mit den gefundenen Seitenlängen. Rechnen Sie die drei Winkel des Dreiecks im Vierdimensionalen aus und vergleichen Sie mit den gezeichneten Winkeln. Vorsicht, keinen supplementären Winkel nehmen.

6.1.4e **Termbau und Formeln**

(6.1.47) Das Skalarprodukt hat große Bedeutung für den Term- und Formelbau. Mit seiner Hilfe kann man Skalarfelder mit **geometrischer**, also koordinatenwahlunabhängiger Bedeutung konstruieren. Man kann also Ausdrücke konstruieren, in die man Vektoren eingibt und bei denen Zahlen herauskommen. Die einfachsten und wichtigsten Beispiele sind

$$\vec{x}\mapsto\vec{x}^2 \qquad \vec{x}\mapsto|\vec{x}| \qquad \vec{x}\mapsto(\vec{a}\cdot\vec{x}) \quad \vec{a} \text{ äußerer Parameter} \quad .$$

Diesen Konstruktionen begegnet man in physikalischen und geometrischen Formeln vielfach. Mit Hilfe solcher Bausteine lassen sich problemlos Terme vom Feldtyp bilden, bei denen ein Vektor eingeben wird und eine Zahl oder ein anderer Vektor herauskommt. Einige Beispiele derartiger Termkonstruktionen:

$(\vec{a}\vec{x})\,\vec{x}^2\vec{x}$	$\frac{\vec{a}}{1+\alpha\vec{x}^2}$	$\vec{A}^2\vec{x}^2-(\vec{A}\vec{x})^2$	$\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}^2-\vec{x}^2}\vec{x}$

Im Analysisteil gehen wir auf die Geometrie der Skalarfelder genauer ein.
(6.1.48) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei geometrische Pfeile. Wie groß ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms?

Sei ϑ wieder der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann ist der Flächeninhalt gegeben durch $F = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\vartheta$. Hätte man anstelle des Sinus den Cosinus, so ließe sich das als Skalarprodukt schreiben. Über die Formel $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ kann man diese beiden Größen immer ineinander umwandeln. Also

$$F^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \sin^2\vartheta = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 (1-\cos^2\vartheta) = \vec{a}^2 b^2 - (|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\vartheta)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

Damit haben wir ein Beispiel einer einfachen, aber nützlichen Formel mit Skalarprodukten:

$$\boxed{F^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}.$$

Jetzt legen wir ein Koordinatensystem so, dass die beiden Vektoren in der 1-2-Ebene liegen. Also $\vec{a}^K = (a_x, a_y, 0)$ und $\vec{b}^K = (b_x, b_y, 0)$. Dann folgt in Koordinaten

$$F^2 = (a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2) - (a_x b_x + a_y b_y)^2 = a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y = (a_x b_y - a_y b_x)^2,$$

wie man sofort nachrechnet. Wir werden dieser Formel im Zusammenhang mit dem Vektorprodukt erneut begegnen.
(6.1.49) Bestimme die Mittelsenkrechte zur Seite $\vec{a}$ in dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Dreieck. Diese Aufgabe lösen wir mit Hilfe unserer Projektionsformel. Dabei nehmen wir an, dass $\vec{b}$ nicht dieselbe Richtung wir $\vec{a}$ hat. Die Idee: Zerlege $\vec{b}$ in eine zu $\vec{a}$ parallele und eine senkrechte Komponente. Letztere gibt uns die gesuchte Richtung der Mittelsenkrechten. Nach (6.1.33) folgt die senkrechte Komponente zu $\vec{b} - \frac{(\vec{b}\vec{a})}{\vec{a}^2}\vec{a}$. Bei einem Richtungsvektor kommt es auf Länge nicht an. Durch Anbringen eines gemeinsamen Faktors $\vec{a}^2$ beseitigen wir den Bruch und erhalten folgende Formel für einen (nicht etwa "den") Richtungsvektor der Senkrechten auf $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{N}_{\vec{a}} = \vec{a}^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}}$$

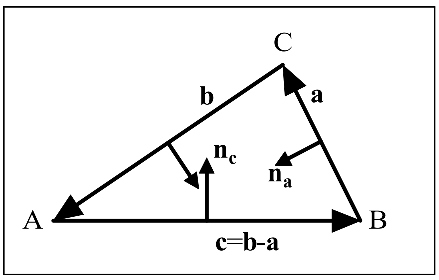
☐ Verifizieren Sie $\vec{N}_{\vec{a}}^2 = \vec{a}^2 F^2$ rechnerisch. Kann man das ohne Rechnung verstehen?
☐ Leiten Sie Sinussatz und Cosinussatz für Dreiecke vektoriell her. (Immer mit einer geeigneten Skizze beginnen!)

6.1.4f **Einige Dreiecksformeln**

(6.1.50) Wir wollen jetzt etwas systematischer ein allgemeines Dreieck **vektoriell** beschreiben. Das Dreieck wird zunächst samt seiner Lage im Raum durch seine drei Eckpunkte A,B,C$\in E^3$ vorgegeben. Die üblichen geometrischen Eigenschaften des Dreiecks werden dann durch die Kantenvektoren festgelegt. Um die Gleichwertigkeit der drei Punkt zu sichern, definieren wir die Kantenvektoren wie folgt:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{x}_C - \vec{x}_B \quad \vec{b} = \vec{x}_A - \vec{x}_C \quad \vec{c} = \vec{x}_B - \vec{x}_A \quad \text{damit gilt } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}}$$

Bei Bedarf kann man mit Hilfe der letzten Gleichung $\vec{c}$ eliminieren, aber dann ergeben sich unsymmetrische Formeln, da die beiden verbleibenden Seiten ausgezeichnet werden.



Wir brauchen noch die drei Richtungsvektoren für die Seitensenkrechten. Verallgemeinerung von (6.1.49) gibt:

$$\vec{N}_{\vec{a}} = \vec{a}^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} \quad \vec{N}_{\vec{b}} = \vec{b}^2\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{b} \quad \vec{N}_{\vec{c}} = \vec{c}^2\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{c}$$

☐ Zeigen Sie, dass diese Vektoren von ihren Seiten aus ins Innere des Dreiecks weisen, sofern dieses nicht entartet ist. Zeigen Sie beispielsweise $\vec{N}_{\vec{a}}\cdot\vec{b} = F^2$ und $\vec{N}_{\vec{a}}\cdot\vec{c} = -F^2$ gilt. Wieso folgt hieraus die Behauptung?

(6.1.51) Mit dieser Information kann man die **Höhen**, die **Mittelsenkrechten** und die **Winkelhalbierenden** im Dreieck angeben. Für all diese Objekte kennt man ja jeweils einen Punkt und eine Richtung. Jetzt kann man die zugehörigen Schnittpunkte vektoriell bestimmen. (Zunächst einen Zweierschnittpunkt und dann zeigen, dass die dritte Gerade auch durch diesen Punkt verläuft.)

Das gibt (mit **einiger** Rechnung!) die folgenden symmetrischen vektoriellen Formeln:

Der Höhenschnittpunkt:	$\vec{H} = \frac{1}{F^2}\left((\vec{a}\vec{b})\,(\vec{a}\vec{c})\,\vec{x}_A + (\vec{b}\vec{a})(\vec{b}\vec{c})\vec{x}_B + (\vec{c}\vec{a})(\vec{c}\vec{b})\vec{x}_C\right)$
Mittelsenkrechte	$\vec{M} = \frac{-1}{2F^2}\left((\vec{b}\vec{c})\vec{a}^2\vec{x}_A + (\vec{a}\vec{c})\vec{b}^2\vec{x}_B + (\vec{a}\vec{b})\vec{c}^2\vec{x}_C\right)$
Winkelhalbierende	$\vec{W} = \frac{1}{U}\left(\lvert\vec{a}\rvert\,\vec{x}_A + \lvert\vec{b}\rvert\,\vec{x}_B + \lvert\vec{c}\rvert\,\vec{x}_C\right)$ mit U=$\lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert + \lvert\vec{c}\rvert$

☐ Rechnen Sie einen dieser drei Fälle nach.

6.1.4g Schnittmengenbestimmung mit Hilfe von Koordinatengleichungen

(6.1.52) Bisher haben wir Schnittmengen mit Hilfe von Parametrisierungen bestimmt. Alternativ kann man auch von Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten ausgehen. Nehmen wir zwei Ebenen, die durch Bestimmungsgleichungen $\vec{a}\cdot\vec{x} = d$ und $\vec{b}\cdot\vec{x} = e$ festgelegt sind. Hier sind die Unbestimmten die Koordinaten der Punkte selbst, nicht zugehörige Parameter. Fügt man beide Gleichungen zu einem System zusammen, so ergibt die Lösung unmittelbar den Schnitt, genauer die Koordinatentripel eventueller Schnittpunkte.
Oder: $\vec{x}^2 = R^2$ beschreibt die Punkte einer Kugeloberfläche. und $\vec{a}\cdot\vec{x} = b$ die Punkte einer Ebene. Zusammen liefern beide Gleichungen den Schnitt der Flächen. Ausgechrieben erhält man ein System von 2 Gleichungen für drei Unbekannte:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{und} \quad a_1x + a_2y + a_3z = b.$$

Das System kann mit dem üblichen Eleiminationschema angegangen werden: Man löst eine Gleichung - etwa die zweite - nach einer Unbestimmten auf, setzt in die andere ein. Das gibt eine Gleichung für zwei Unbestimmte. Eine Unbestimmte erhält die Rolle eines freien Parameters, nach der anderen löst man auf. Usw.

☐ Führen Sie die Rechnung für $a_3 \neq 0$ aus.

Kap.6.2: **Das Vektorprodukt**

Inhaltsübersicht Kap. 6.2

Das Vektorprodukt soll im mathematischen Stil eingeführt werden. Eine solche Einführung ist effizient, elegant und korrekt, aber für viele Leser schwer zugänglich. Man sollte diesen Stil kennenlernen und möglichst auch erlernen. Zunächst der Text und dann eine Reihe von Kommentaren und Erläuterungen, wie man beim Durcharbeiten vorgehen sollte. Infolge der extremen Verdichtung eines solchen Textes kann man in gleicher Zeit durchaus mehr Stoff erarbeiten als bei einem Text herkömmlicher Art. Dabei ist natürlich die "Arbeitsaufwand pro Seite" auch deutlich größer anzusetzen. Das wird bei der Kritik an solchen Texten zunächst gerne mißachtet.

6.2.1a **Das Vektorprodukt im** $\mathbb{R}^3$

T Nachfolgend bezeichne V_0^3 immer den Raum V_0^3 **mit** Skalarprodukt. Auch der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem üblichen Skalarprodukt versehen.

Definition 1 *Seien* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *mit* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *und* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$*. Dann wird durch*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

eine innere Verknüpfung auf $\mathbb{R}^3$ *definiert. Sie wird Vektorprodukt oder auch Kreuzprodukt genannt.*

(6.2.1) Diese Verknüpfung ist offensichtlich bilinear und antikommutativ. Insbesondere gilt $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Das Produkt ist nicht assoziativ, wie das Beispiel $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{0}$ und $\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = -\vec{e}_2$ zeigt. Weiter gilt $\vec{a} \cdot (\ \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. D.h. das Vektorprodukt steht auf beiden Faktoren senkrecht. Schließlich verifiziert man rechnerisch für den Betrag die folgende Identität: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.
(6.2.2) Ist K ein kartesisches Rechtssystem für den V_0^3, dann übertragen wir die gegebene Produktbildung auf den zugehörigen $\mathbb{R}^3_K$. Wir wollen zeigen, dass dieses Produkt eine von K unabhängige geometrische Bedeutung hat.
(6.2.3) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$ mit Koordinatenvektoren $\vec{a}^K = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b}^K = (b_1, b_2, b_3)$. Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen unabhängig sein und E sei die von ihnen erzeugte Ursprungsebene. Wir bilden gemäß der Definition 1 den Vektor $\vec{a}^K \times \vec{b}^K$. Der zugehörige geometrische Pfeil steht senkrecht auf E mit einem Betragsquadrat $|\vec{a}^K \times \vec{b}^K|^2 = (\vec{a}^K)^2 (\vec{b}^K)^2 - (\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K)^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \sin^2(\theta) = \mathrm{F}^2$. Hierbei bezeichnet θ den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und F den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Bis auf eine Vorzeichenzweideutigkeit - der zu $\vec{a}^K \times \vec{b}^K$ entgegengesetzte Vektor erfüllt dieselben Bedingungen - ist das eine rein geometrische Charakterisierung des von $\vec{a}^K \times \vec{b}^K$ in V_0^3 erzeugten geometrischen Pfeiles.
(6.2.4) Die verbliebene Zweideutigkeit wird durch die Forderung beseitigt, dass die drei Pfeile $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ ein Rechtssystem bilden sollen. Die Bedeutung dieser Forderung erklären wir im nachfolgenden Teil durch Einführung des Orientierungsbegriffs.

6.2.1b **Orientierungen von Ebene und Raum**

(6.2.5) Es gibt immer zwei Orientierungen, aber viele unterschiedliche Möglichkeiten, eine Orientierung festzulegen oder zu bestimmen. Spannen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebene auf, dann sei der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ immer der kleinere (mit Wert unter π). Das geordnete Paar $(\vec{a}, \vec{b})$ legt dann einen Drehsinn des Winkels fest: Dieser soll von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ gehen.

Definition 2 *Sei* $E \subset V_0^3$ *eine Ebene. Eine Orientierungsfestlegung von E ist ein Paar* $(\vec{a}, \vec{b})$ *unabhängiger Vektoren dieser Ebene. Eine Orientierung der Ebene ist der durch* $(\vec{a}, \vec{b})$ *bestimmte Drehsinn der Ebene. Das Tripel* $(E, \vec{a}, \vec{b})$ *bezeichne wir als Ebene mit Drehsinn.*

Ist in E ein kartesisches Koordinatensystem gegeben, dann wird die übliche Winkelorientierung (mathematisch positiver Drehsinn) durch $(\mathrm{E}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ gegeben.
(6.2.6) Wann bestimmen zwei Orientierungsfestlegungen dieselbe Orientierung? Wir nennen zwei wichtige Fälle, bei denen der Drehsinn sicher nicht geändert wird, weil bei der Ersetzung die Winkelwerte 0 und π nie überschritten werden:

1. $(\vec{a}, \vec{b})$ werde ersetzt durch $(\vec{a}, \vec{s})$, wobei $\vec{s}$ die zu $\vec{a}$ senkrechte Komponente von $\vec{b}$ ist.
2. $(\vec{a}, \vec{b})$ werde ersetzt durch $(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b})$ mit $\alpha, \beta > 0$.
3. $(-\vec{a}, -\vec{b})$ und $(\vec{a}, \vec{b})$ bestimmen dieselbe Orientierung.

Insbesondere kann man daher $(\vec{a}, \vec{b})$ auch durch die Einheitsvektoren $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|})$ ersetzen, ohne die Orientierung zu ändern. Und: **Wir können** $(\vec{a}, \vec{b})$ **durch eine kartesische Basis gleicher Orientierung ersetzen.**
Ist durch $(\vec{a}, \vec{s})$ eine Orientierung der Ebene festgelegt, dann ergibt $(\vec{a}, -\vec{s})$ die zweite. Weitere gibt es nicht.

Definition 3 *Eine Orientierungsfestlegung des Raumes V_0^3 ist ein Tripel $Q = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ von drei Vektoren des V_0^3, die nicht in einer Ebene liegen.*

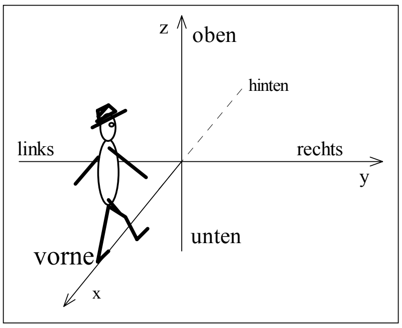
Durch Q werden drei Ebenen E_1, E_2, E_3 jeweils mit Drehsinn festgelegt: $(\mathrm{E}_3, \vec{a}, \vec{b})$,$(\mathrm{E}_2, \vec{c}, \vec{a})$ und $(\mathrm{E}_1, \vec{b}, \vec{c})$.

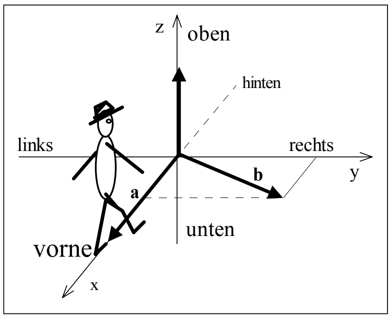
Wir betrachten $(\mathrm{E}_3, \vec{a}, \vec{b})$. Zunächst ersetzen wir $(\vec{a}, \vec{b})$ durch eine kartesische Basis $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ gleicher Orientierung. Dabei habe $\vec{f_1}$ die Richtung von $\vec{a}$. Der Raum wird durch die Ebene in zwei Halbräume zerlegt. Den, in den $\vec{c}$ hineinragt und den entgegengesetzten. Den ersteren nennen wir den bezüglich Q "oberen Halbraum".

Jetzt nehmen wir unser Basisdreibein $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und legen $\vec{e}_1$ auf $\vec{f_1}$ und $\vec{e}_2$ auf $\vec{f_2}$. Das ist mit Hilfe geeigneter Achsendrehungen stets möglich. $\vec{e}_3$ werde bei dieser Konstruktion zu einem Vektor $\vec{n}$.

Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder bestimmt $\vec{n}$ denselben Halbraum wie $\vec{c}$ oder den entgegengesetzten. Oder auch: $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{n})$ ist eine Orientierungsfestlegung des V_0^3. Sie ergibt entweder dieselbe Orientierung wie Q oder die entgegengesetzte. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.

Definition 4 *Die Orientierungsfestlegung $Q=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ergibt eine Rechtsorientierung, des Raumes, wenn in der beschriebenen Konstruktion der Vektor $\vec{n}$ in den oberen Halbraum zeigt, eine Linksorientierung, wenn er in den unteren Halbraum zeigt.*





(6.2.7) Bemerkung: Der eingeführte Orientierungsbegriff stellt eine Präzisierung umgangsprachlicher Vorstellungen dar. Das folgende Gedankenexperiment zeigt das: Man stehe in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Ebene auf der Pfeilspitze von $\vec{a}$ und schaue auf den Ursprung. Die vertikale Richtung nach *oben* gehe in den oberen Halbraum. Dann liegt *vorne* der Ursprung und der Vektor $\vec{b}$ zeigt notwendig nach *rechts* in einem Rechtssystem und nach *links* in einem Linkssystem.

6.2.1c **Die geometrische Form des Vektorproduktes**

(6.2.8) Damit können wir die **geometrische Definition des Vektorproduktes** abschließen.

Definition 5 *Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$. Dann ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} \in V_0^3$ dieser beiden Vektoren definiert durch die Formel*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}\, |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin \vartheta.$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängig, ist die rechte Seite der Nullvektor. Andernfalls ist ϑ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, der so bestimmt ist, dass $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ eine Rechtsorientierung liefert.

> **Satz:** Sei $\vec{a}$,$\vec{b} \in V_0^3$ und K ein Rechtssystem. Dann gilt $(\vec{a} \times \vec{b})^K = \vec{a}^K \times \vec{b}^K$. Ist K Linkssystem, so ist ein zusätzlicher Faktor (-1) anzubringen.

(6.2.9) Beweis: Folgt unmittelbar aus (6.2.3) sowie der Definition 6.

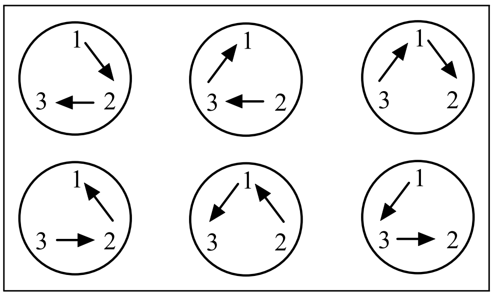
6.2.2 Kommentare zur Bearbeitung des Textes

(6.2.10) Zu Definition 1: Die angegebene Formel ist - wie der Kontext zeigt - wichtig. Man sollte sich daher mit ihr genauer beschäftigen. Einmal liegt es nahe, die Formel stärker vektoriell - Stichwort Zentralformel - zu schreiben. Mit den üblichen Bezeichnungen gilt:

$$\vec{a}^K \times \vec{b}^K = \vec{e}_1^K(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{e}_2^K(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{e}_3^K(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Wir haben es somit mit insgesamt 6 Summanden zu tun, 3 mit positivem und 3 mit negativem Vorzeichen. Jeder Summand hat drei Faktoren des Typs $\vec{e}ab$. Der erste ist einer der Einheitsvektoren, der zweite eine Komponente des ersten Eingabevektors und der dritte eine des zweiten. Diese Struktur sichert bereits die Bilinearität der Produktbildung, wovon man sich etwa mit Hilfe der Tunnelmethode überzeugt.

Der Unterschied in den Summanden wird durch die Indizes bewirkt. Die drei Summanden mit positivem Zeichen sind 123, 231 und 312. Das beschreibt eine "zyklische Reihenfolge". Nach der 3 kommt die 1, so wie auf einer Uhr die 1 nach der "12" kommt. Die drei Summanden mit negativem Zeichen dagegen beschreiben das Weitergehen auf der Uhr in umgekehrter Richtung. 132, 213 und 321.



Benötigt man etwa die zweite Komponente des Vektorproduktes $\vec{a}^K \times \vec{b}^K$, so beginnt man mit 2 - Einheitsvektor $\vec{e}_2^K$- und zählt zyklisch weiter: 231. Das gibt $\vec{e}_2^K a_3b_1$. Dann vertauscht man die letzten beiden Indizes, was den antizyklischen Partner gibt: $\vec{e}_2^K(a_3b_1 - a_1b_3)$. Damit sollte die Konstruktion verstanden sein.

(6.2.11) Einige **numerische Konkretisierungen** runden das Verständnis ab. Die Arbeit mit Spaltenvektoren ist besonders günstig, um das entwickelte Zählschema auszuführen. (Man fängt mit dem Index des Produktes, also der rechten Seite an. Denken Sie an den Ratschlag aus (1.4.8): Zuerst die leere Spalte, dann die Eintragungen):

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2c-3b\\3a-1c\\1b-2a\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(6.2.12) Die übliche Regel der Skalarproduktbildung gibt einem schließlich noch unmittelbar das Verständnis für die Komponentenformel des sog. *Spatproduktes* aus drei Vektoren, das wir unten noch genauer besprechen werden:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_3).$$

(6.2.13) Wie kommt man auf die Konstruktion in Definition 1? Das wird in einer mathematischen Darstellung vielfach nicht gesagt. Man wird kommentarlos mit der Definition konfrontiert und daraus werden dann Resultate deduziert. Auch in unserem Text findet sich keine Erklärung. Trotzdem sollte man sich mit der Frage auseinandersetzen. Wir tun das, indem wir die Überlegungen, die zum Skalarprodukt führten, erneut aufgreifen. Dort hatten wir einen Vektor vorgegeben und die dazu senkrechte Ebene bestimmt. Da aber Ebenen und dazu senkrechte Gerade sich wechselseitig bestimmen, liegt es nahe, eine Ebene durch zwei unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vorzugeben und nach der dazu senkrechten Geraden zu fragen. Nach unseren Resultaten zum Skalarprodukt müssen wir das Gleichungssystem $\boxed{\begin{array}{c}\vec{a}\cdot\vec{x}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{x}=0\end{array}}$ lösen. Ausgeschrieben und mit erstem Eliminationsschritt:

$$\boxed{\begin{array}{c}a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\end{array}} \quad \xrightarrow{x_3\ raus} \quad \boxed{(a_1b_3 - a_3b_1)}\,x_1 + \boxed{(a_2b_3 - a_3b_2)}\,x_2 = 0.$$

Uns interessiert der typische Fall, nicht der Ausnahmefall. Daher erwarten wir k=1.Wir benötigen nach (5.3.12) einen einzigen Vektor, der die letzte Gleichung erfüllt. Inspektion zeigt, dass $(a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), x_3)$ dies tut. (Es wird ja eine Lösung zu $Ax_1+Bx_2 = 0$ gesucht. Und das wird durch $\vec{x}_L = (B, -A, x_3)$ geleistet. Über die Komponente x_3 ist bisher noch nichts gesagt. Beachten Sie, wie der Vorzeichenwechsel der zweiten Komponente entsteht, der später gerade die Regel mit der zyklischen Reihenfolge erfordert. Eliminiert man jetzt statt x_3 die Unbestimmten x_1 oder x_2 so folgt die fehlende dritte Komponente x_3 sofort. **Wir haben die in der Definition 1 gegebene Regel gefunden**. Da ein homogenes System vorliegt, ist auch jedes Vielfache Lösung. Man nimmt die Lösung, die allgemein weder eine Bruch noch einen gemeinsamen Faktor enthält.

Das zur Einarbeitung in Definition 1.

(6.2.14) Jetzt zu (6.2.1). Hier findet sich eine Reihe einfacher Folgerungen aus der Definition, die vornehmlich durch Verifikation überprüft werden. Die Distributivität und allgemeiner die Bilinearität haben wir bereits kommentiert. Sie werden durch den Formelbau gesichert. Dass $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ aus der Antikommutativität folgt, sollte man sich merken. Die Verifikation von $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ ist etwas mühsamer. Hier muß man ernsthaft mit der Tunnelmethode (6.1.21) arbeiten. Der Rechenausdruck der rechten Seite legt es nahe, die geometrische Form des Skalarproduktes anzuwenden. Damit folgt eine in (6.1.48) benutzte Umformung: $\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\vartheta = a^2b^2\sin^2\vartheta$. Beide Seiten der behaupteten Gleichung müssen jedoch **in Komponenten** ausgerechnet werden und die Ausdrücke müssen am Ende in Übereinstimmung gebracht werden. Wir geben den Start der beiden Tunnelhälften.

Über die Definition des Vektorproduktes folgt
$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_3)^2 = ...$(6 pos. Terme, 3 neg.)
Und über die Komponentenform des Skalrproduktes:
$\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = ...$

Ordnet man die entstehenden Terme ordentlich an - vgl. (1.2.6), so ist es nicht schwer, beide Tunnelhälften zur Deckung zu bringen.

☐ Führen sie die Rechnung aus.

(6.2.15) Wir haben bei Einführung neuartiger Verknüpfungen immer nach den Rechenregeln (in Gebrauchsform) gefragt. Diese muß man sich bei einem mathematischen Text selbst zusammenstellen. Man kann sie (6.2.2-3) entnehmen, muß dort bewußt nach ihnen suchen. Das Ergebnis sieht etwa so aus:

Gebrauchsregeln für das Vektorprodukt. Beim Vektorprodukt

- darf man Produkte aus beliebig vielen Vektorfaktoren bilden.
- Jede Vertauschung von Faktoren führt zu einem Vorzeichenwechsel, jedes Quadrat bewirkt Verschwinden des Beitrages.
- Man darf auf keinen Fall Klammern fortlassen.
- Man darf nicht durch Vektorfaktoren teilen.
- Das Zusammenspiel des Vektorproduktes mit den beiden anderen Verknüpfungen wird durch die Bilinearität geregelt, so dass "jeder mit jedem" gilt.

Ein Beispiel einer hierdurch gesteuerten Rechnung:

$$\begin{aligned}(2\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-4\vec{b}) &= 6(\vec{a}\times\vec{a}) - 8(\vec{a}\times\vec{b}) + 9(\vec{b}\times\vec{a}) - 12(\vec{b}\times\vec{b}) \\ &= -17\vec{a}\times\vec{b}.\end{aligned}$$

(6.2.16) Folgende alternative Formulierung der geometrischen Form des Vektorproduktes ist möglich und gut zum Merken:

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}F$,	wobei F=$\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\theta$ der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

Insbesondere erklären sich damit Formeln wie $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ (zyklisch) oder $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$(antizyklisch).

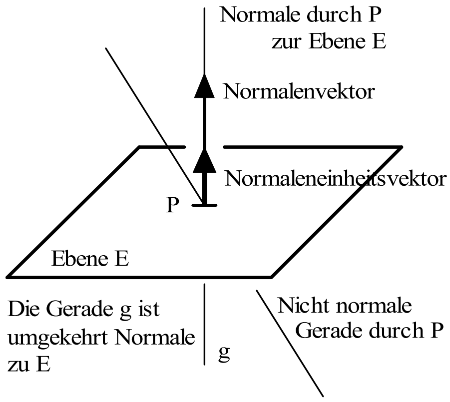
(6.2.17) Der abschließende Satz in (6.2.8) begründet schließlich den Nutzwert der gesamten Konstruktion des Vektorproduktes. Man erhält unabhängig von der Wahl des Koordinatensytems einen neuen geometrischen

Pfeil und hat ein Verfahren, diesen Vektor in beliebigen kartesischen Koordinaten auszurechnen. Skalarprodukt und Vektorprodukt sind praktisch die einzigen Vektorkonstruktionen, die diese Unabhängigkeitseigenschaft besitzen. Vgl. (6.1.28) und (6.1.31-32). Natürlich übernehmen auch Terme, die aus Vektor- und Skalarprodukt aufgebaut sind, diese Eigenschaft. Beispiele sind $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ oder $\vec{a}^2(\vec{b}\times\vec{c})-(\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}))\vec{c}$.

6.2.3 Anwendungen des Vektorproduktes

6.2.3a Die Normale

(6.2.18) Wir haben gesehen: Zu jeder Ebene gibt es eine dazu senkrechte Richtung und durch jeden Punkt der Ebene eine eindeutige davon erzeugte senkrechte Gerade (durch diesen Punkt). Denken sie daran: All unsere Räume haben im Augenblick ein Skalarprodukt, so dass "senkrecht" sinnvoll ist.



Das erweist sich als ein wichtiger und verallgemeinerungsfähiger Sachverhalt, so dass man ein zugehöriges Begriffssystem entwickelt. Wir beginnen mit diesem Begriffssystem:

- ⇒ Es sei E eine Ebene im V_0^3 und P ein Punkt auf E.
- T Die auf E senkrechte Gerade durch P heißt die **Normale zu E durch P.**
- T Die Richtungsvektoren dieser Normalen heißen **Normalenvektoren zu E durch P.**
- T Normalenvektoren der Länge 1 heißen **Normaleneinheitsvektoren.** Es gibt jeweils 2 Stück.
- T Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unabhängige Richtungsvektoren von E, dann heißt der Normalenvektor $\vec{F}=\vec{a}\times\vec{b}$ (zu $(\vec{a},\vec{b})$ gehöriger **Flächennormalenvektor** oder mißbräuchlich auch *Flächennormale.*

Also: *Normale* steht immer für die gesamte geometrische Figur aller senkrechten Vektoren. Zur Angabe einer Parametrisierung einer Normalen benötigt man einen Punkt, etwa $\vec{x}_P$ und einen Normalenvektor. Hat man zwei Richtungsvektoren der Ebene, denn wird man i.a. den Flächennormalenvektor $\vec{a}\times\vec{b}$ nehmen. Ohne besonderen Grund sollte man diesen Vektor nicht normieren, wie es immer wieder unüberlegt geschieht.

T Unter dem **Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene** versteht man den Winkel zwischen Geradenrichtung und Normalenrichtung, **nicht** den dazu supplementären Winkel.

T Unter dem **Winkel zwischen zwei Ebenen** versteht man den Winkel zwischen den beiden Normalenrichtungen.

□ Begründen Sie diese Winkeldefinitionen geometrisch.

(6.2.20) Mit Hilfe von Parametrisierungen der beteiligten Figuren lassen sich alle diese Winkel problemlos ausrechnen.

(6.2.21) Wieso nimmt man beim Winkel zwischen Gerade und Ebene nicht den supplementären Winkel? Meist tritt in den Anwendungen der angegebene Winkel auf. Wir geben ein wichtiges Beispiel aus der Physik: Eine Flüssigkeit ströme mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$. In diese Flüssigkeit bringen wir ein Parallogramm hinein mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wir fragen nach dem **Volumen der Flüssigkeit, die im Verlauf einer Zeiteinheit durch das Parallelogramm strömt.**

☐ Fertigen Sie eine Skizze der Konfiguration und zeigen Sie, dass das Volumen wie folgt gegeben ist: V=$|\vec{v}|\,|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\cos\vartheta$.

Hierbei ist ϑ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und der Flächennormale $\vec{a}\times\vec{b}$, **nicht** der supplementäre Winkel. Das Ergebnis läßt sich vektoriell wie folgt schreiben:$V=\vec{v}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$. Wie würde die Formel mit dem Supplementärwinkel aussehen?

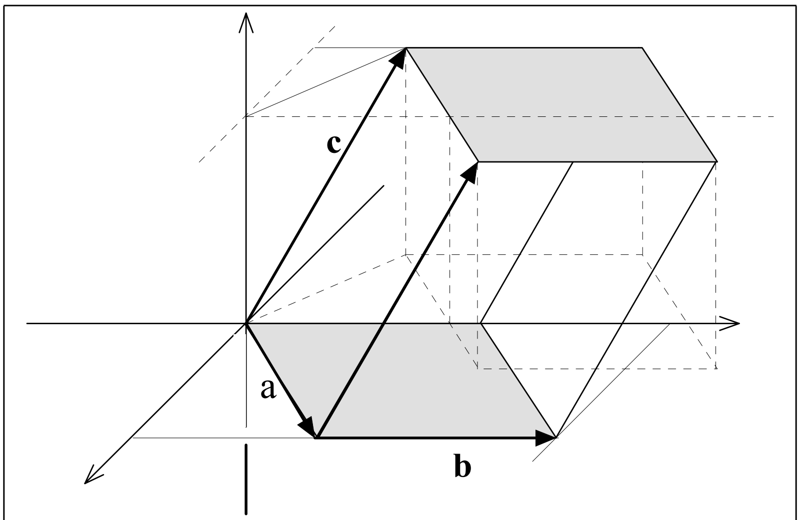
☐ Fertigen Sie Skizzen, die die geometrische Konstruktion und Bedeutung der folgenden Vektoren verdeutlichen:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$$

6.2.3b **Das Spatprodukt**

(6.2.22) Das Spatprodukt ist eine Konstruktion aus drei Vektoren, der wir in (6.2.21) bereits begegnet sind. Mit seiner Hilfe ist es möglich, das Volumen des aus drei Vektoren gebildeten Spates zu bestimmen.

Unter *Spat* ist Folgendes zu verstehen: Wir wählen drei unabhängige Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$. Dann parametrisieren wir gemäß der Zentralformel $\vec{x}_S(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Aber die Parameter sollen jetzt nur noch zwischen 0 und 1 laufen. Der entstehende Körper ist der von den drei Vektoren erzeugte Spat. Wählt man $\gamma=0$, läßt nur α und β laufen, so erhält man ein Parallelogram mit Kanten $\vec{a}$ und $\vec{b}$, das wir den "unteren Deckel" nennen. Wählt man $\gamma=1$, so erhält man ein dazu paralleles Parallogramm, den "oberen Deckel". Entsprechend gibt es zwei weitere Paare von Oberflächenparallogrammen, die zu $(\vec{a},\vec{c})$ und zu $(\vec{b},\vec{c})$ gehören. Statt *Spat* sagt man auch *Parallelepiped.* Der Spat ist das räumliche Analogon zum Parallelogramm, so wie der Quader das Analogon zum Rechteck ist.



Koordinatenwahl: y-Achse in richtung $\vec{b}$, x-y-Ebene enthält $\vec{a}$.

☐ Schätzen Sie die drei Koordinatenvektoren der Skizze. $a_1=2$.

(6.2.23) Wie groß ist das Volumen eines derartigen Körpers? Man bestimmt es nach der Regel "Grundfläche×Höhe". Als Grundfläche können wir $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ wählen. Dann ist die Höhe, wie die Skizze zeigt, gleich $|\vec{c}|\,|\cos\vartheta|$, wenn ϑ der Winkel zwischen dem Flächennormalenvektor $\vec{a}\times\vec{b}$ und dem Vektor $\vec{c}$ ist. Ist der Winkel stumpf, muß man das Vorzeichen von $\cos\vartheta$ durch den Betrag beseitigen. Also:

$$\boxed{\text{Spatvolumen}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\,|\vec{c}|\,|\cos\vartheta|=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|}$$

.

Damit haben wir die gesuchte Termkonstruktion hergeleitet.

T **(6.2.24) Definition des Spatproduktes:**

Es seien $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_0^3$ bzw. V^3. Dann versteht man unter dem Spatprodukt der drei Vektoren die folgende zahlwertige Zuordnung:

$$\boxed{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\mapsto(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

(6.2.25) Zur geometrischen Bedeutung dieser Zahl können wir sagen:

Der Betrag des Spatproduktes ist gleich dem Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates.
Ist das Spatprodukt Null, so sind die drei Vektoren abhängig, liegen in einer Ebene.
Ist das Spatprodukt positiv, so ergibt die Orientierungsfestlegung $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ eine Rechtsorientierung, (denn der Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist dann spitz).
Ist das Spatprodukt negativ, so ergibt die Orientierungsfestlegung $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ eine Linksorientierung, (denn der Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist dann stumpf).

Das Spatprodukt ist kein eigentlich neues Produkt, sondern aus Skalarprodukt und Vektorprodukt zusammengesetzt. Insbesondere ist es unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Fertigen Sie ein Verlaufsdiagramm.

(6.2.26) Die Komponentenform des Spatproduktes folgt sofort aus den Komponentenformen der beiden anderen Produkte. Dabei wählen wir eine andere Reihenfolge der Buchstaben:

$$\boxed{(\vec{b}^K \times \vec{c}^K)\vec{a}^K = \vec{a}^K(\vec{b}^K \times \vec{c}^K) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).}$$

(6.2.27) Wie steht es mit den Rechenregeln? Diese werden weitgehend durch die Regeln für die beiden Einzelprodukte festgelegt. Zusätzlich gilt: Das Volumen ist unabhängig davon, welches Vektorpaar für die Grundfläche genommen wird. Bei zyklischer Vertauschung der Reihenfolge der drei Faktoren sollte sich das Spatprodukt nicht ändern. Bei antizyklischer Vertauschung erhält man ein Vorzeichen. Das verifiziert man auch leicht über die Komponentenform. Also:

$$\boxed{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = -\vec{a}(\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c}(\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}).}$$

6.2.3c **Die reziproke Basis**

(6.2.28) Es seien $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ drei nicht in einer Ebene liegende geometrische Pfeile. Die zugehörige Zentralformel lautet:

$$\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Wir wissen: Durchlaufen die drei Koeffizienten alle reellen Zahlen, dann durchläuft $\vec{x}$ alle geometrischen Pfeile genau einmal. Damit stellt sich folgende für die Vektorrechnung typische Frage:

> Die vier Vektoren seien vorgegeben. Wie bestimmt man die zugehörigen Parameter? Bisher haben wir das über das Schnittmengenschema berewerkstelligt: Punkt mit Raum. Das gab ein lineares inhomogenes 3×3 Sytem für die Koeffizienten, das zu lösen war. Aus "nicht in einer Ebene" sollte "eindeutig lösbar (k=0)" folgen.

(6.2.29) Mit Hilfe des Vektorproduktes können wir eine neue Methode entwickeln, die uns für diesen Fall sogar eine explizite Lösungsformel liefern wird. Also

$$\boxed{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \text{ gegeben und } \alpha, \beta, \gamma \text{ unbestimmt.}}$$

Die Idee: Das ist eine Vektorgleichung für drei Unbestimmte. Kann man daraus **eine** skalare Gleichung für nur **eine** Unbestimmte, etwa α, machen? Wie wird aus einem Vektor ein Skalar? durch Skalarproduktbildung. Womit muß man die Ausgangsgleichung skalar multiplizieren, damit die Beiträge mit β und γ fortfallen? Mit einem Vektor der auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht. Das wäre $\vec{b} \times \vec{c}$ oder jedes Vielfache $\lambda\vec{b} \times \vec{c}$ davon.

Wir multiplizieren beide Seiten der Ausgangsgleichung skalar mit diesem Vektor. Links bleibt nur $\alpha\lambda\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ und rechts $\lambda\vec{d}(\vec{b} \times \vec{c})$ stehen. Wählt man $\lambda = \frac{1}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}$, dann ergibt sich links die gesuchte Größe α. Kurz: **Wir haben nach α aufgelöst** und erhalten die gesuchte Größe als Quotient zweier Spatprodukte.

$$\alpha = \frac{\vec{d}(\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}$$

Die Division ist möglich, da das Spatprodukt im Nenner ungleich Null ist.
(6.2.30) Können wir so alle dreiUnbestimmten erhalten? Offenbar. Wir müssen nur mit den folgenden drei Vektoren skalar multiplizieren, die man die Vektoren der *reziproken Basis* nennt:

$$\boxed{\vec{a}' = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})} \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})} \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})}}$$

Wegen der Rechenregeln für das Spatprodukt sind die drei Nenner gleich! Zur Bestimmung der reziproken Basis muß man daher drei Kreuzprodukte und ein Skalarprodukt bilden. Drei weitere Skalarproduktbildungen geben dann die Unbestimmten. Ob das kürzer ist, als das Lösen des Gleichungssystems, muß man fallspezifisch unterscheiden. Auf jeden Fall liegt eine interessante weitere Methode vor, die eine **explizite Lösungsformel** für die Koeffizienten produziert.

☐ Was ergibt sich als reziproke Basis, wenn man mit den Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems beginnt? Vgl. (6.1.34).

(6.2.31) Dieser Abschnitt liefert einem noch mehr. Nämlich die Idee, eine Vektorgleichung durch gezielte Skalarproduktbildung in skalare Gleichungen umzuwandeln. Das erweist sich vielfach als nützlich.

☐ Überlegen Sie sich: Die alte Methode der Einführung von Koordinaten und Gleichsetzung der Komponenten der Koordinatenvektoren ist ein Spezialfall der neuen Methode. Man muß die Vektorgleichungen nur skalar mit den Koordinateneinheitsvektoren multiplizieren.

6.2.3d Kürzester Abstand

(6.2.32) Wir bestimmen allgemein eine Formel für den kürzesten Abstand zweier Geraden im Raum nach der soeben angedeuteten Methode. Seien $\vec{x}_g(a) = \vec{x}_0 + a\vec{d}$ und $\vec{x}_h(b) = \vec{y}_0 + b\vec{f}$ je eine Parametrisierung der beiden Geraden g und h. Der Vektor $\vec{A}$ des kürzesten Abstandes steht senkrecht auf beiden Geraden, hat daher die Richtung von $\vec{d}\times\vec{f}$. Die beiden Geraden sollen nicht parallel sein! Der Vektor des kürzesten Abstandes starte auf einem (noch unbekannten) Punkt der Geraden g. Er liegt somit auf der Hilfsgeraden z mit Parametisierung $\vec{x}_z(\lambda) = (\vec{x}_0 + a\vec{d}) + \lambda\vec{d}\times\vec{f}$. Dabei sind a und λ so zu wählen, dass h getroffen wird. Die Schnittbedingung ist $(\vec{x}_0 + a\vec{d}) + \lambda\vec{d}\times\vec{f} = \vec{y}_0 + b\vec{f}$ oder $a\vec{d} + \lambda\vec{d}\times\vec{f} = \vec{D} + b\vec{f}$ mit $\vec{D} = \vec{y}_0 - \vec{x}_0$. Alle Vektoren sind gegeben, äußere Parameter. a,b und λ sind gesucht, unbestimmt. Wir multiplizieren skalar mit $\vec{d}\times\vec{f}$ und erhalten sofort λ und damit den kürzesten Abstand $\vec{A}$:

$$\lambda = \frac{\vec{D}\cdot(\vec{d}\times\vec{f})}{(\vec{d}\times\vec{f})^2} \qquad \text{und} \qquad \vec{A} = \frac{\vec{D}\cdot(\vec{d}\times\vec{f})}{(\vec{d}\times\vec{f})^2}(\vec{d}\times\vec{f}).$$

Beachten Sie, dass man im letzten Term auf keinen Fall "kürzen" darf.

☐ Berechnen Sie jetzt die beiden verbleibenden Unbestimmten a und b, indem Sie mit $\vec{d}$ und $\vec{f}$ skalar multiplizieren und das entstehende Gleichungssystem lösen. Welche Ausnahmefälle sind zu beachten? Wodurch werden sie während der Rechnung sichtbar?

☐ Beweisen Sie, dass der Vektor des kürzesten Abstandes tatsächlich auf beiden Geraden senkrecht steht. Gehen Sie wie folgt vor: Wir haben soeben rechnerisch gesehen, dass es einen Punkt P_{0g} auf g gibt, in dem der Vektor $\vec{A}$ startet mit Endpunkt in P_{0h} auf h. Parametrisieren Sie jetzt g und h neu. Und zwar soll P_{0g} der Aufpunkt für g und P_{0h} der Aufpunkt für h werden.Sei jetzt P_1 ein beliebiger Punkt von g und Q_1 ein beliebiger von h. Zeigen sie, dass dann $|\vec{x}_{P_1} - \vec{x}_{Q_1}|^2 \geq \vec{A}^2$ ist. Das ist ganz einfach, wenn Sie mit dem Skalarprodukt rechnen. (Keine Ableitung!) .

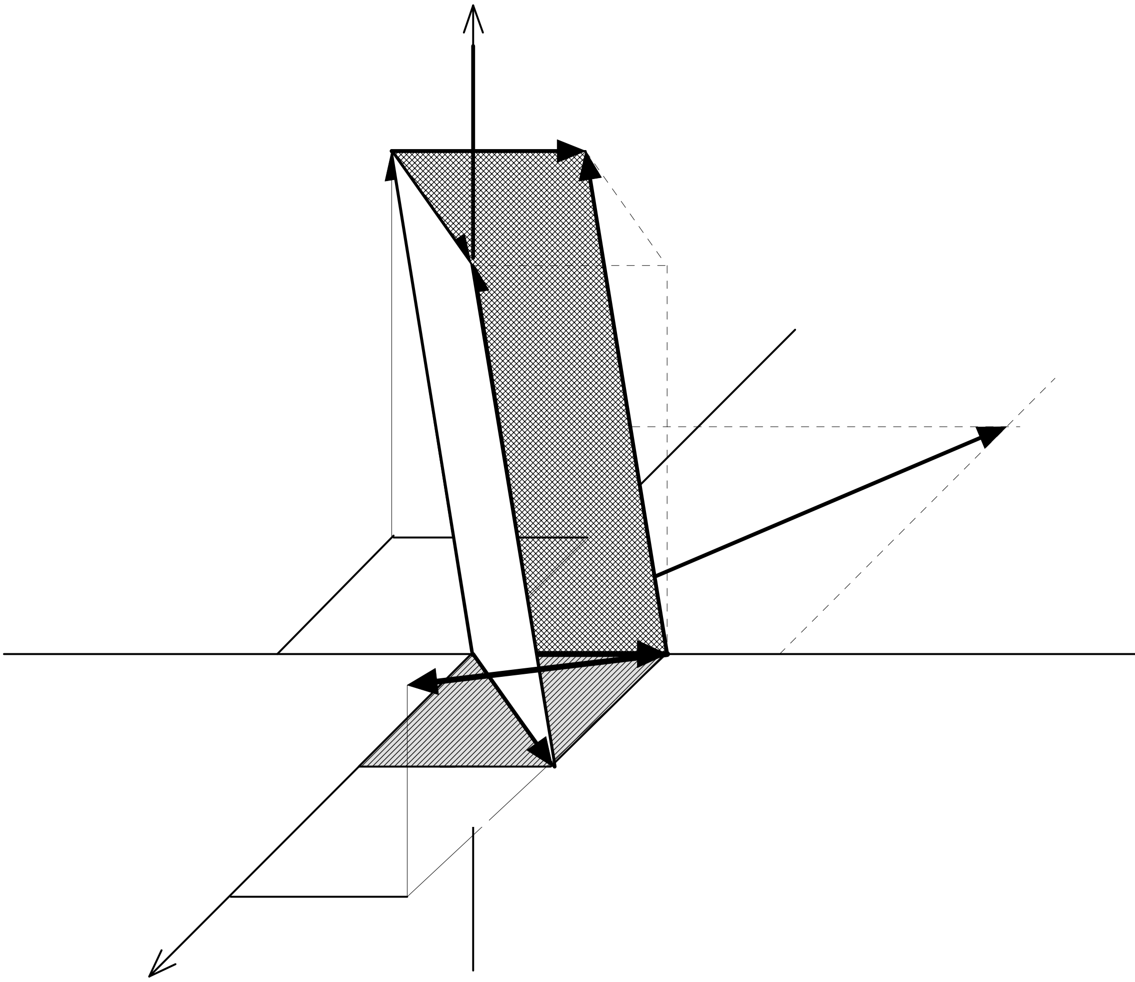
6.2.3e Die geometrische Interpretation der reziproken Basis

(6.2.23) Die reziproke Basis besitzt die folgende geometrische Interpretation:

> Je zwei der drei Basisvektoren erzeugen eine Koordinatenebene. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ etwa die Ebene aller Vektoren, für die die dritte zu $\vec{c}$ gehörige Koordinate den Wert Null hat. Im Fall nicht rechtwinkliger Koordinaten steht nun der dritte Basisvektor $\vec{c}$ nicht senkrecht auf dieser Ebene. Er kann vielmehr schräg in einen Halbraum hineinzeigen. Der reziproke Vektor dagegen steht jeweils auf der Ebene der beiden anderen Vektoren senkrecht, da er ja die Richtung der Flächennormalen hat. So steht $\vec{c}'$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht. Also: Die reziproke Basis besteht aus drei Vektoren, die jeweils auf einer Koordinatenebene senkrecht stehen, also zugehörige Normalenvektoren sind.

☐ Bestimmen Sie für die drei Vektoren der nachfolgenden Skizze die reziproke Basis und identifizieren Sie möglichst viele Vektoren in der Figur.

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}^K = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



☐ Sei $\vec{x}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha\vec{a}^K + \beta\vec{b}^K + \gamma\vec{c}^K$. Bestimmen Sie α, β und γ einmal über das zugehörige Gleichungssystem und einmal über die Methode der reziproken Basis.

6.2.3f **Die Verallgemeinerbarkeit des Vektorproduktes**

(6.2.6) Die Formeln zur reziproken Basis legen die Frage nach einer Verallgemeinerung des Vektorproduktes auf Vektorräume mit anderen Dimensionen nahe. Im Falle des Skalarproduktes ging das problemlos. Beim Vektorprodukt treten jedoch beträchtliche Probleme auf. Inspiziert man die Komponentenformel, so ist nicht zu sehen, wie eine Verallgemeinerung aussehen könnte. Und geht man von der inhaltlich geometrischen Interpretation aus, so wird das noch verständlicher. Man beginnt mit zwei Vektoren, die eine Ebene aufspannen. Das gesuchte Produkt sollte dann eine dazu senkrechte, normale Richtung haben. Im Vierdimensionalen ist die Normale einer Ebene aber erneut eine Ebene, wie man über einfache Beispiele leicht nachprüft. Damit liegt die Richtung des gesuchten Produktes nicht mehr fest.

Ergebnis: Im Unterschied zum Skalarprodukt gehört das Vektorprodukt wesentlich zum dreidimensionalen Raum. Eine einfache Ausdehnung des Vektorproduktes auf andere Dimensionen ist nicht möglich. Vergrößert man Aufwand und Formalismus beträchtlich, so läßt sich eine Verallgemeinerung erreichen, die jedoch weit über das Niveau der hier verwandten elementaren Vektorrechnung hinausgeht.

Kap.6.3: **Die komplexen Zahlen**

Inhaltsübersicht Kap.6.3

Das Skalarprodukt haben wir durch Herumspielen mit einer einfachen Gleichung gefunden. Das Vektorprodukt haben wir im mathematischen Stil eingeführt. Jetzt wollen wir die komplexen Zahlen auf eine dritte Weise einführen: Als Lösung eines anstehenden Problems. Die komplexen Zahlen bilden in mathematischer Hinsicht in gewisser Weise den Abschluss der üblichen Zahlen. In den physikalischen Anwendungen stellen sie ein nützliches und wichtiges mathematisches Hilfsmittel dar.

6.3.1 **Der Weg zu den komplexen Zahlen**

$\Downarrow$ Wir führen zwei Einstiegsüberlegungen an, die zusammengenommen die komplexen Zahlen ergeben werden. Die erste ist eine naheliegende, an unsere bisherigen Betrachtungen zur Vektorrechnung anschließende Frage: **Kann man nicht anstelle des Vektorproduktes eine andere Multiplikation von Vektoren einführen, mit der man ebenso rechnen kann wie mit reellen Zahlen?** Mit einer Multiplikation, die das Dividieren erlaubt. Das würde den formelmäßigen Umgang mit Vektoren sicher erleichtern und verbessern. **Der zweite Einstieg spiegelt historische Erfahrungen zum Umgang mit Gleichungen wieder**. Bei der Behandlung von Gleichungen kam es vor, dass man auf die Bestimmungsgleichung $x^2 = -1$ stieß, die im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung besitzt. Kümmerte man sich nun darum nicht, rechnete man formal einfach so weiter, als hätte man eine Lösung $i = \sqrt{-1}$ dieser Gleichung zur Verfügung, dann erhielt man am Ende vielfach eine korrekte rein reelle Lösung der Ausgangsgleichung. Die nicht existierende Wurzel fiel aus der Endform heraus. Es entstand der Eindruck, als gäbe es diese Lösungen irgendwie doch, man hätte nur ihre Bedeutung noch nicht verstanden.

6.3.1a **Zum Divisionsproblem bei Vektoren**

(6.3.1) Zunächst etwas mehr zur ersten Überlegung: Wie steht es mit der Division durch Vektoren? Wir möchten analog zu (1.4.1) vorgehen. Sowohl beim Skalarprodukt wie beim Vektorprodukt hat die homogene (lineare) Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ bzw. $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{0}$ auch für $\vec{a}\neq\vec{0}$ nichttriviale Lösungen. Bei der ersten Gleichung sind das alle Vektoren der Ebene senkrecht zu $\vec{a}$ und bei der zweiten alle Vektoren der von $\vec{a}$ erzeugten Geraden. Damit sind die inhomogenen Gleichungen $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ bzw. $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$ keinesfalls eindeutig lösbar und folglich ist auch keine Division im üblichen Sinne möglich. (Zur Erinnerung: $\frac{a}{b}$ bezeichnet die **eindeutige** Lösung der Gleichung ax=b. Kap. 1 (1.4.1)) Aber kann man nicht im $\mathbb{R}^3_K$ oder allgemeiner im $\mathbb{R}^n$ eine **andere** innere Verknüpfung einführen, die doch eine Division erlaubt, für die die entsprechenden Gleichungen eindeutig lösbar wären?
(6.3.2) Die mathematische (hier nicht führbare) Analyse des Problems zeigt: **Die Antwort ist fast immer negativ**. Eine solche ideale Multiplikation gibt es nur für n=1 und für n=2. Für n=1 erhält man die üblichen reellen Zahlen und für n=2 die zu besprechenden komplexen Zahlen. Insbesondere gibt es für den physikalisch so interessanten Fall n=3 die gewünschte Multiplikation nicht. Für n=4 klappt es dann fast noch einmal: Hier findet man eine Produktbildung, die alle Regeln erfüllt bis auf das Kommutativgesetz. Die Produktbildung ist teilweise kommutativ, teilweise antikommutativ. Man nennt den $\mathbb{R}^4$ mit diesem Produkt die *Quaternionen.* Und schließlich gibt es für n =8 eine Lösung, bei der das das Produkt jedoch weder kommutativ noch assoziativ ist!

6.3.1b **Wurzeln aus negativen Zahlen**

(6.3.3) Jetzt zum zweiten Einstieg. Zunächst begegnet man den Wurzeln aus negativen Zahlen beim formalen Umgang mit der p-q-Formel für quadratische Gleichungen: Dort treten diese *unmöglichen Wurzeln* in der Endform auf, man kommt aber rechnerisch nicht weiter. Für die kubische Gleichung $x^3+px+q=0$ ist das etwas anders. Für sie kann man auch eine Lösungsformel angeben. Mit geeigneten Hilfsgrößen sieht diese Formel wie folgt aus:

$$\boxed{\mathrm{x}^3\mathrm{+px+q=0} \quad \text{wird gelöst durch} \quad x=\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+r}+\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-r} \qquad \text{mit } r=\sqrt[2]{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}}\,.$$

☐ Zur Herleitung der Formel: Machen Sie den Ansatz $x=y-\frac{\alpha}{y}$. Setzt man das in die Bedingungsgleichung ein, so heben sich für $\alpha=\frac{p}{3}$ **zwei** Potenzen fort. Für diesen Wert verbleibt als Bedingung die Gleichung $y^6+qy^3-\frac{p^3}{27}=0$ mit Lösungen $y^3=-\frac{q}{2}\pm r$. Durch Rationalmachen des Nenners erhält man $\frac{\alpha^3}{y^3}=\frac{q}{2}\pm r$. Beide Vorzeichen ergeben dann dieselbe behauptete Lösung.
(6.3.4) Wendet man die gefundene Formel beispielsweise auf die Gleichung $x^3-15x-4=0$ an, so ergibt sich der Ausdruck $x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$ mit $i=\sqrt{-1}$. Aber hier kann man weiterrechnen: Was bedeutet $\sqrt[3]{a}$? Wie in (1.1.18) gesagt, bezeichnet das eine Lösung der Gleichung $x^3=a$. D.h. $\sqrt[3]{2+11i}$ sollte für eine Lösung von $z^3=2+11i$ stehen. Eine Lösung dieser Gleichung läßt sich nun aber raten, nämlich z=2+i. Man verifiziert mit $\mathrm{i}^2=-1$ und $\mathrm{i}^3=i^2\cdot i=-i$:

$$(2+i)^3 = 8 + 3 \cdot 4i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i.$$

Also gilt $\sqrt[3]{2+11i} = 2+i$. (Links die Bezeichnung einer Lösung, rechts die tatsächliche Berechnungsformel.) Entsprechend findet man $\sqrt[3]{2-11i} = 2-i$ als Lösung von $z^3 = 2 - 11i$. Zusammengenommen erhält man x=(2+i)+(2-i)=4. **Und 4 ist tatsächlich reelle Lösung der Ausgangsgleichung** $x^3 - 15x - 4 = 0$, was man sofort nachrechnet. Wie behauptet ist das *unmögliche* $i = \sqrt{-1}$ aus dem Endresultat herausgefallen.

> **(6.3.5) In der Argumentation** haben wir die üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen benutzt und zusätzlich nur die Beziehung $i^2 = -1$. Überdies haben wir Ausdrücke wie 4+0i mit der rellen Zahl 4 identifiziert. Allgemein ist a+0i für reelles a mit a zu identifizieren.

(6.3.6) Wie bereits erwähnt, traf man historisch auf zahlreiche derartige Phänomene, bevor man die komplexen Zahlen verstand.

6.3.1c **Herleitung der komplexen Multiplikation**

(6.3.7) Wie angekündigt können wir jetzt unsere beiden Ansätze zusammenführen: Zunächst suchen wir eine neue Multiplikation $\star$ im $\mathbb{R}^2_K$, die die üblichen Rechenregeln für Zahlen erfüllt, etwa die Distributivgesetze. (**Das ist das gestellte Problem!**) Die Elemente des $\mathbb{R}^2_K$ schreiben sich wie folgt:

$$(u,v) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 \quad \text{mit } \vec{e}_1 = (1,0) \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = (0,1).$$

Im Bereich der komplexen Zahlen arbeitet man immer mit einem festen Koordinatensystem, so dass wir alle Indizes K fortlassen.
(6.3.8) Das Distributivgesetz, genauer die Bilinearität, fordert dann für das allgemeine Produkt zweier Elemente (Vektoren):

$$(u,v) \star (U,V) = (u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2) \star (U\vec{e}_1 + V\vec{e}_2) = uU\vec{e}_1 \star \vec{e}_1 + vV\vec{e}_2 \star \vec{e}_2 + (uV + vU)\vec{e}_1 \star \vec{e}_2$$

Dabei haben wir noch Assoziativität und Kommutativität benutzt.
(6.3.9) Weiter sollten - gemäß zweitem Einstieg - die gewöhnlichen Zahlen in Form einer Zahlengerade Teil der komplexen Zahlen sein. Wir identifizieren die Zahlengerade mit der 1-Achse, also die reellen Zahlen a mit den Vektoren $\boxed{(a,0) = a\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = a\vec{e}_1}$. Insbesondere entspricht $\vec{e}_1$ gerade der Zahl 1. Soll die neue Multiplikation für reelle Zahlen gleich der üblichen Multiplikation sein, folgt $\vec{e}_1 \star \vec{e}_1 = \vec{e}_1$. Die neue Multiplikation braucht auch ein neutrales Elemente und das sollte aus dem für $\mathbb{R}$ hervorgehen. Also $\vec{e}_1 \star \vec{z} = \vec{z}$ und insbesondere $\vec{e}_1 \star \vec{e}_2 = \vec{e}_2$.
(6.3.10) Schließlich fordern unsere Vorüberlegungen: Die Gleichung $x^2 = -1$, d.h. jetzt $\vec{x} \star \vec{x} = -\vec{e}_1$ muss lösbar sein. Naheliegender verbleibender Kandidat für eine Lösung ist $\vec{e}_2$. Denn $\vec{e}_2 \star \vec{e}_2$ ist das einzige Produkt, das wir noch nicht festgelegt haben. **Also fordern wir** $\vec{e}_2 \star \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$.
(6.3.11) Einsetzen gibt für das Produkt insgesamt:

$$\boxed{(u,v) \star (U,V) = (u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2) \star (U\vec{e}_1 + V\vec{e}_2) = (uU - vV)\vec{e}_1 + (uV + vU)\vec{e}_2.}$$

(6.3.12) Die Logik unserer Argumentation sieht zusammengefaßt so aus:

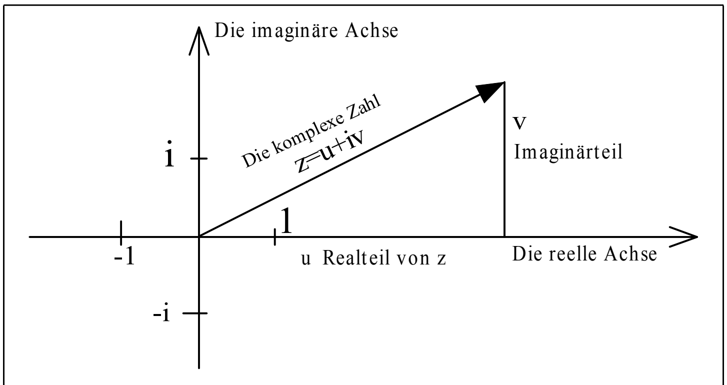
> Falls es überhaupt eine Vektormultiplikation gibt, die die Rechenregeln für Zahlen erfüllt, bei der $\vec{e}_1$ die Rolle der 1 übernimmt und $\vec{e}_2$ die Rolle der zusätzlichen Größe i=$\sqrt{-1}$, dann **muss das die angegebene Verknüpfung sein.**

(6.3.13) Die Elemente des $\mathbb{R}^2_K$ können mithin **zwei Rollen** annehmen. Entweder wie bisher die eines Vektors oder aber im Zusammenhang mit der neuen Multiplikation die einer Zahl. Letztere ist meist die wichtigere Rolle. Daher ist eine Schreibweise üblich, die stärker an die vertraute Zahlschreibweise anknüpft und die wir jetzt einführen. Beides sind nur Schreibweisen, die bestimmte Rechnungen vertrauter erscheinen lassen. Rechnungen des jeweils anderen Typs sind auch möglich, wirken nur zunächst fremdartig.
(6.3.14) Die beiden Schreibweisen für komplexe Zahlen. Oben die zur Einführung bisher benutzte vektorielle Schreibweise und darunter die übliche zahlorientierte, die wir von jetzt ab verwenden wollen.

$\vec{z} = (u,v) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	(u,0)=u$\vec{e}_1$	(0,v)=v$\vec{e}_2$	$\vec{0} = (0,0)$	$\star$	vektororientiert
z=u+iv=u+vi	1	i=$\sqrt{-1}$	u=u+0i	iv=0+iv	0=0+i0	$\cdot$	zahlorientiert

(6.3.15) D.h. jede komplexe Zahl schreibt sich u+iv=u+v$\sqrt{-1}$. Aber der **vektorielle Charakter** bleibt trotz dieser Schreibweise erhalten. Vergleichen wir einmal 2+3i mit Zahlen wie $2+3\cdot\frac{2}{3}=4$ oder $2+3\sqrt{2}=6.2426\ldots$. Die Zahlterme lassen sich wie angegeben weiter auswerten und aus dem Ergebnis kann man dann **nicht** auf die Summanden zurückschließen. Trotz der analogen Schreibweise ist das bei 2+3i anders. Gleichgültig wie man auswertet, man kann im Sinne der vektoriellen Zentralformel doch auf die beiden Komponenten 2 und 3 zurückschließen. Und dieser vektortypische Rückschluß (Kap.4.1.1) erweist sich als extrem wichtig für das Rechnen.

T Für die beiden Komponenten sind spezielle Bezeichnungen üblich.Die erste Komponente, wird *Realteil (der komplexen Zahl)* und die zweite *Imaginärteil (der komplexen Zahl)* genannt. Die 1-Achse heißt auch reelle Achse und die 2-Achse imaginäre Achse. Die Skizze fasst die Bezeichnungen zusammen. Die übliche Vorgabe einer komplexen Zahl erfolgt dadurch, dass man Real- und Imaginärteil vorgibt. Gleichheit zweier komplexer Zahlen bedeutet, dass ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen, denn das sind ja die Vektorkomponenten. Die Gesamtheit (Menge) aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Man sagt: *Der* ***Körper der komplexen Zahlen.*** Der Begriff *Körper* steht dafür, dass dieselben Rechenregeln wie bei den reellen Zahlen gelten. Vgl. (3.2.13).



Die hauptsächliche Bezeichnungen in der komplexen Ebene

! Gewöhnen sie es sich unbedingt an, sich einen komplexe Zahl als Pfeil oder Punkt in der Ebene, der *Ebene der komplexen Zahlen,* zu veranschaulichen.

□ Die Vektorrolle legt fest, wie komplexe Zahlen zu addieren sind. Nehmen wir $z_1 = u+iv$ und $z_2 = U+iV$. Was ist $z_1 + z_2$? Was $2z_1 - 3z_2$? (Sie müssen sie entsprechenden Vektorresultate in die neue Schreibweise übertragen.)

(6.3.16) Wie sieht die in (6.3.8) gefundene **Multiplikation in der neuen Schreibweise** aus? Statt $\vec{z}_1 \star \vec{z}_2$ schreiben wir jetzt $z_1 \cdot z_2$ oder sogar $z_1 z_2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{für } z_1 = u+iv \text{ und } z_2 = U+iV \quad \text{mit u,v,U,V reell ist} \\ z_1 z_2 = (u+iv)(U+iV) = (uU - vV) + i(uV + vU)\end{array}}$$

Die durch diese Formel ausgedrückte Konstruktion muss man sich genau einprägen.

Der Realteil des Produktes sieht wie das Skalarprodukt (uU+vV) aus, nur mit falschem Vorzeichen. Und der Imaginärteil wie ein Kreuzprodukt, erneut mit falschem Vorzeichen: (uV+vU) statt (uV-vU). Konkrete Fälle sollte man durchaus gemäß dieser Konstrukltion (Real×Real-Imaginär×Imaginär) ausrechnen. Etwa (2+3i)(4-i)=(8+3)+i(-2+12). Beachten Sie: Der Imaginärteil von 4-i ist -1. Er enthält **nie** ein i, **aber ein eventuelles Vorzeichen**.

6.3.2 Die komplexen Zahlen
6.3.2a Die Division und die Rechenregeln

⇑ Wir haben **einen eindeutigen Kandidaten für unsere Multiplikation.** Für ihn stellt sich die Frage: Werden die Rechenregeln für das Zahlrechnen tatsächlich (wie erwünscht) erfüllt? Wir gehen die Regeln durch. Vgl. (3.2.10-13).

☐ Verifizieren Sie mit der Tunnelmethode, dass die komplexe Multiplikation das kommutative und das assoziative Gesetz erfüllt.

(6.3.17) Weiter gilt immer 1z=z, wie man sofort prüft. Das Zusammenspiel von Multiplikation und Addition ist distributiv. Das haben wir durch die Art der Konstruktion gesichert. Vgl. (6.1.20). **Bleibt die Frage nach der Division und das heißt nach dem multiplikativen Inversen.**

(6.3.18) Wir geben zwei komplexe Zahlen $a = a_1 + ia_2$ und $b = b_1 + ib_2$ vor mit reellen Zahlen a_1, a_2, b_1 und b_2. Dazu betrachten wir die Bestimmungsgleichung az=b mit $z = x_1 + ix_2$. Welche komplexen z$\in \mathbb{C}$ erfüllen diese Gleichung? Einsetzen und Ausmultiplizieren gibt:

$$\boxed{az = (a_1 + ia_2)(x_1 + ix_2) = (a_1x_1 - a_2x_2) + i(a_1x_2 + a_2x_1). \quad \text{Soll sein} \quad b_1 + ib_2.}$$

Gleichsetzen der Komponenten gibt ein lineares Gleichungssystem (Vektorrechnung!). Mit dem ersten Eliminationsschritt erhält man:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{a}_1x_1 - a_2x_2 = b_1 & \xrightarrow{x_2\ raus} & (\mathrm{a}_1^2 + a_2^2)x_1 = a_1b_1 + a_2b_2 \\ \mathrm{a}_2x_1 + a_1x_2 = b_2 & \xrightarrow{x_1\ raus} & (\mathrm{a}_1^2 + a_2^2)x_2 = -a_2b_1 + a_1b_2 \end{array}$$

Die in beiden Fällen erforderliche Division ist möglich, wenn $\mathrm{a}_1^2 + a_2^2 > 0$ gilt. Das bedeutet aber gerade, dass $a = a_1 + ia_2 \neq 0 = 0 + 0i$ ist. a darf nicht die komplexe Zahl 0 sein. Ergebnis:

Für $a \neq 0$ hat die Gleichung az=b eine eindeutige Lösung.
Diese Lösung wird gegeben durch:
$\mathrm{z}_L = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{(a_1^2+a_2^2)} + i\frac{-a_2b_1+a_1b_2}{(a_1^2+a_2^2)}$
Die (jetzt zulässige) **Bezeichnung** für diese Zahl ist $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{b_1+ib_2}{a_1+ia_2}}$.

(6.3.19) Ein besonders wichtiger Spezielfall ist b=1=1+i0. Dafür folgt:

$$\boxed{\boxed{\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1+ia_2} = \frac{a_1-ia_2}{a_1^2+a_2^2}}}$$

Über diese Formel sollte man sich das Resultat merken.

☐ Verifizieren Sie: $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$.

Damit können wir das folgende zusammenfassende Fazit ziehen:

In $\mathbb{R}_K^2$ gibt es eine Multiplikation, die sämtliche Rechenregeln der reellen Zahlen erfüllt. Die reellen Zahlen selbst werden mit den Punkten der 1-Achse identifiziert. und die Punkte der 2-Achse ergeben die neuen *rein imaginären* Zahlen, die Wurzeln aus negativen Zahlen.

(6.3.20) Für den praktischen Umgang mit komplexen Zahlen bedeutet das: **Man kann und soll mit ihnen rechnen wie mit reellen Zahlen!** Mit einer Ausnahme: Das Rechnen mit Ungleichungen, etwa $a + 1 > a$ läßt sich nicht ausdehnen. Neu hinzu kommt vornehmlich die eindeutige Darstellbarkeit jeder komplexen Zahl durch Real- und Imaginärteil.

> Einige Beispiele von Rechnungen, die man nach diesem Gebot übernehmen kann: Die Regel *Jeder mit jedem* beim distibutiven Rechnen / Die üblichen Bruchrechenregeln /Die Lösungsformel quadratischer Gleichungen / Der Lösungskalkül für lineare Gleichungen.

(6.3.21) Wir demonstrieren den Nutzen des grundlegenden Gebotes **Rechne wie mit reellen Zahlen** am Beispiel der Formel für $\frac{1}{a}$, die man sich ja merken soll. Inspiziert man die Formel nochmals, so erweckt sie den Eindruck als wäre sie durch Erweitern erstanden. Erweiterungsfaktor müßte der Zählerausdruck $a_1 - ia_2$ sein. Also:

$$\boxed{\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1+ia_2} = \frac{a_1-ia_2}{(a_1+ia_2)(a_1-ia_2)} \quad \text{und tatsächlich} \quad (\mathrm{a}_1+\mathrm{ia}_2)(\mathrm{a}_1\text{-}\mathrm{ia}_2)=\mathrm{a}_1^2+\mathrm{a}_2^2}$$

(6.3.22) Also: Die berechnete Formel für $\frac{1}{a}$ ergibt sich durch Erweitern des Bruches mit der komplexen Zahl $a_1 - ia_2$. (Beachten Sie: Alle früher angegebenen Regeln für die Bruchrechnung gelten auch im Komplexen, da die Grundregeln (1.4.3) gelten!)

☐ Wie hängen die geometrischen Darstellungen der komplexen Zahlen a+ib und a-ib zusammen?
(6.3.23) Noch ein Kommentar zu dem beim Erweitern auftretenden Nenner a^2+b^2. Dieser kann nie negativ werden, insbesondere tritt auch nie ein negatives Zeichen auf. b ist der Imaginärteil, also rein reell. Der Nenner ist **nicht** $a^2+(ib)^2$ wie aus unerfindlichen Gründen immer wieder "gedacht" wird. Geometrisch ist a^2+b^2 gleich dem **Quadrat der Länge des durch a+ib oder vektoriell (a,b) beschriebenen Vektorpfeiles**.
Bitte halten Sie auseinander: Man kann rechnen wie mit reellen Zahlen. **Aber die so erhaltenen Ergebnisse können anders aussehen** als im rein reellen Fall. Die nächste Übung konkretisiert das an einem wichtigen Beispiel.

☐ Es sei seien a und b reell. Berechnen Sie mit Hilfe der (ja anwendbaren!) binomischen Formeln (a+ib)^2 , (a-ib)^2 , (a+ib)(a-ib) , (a+ib)^3 und (a+ib)^4. Und speziell (1+i)^2.

⇓ Noch einige **Konsequenzen für das Zahlrechnen**, die wir ohne Beweis geben, die man aber kennen sollte.
(6.3.24) Jede quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ mit p,q reell hat (im Komplexen) zwei Lösungen, eventuell eine doppelte. Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$ sind diese Lösungen echt komplex, nicht reell:

$$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Jeder quadratische Ausdruck läßt sich somit in Linearfaktorform schreiben $A(x-x_1)(x-x_2)$. Vgl. Kap. 1.5.5 und (1.5.9).
(6.3.25) Dieser Sachverhalt läßt sich verallgemeinern. Es gilt: **Jedes Polynom n-ten Grades hat n u.U. mehrfache Nullstellen, sobald man komplexe Nullstellen zuläßt.**
(6.3.26) Man kann **Polynome mit komplexen Koeffizienten** bilden. Etwa $p(z)=iz^2+(1-i)z+3$. Nach unserem Gebot, wie mit reellen Zahlen zu rechnen, kann man bei der Nullstellenbestimmung auch hier die p-q-Formel verwenden. Die entstehenden Wurzeln lassen sich noch weiter auswerten. Wie man das macht, werden wir noch sehen. Im Augenblick ist wichtig: **Sucht man die Nullstellen von Polynomen mit komplexen Koeffizienten, so sind das erneut komplexe Zahlen, man muss den Zahlbereich nicht erneut vergrößern. Und die oben gegebenen Regeln über die Zahl der Nullstellen bleiben gültig.**

☐ Gegeben eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten p und q. Was ist anders als im reellen Fall? Denken sie an die "Diskriminante" $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$.

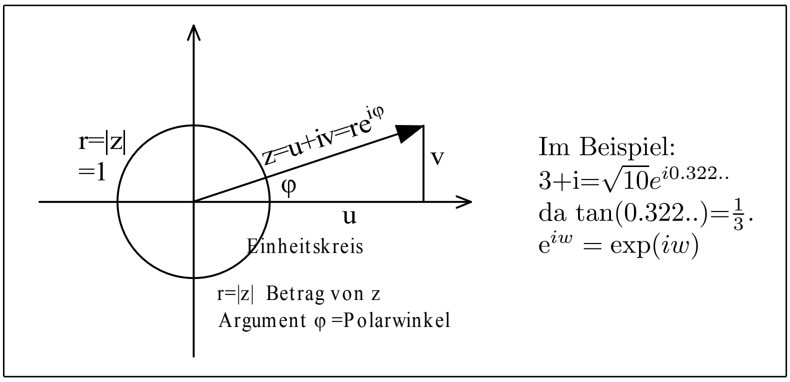
⇑ Damit ist die Einführung der komplexen Zahlen beendet. Insbesondere besitzen wir eine Antwort auf die Frage nach der Interpretation der komplexen Zahlen.Wir können **zusammenfassen:**

!!	Die komplexen Zahlen sind die (anders geschriebenen, der Zahlrolle angepaßten) Vektoren des $\mathbb{R}^2_K$, für die eine zusätzliche Multiplikation erklärt ist.
T	Dieses System, der *Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen,* wurde durch folgende drei Eigenschaften festglegt:
(1)	Die 1-Achse wird mit der reellen Zahlengeraden identifiziert
(2)	Die 2-Achse enthält die Wurzeln negativer Zahlen, die rein imaginären Zahlen. mit $\mathrm{i}^2=-1$.
(3)	Man kann durch jede komplexe Zahl $\neq 0$ eindeutig dividieren.
!!!	**Es gilt die Grundregel**: Abgesehen von Ungleichungen darf man mit komplexen Zahlen ebenso rechnen wie mit reellen Zahlen.

6.3.3 Der Formalismus der komplexen Zahlen
6.3.3a Die Polardarstellung

⇓ *Wir müssen den Umgang mit den komplexen Zahlen, den damit verbundenen rechnerischen Formalismus ausbauen. Wir müssen noch einige vektorielle Aspekte in unsere Zahlsprache übersetzen und einige Besonderheiten herausarbeiten, die für das Rechnen mit komplexen Zahlen zusätzlich gelten.*
(6.3.27) Zunächst ein ganz wichtiger Sachverhalt. Eine komplexe Zahl ist eine Größe, die durch zwei (reelle) Zahlangaben (=innere Freiheitsgrade) festgelegt wird. Neben der (kartesischen) Festlegung durch Real- und Imaginärteil ist die **Polarfestlegung** wichtig. Dabei geht man wie folgt vor:

(6.3.28) Man interpretiert die komplexe Zahl z als Vektorpfeil und schreibt diesen in der Form *Länge mal Einheitsvektor.* Die Länge von z, den Betrag des Vektors bezeichnet man mit $|z|$. Der Richtungseinheitsvektor der Ebene wird durch den Winkel φ, den seine Richtung mit der positiven x-Achse bildet, festgelegt. Diesen Richtungseinheitsvektor $\vec{e}(\varphi)$ **bezeichnen** wir jetzt mit $e^{i\varphi}$, gelesen "e-hoch-i-φ" . Den Winkel $\varphi = \varphi(z)$ nennt man auch das *Argument von z.* Sinn und Nutzen dieser Schreibweise werden wir bald erkennen. Damit schreibt sich die Vektorgleichung $\vec{z} = |\vec{z}|\,\vec{e}(\varphi)$ in der Zahlsprache $z = |z|\,e^{i\varphi}$ (vgl. Kap. 6.1c). Das ist die *Polardarstellung der komplexen Zahlen.*



(6.3.28) Jede komplexe Zahl läßt sich somit kartesisch oder polar darstellen, hat zwei mögliche Endformen. Das wird durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$z = u + iv = |z|\,e^{i\varphi}$$

Nochmals: Wir führen $e^{i\varphi}$ als günstige Zahlbereichsbezeichnung einer bereits bekannten Vektorgröße ein!
(6.3.29) Es entstehen folgende Probleme:

1.Endformproblem: Eine komplexe Zahl ist in einer dieser Darstellungen gegeben und soll in die andere gebracht werden.

2. Endformproblem: Ein komplexwertiger Term in beliebiger Darstellung soll in eine der beiden Endformen gebracht werden.

(6.3.30) Das erste dieser Probleme können wir unmittelbar durch Inspektion der Skizze lösen. Allerdings müssen wir beachten, dass der Winkel, den der Vektorpfeil mit der x-Achse bildet **nicht eindeutig** festliegt. Addiert man Vielfache von 2π zum Winkel, so ergibt sich derselbe Pfeil. Bereits in (6.1.36) haben wir gezeigt, dass $\vec{e}(\varphi) = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi$ gilt. In der neuen Schreibweise ist das $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
(6.3.31) Formeln zur Umrechnung der Darstellungen

Die polare Form sei gegeben. z=$\lvert z\rvert\,e^{i\varphi}$	Dann gilt: z=$\lvert z\rvert\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \lvert z\rvert\cos\varphi + i\,\lvert z\rvert\sin\varphi$
Die kartesische Form sei gegeben. z=u+iv	Dann gilt z=$\lvert z\rvert\,e^{i\varphi}$ mit $\lvert z\rvert = \sqrt{u^2+v^2}$ und $\varphi = \begin{cases} atn\left(\frac{v}{u}\right) & \text{wenn u>0, v} \neq 0, \\ atn\left(\frac{v}{u}\right) + \pi & \text{wenn u<0 und v} \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{wenn v>0 und u=0,} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{wenn v<0 und u=0.} \end{cases}$

Die angegebene Formel liefert einen Polarwinkel, der immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt. Achten Sie darauf, dass die üblichen Taschenrechner über den Arcustangens immer einen Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liefern. Man muss zusätzlich über das Vorzeichen des Realteiles feststellen, ob π hinzuzuzählen ist oder nicht. (2+3i und -2-3i haben beide tan$\varphi = \frac{3}{2}$, ergeben also über den Arcustangens denselben Wert. Das ist der Grund der Fallunterscheidung.)

☐ Fertigen Sie eine Skizze, die Ihnen hilft, sich die Berechnung des Winkels (*Argumentes)* φ zu merken.

☐ Wir geben jetzt einige konkrete und wichtige Beispiele dieser Umrechnungsformeln. All diese Beispiele lassen sich unmittelbar mit Hilfe einer Skizze verstehen. Sie folgen natürlich auch als Spezialfälle obiger Formeln. Verifizieren Sie auf **beide** Weisen:

$e^{i\pi} = -1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$	$e^{2i\pi} = 1$	$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i = \frac{1}{i}$	3+3i=$\sqrt{18}e^{i\frac{\pi}{4}}$	1-i=$\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$

Es ist ausgesprochen wichtig, dass Sie derartige Umformungen komplexer Zahlen effizient beherrschen.

☐ Wieso ist $z = -2e^{i2}$ keine Polardarstellung. Korrekt ist $z = 2e^{i(2+\pi)}$.

☐ Wie ist die Formel für φ in (6.3.31) abzuändern, wenn man $-\pi < \varphi \leq \pi$ haben möchte. Dieser Winkelbereich wird in der Physik gerne benutzt.

6.3.3b Die geometrische Interpretation der Multiplikation

(6.3.32) Bisher können wir nur die Addition komplexer Zahlen geometrisch mit Hilfe der Parallelogrammkonstruktion interpretieren. Für die Multiplikation verfügen wir noch nicht über eine entsprechende geometrische Interpretation. Oder auch: Hat man die komplexen Zahlen z_1 und z_2 gezeichnet, dann wissen wir noch nicht, wie man daraus $z_1 z_2$ geometrisch konstruiert.
(6.3.33) Mit Hilfe der Polardarstellung läßt sich das Problem lösen. Wir geben beide Faktoren polar vor (1) , bringen beide Faktoren in die kartesische Darstellung (2), multiplizieren diese nach der Definition aus (3) und schreiben das Ergebnis erneut polar (4).
Jetzt die Ausführung. Wie immer sollten Sie sich bemühen, die rechte Spalte soweit wie möglich vor dem Nachschauen eigenständig zu produzieren:

(1)	$z_1 = re^{i\alpha}$ und $z_2 = se^{i\beta}$ r,s>0 gegeben
(2)	$z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $z_2 = s(\cos\beta + i\sin\beta)$
(3)	$z_1 z_2 = rs(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$
(3a)	$= rs((cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta)$
(3b)!!	$= rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
(4)	$z_1 z_2 = rse^{i(\alpha+\beta)}$
Zusammen	$\left(re^{i\alpha}\right)\left(se^{i\beta}\right) = rse^{i(\alpha+\beta)}$

Schritt (3b) ist entscheidend. Hier benutzen wir die Additionstheoreme für cos und sin, die wir im Analysisteil (Kap.8 (8.2.31)) beweisen werden. Bis auf diesen einen Schritt sind alle Umformungen Routine. Das Ergebnis sagt uns sofort, wie wir **geometrisch** den Pfeil für das Produkt $z_1 z_2$ zweier komplexer Zahlen erhalten:

z_1z_2 ist ein Pfeil mit Polarwinkel $\alpha + \beta$, der gleich Summe der Einzelwinkel ist, **und einem Betrag** rs**, der gleich dem Produkt der Einzelbeträge ist.**

(6.3.34) Jetzt erkennen wir einen Grund für die zunächst sonderbare "e-hoch i"-Schreibweise: Diese Exponentialschreibweise ist zumindest als **Gedächtnisstütze** von Nutzen. Denn die Produktbildung erhält so die Gestalt einer der Potenzrechenregeln und muss nicht neu gemerkt werden. Wir werden sehen, dass in diesem Sinne auch die weiteren Potenzrechenregeln erfüllt sind. Mit Methoden, die in diesem Kurs nicht besprochen werden, läßt sich zeigen, dass $e^{i\varphi}$ nicht nur die Regeln der Potenzrechnung erfüllt, sondern dass tatsächlich eine Potenzfunktion vorliegt.

☐ Rechnen und zeichnen Sie selbst zwei oder drei Konkretisierungen dieser Regel.
(6.3.35) Nun lassen sich sofort weitere Berechnungsausdrücke geometrisch auswerten. Ein wichtiges Beispiel ist $\frac{1}{z}$. Sei z=re$^{i\alpha}$. Da $z \cdot \frac{1}{z} = 1 = e^{i0}$ gilt, besitzt $\frac{1}{z}$ die folgende Polardarstellung:

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\alpha}} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}.}$$

Erneut zeigt sich die Form einer Rechenregel für Potenzen und läß t sich entsprechend einfach merken.

☐ Behandeln Sie analog $\frac{z_1}{z_2}$.
(6.3.36) Wir bemerken bereits jetzt das Vorhandensein der folgenden **Regel über den Einsatz der beiden Darstellungen:**

!!	Für die Ausführung von *Strichrechnung* benötigt man die kartesische Form.
!!	*Punktrechnung* sollte man vorzugsweise in der Polarform ausführen.
	Treten beide Rechnungsarten auf, muss man eventuell umrechnen.

Produkte und Quotienten lassen sich noch kartesisch berechnen, wenn auch der Aufwand größer ist. In vielen Fällen muss man das sogar. Bei Wurzeln und großen Potenzen sieht es so aus, dass meist nur noch die Polarform in Frage kommt.

(6.3.37) Zur Verdeutlichung rechnen wir für $w = u + iv = re^{i\alpha}$ eine Wurzel aus, bestimmen also **eine** Lösung von $z^2 = w$. Für die Polardarstellung rät man eine Lösung unmittelbar über die Geometrie durch Halbierung des Winkels. Nämlich $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}$. Damit folgt $z^2 = \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}\right) = re^{i\alpha} = w$. Die Gleichung ist erfüllt. Wir werden weiter unten in (6.3.42) sehen, wie man durch Ausbau dieser Überlegung **alle** n-ten Wurzeln einer beliebigen komplexen Zahl a ganz **leicht** erhält.

(6.3.38) Jetzt das Problem in kartesischer Darstellung mit $u = r\cos\alpha$ und $v = r\sin\alpha$.

Wir machen für z den Ansatz z=x+iy mit x und y unbestimmt, r und α gegeben. Einsetzen gibt $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Das soll gleich w=u+iv sein. Gleichsetzen der Komponenten gibt ein nichtlineares 2×2-System, das wir mit dem Eliminationsschema behandeln. Achten Sie auf die Rollen. u und v sind äußere Parameter.

$$\begin{array}{l} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{array} \quad \xrightarrow{y\ raus} \quad 4x^4 - v^2 = 4ux^2 \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{x^2 = \tfrac{u}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2} = \tfrac{r}{2}(\cos\alpha + 1)\,.}}$$

Das negative Zeichen bei der Lösung der biquadratischen Gleichung ist zu verwerfen, da x^2 positiv sein muss. Analog findet man

$$y^2 = \underline{\underline{-\tfrac{u}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2} = \tfrac{r}{2}(-\cos\alpha + 1).}}$$

Aus beiden Größen ist erneut die Wurzel zu ziehen. Dazu benutzen wir zwei Formeln, die aus dem Additionstheorem für cos(x+y) folgen,wenn man x=y=$\frac{\alpha}{2}$ wählt und den Pythagoras ausnutzt:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Damit werden die rechten Seiten Quadrate und es folgt:

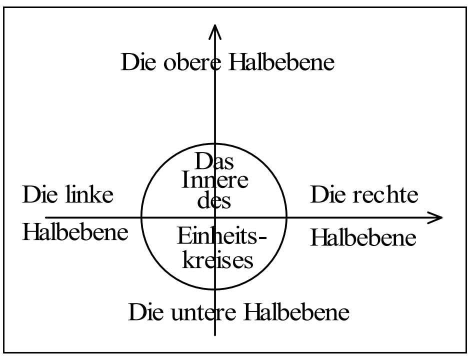
$$x = \pm\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad y = \pm\sqrt{r}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Nun muss man noch untersuchen, welche Vorzeichenkombinationen zulässig sind. Wegen xy=v muß xy muss dasselbe Vorzeichen wie v haben.

! Die Botschaft sollte nach dieser Rechnung klar geworden sein: **Bei Punktrechnung auf dem Niveau des Wurzelziehens ist die Polardarstellung unbedingt vorzuziehen!** Sind u und v als vorgegeben anzusehen, dann entfällt der letzte Teil der Rechnung. Man muss aber immer noch auf die korrekten Vorzeichenkombination achten. Die Ausgangsgleichung z^2 $= w$ ist quadratisch und hat für w$\neq$ 0 immer genau zwei Lösungen.

□ p und q seien zwei feste gegebene komplexe Zahlen. Beschreiben Sie, wie man geometrisch aus der kompexen Zahl z die komplexe Zahl $z^2 + pz + q$ erhält. Welche Freiheiten hat man? Wie könnte man das auf einem Computerbildschirm darstellen? (Denken Sie an die Vektoraddition!) :

(6.3.39) Vielfach wird die Polardarstellung als Orientierungshilfe bei der Lagebeschreibung, der geometrischen Orientierung, in der komplexen Ebene genutzt. Dazu zeichnet man Koordinaten **und** Einheitskreis (r=1) ein und benutzt Charakterisierungen wie *Innerhalb des Einheitskreises* oder *"In der unteren Halbebene"* oder *"Außerhalb des Einheitskreises"* usw.



Die Punkte des Einheitskreises werden durch $\alpha \mapsto e^{i\alpha}$ parametrisiert. Beachten Sie: Liegt ein Punkt z=re$^{i\alpha}$ im Innern des Einheitskreises, dann liegen auch alle Potenzen z^n darin, da mit r<1 auch r^n < 1 gilt. Die Punkte z^{-n} dagegen liegen außerhalb des Einheitskreises.

☐ Was läßt sich über $z_1 z_2$ sagen, wenn z_1 und z_2 beide im Innern des Einheitskreises liegen? Was, wenn beide auf dem Einheitskreis liegen? Was läßt sich über $\frac{1}{z_1}$ sagen?

6.3.3c **Wann sind zwei komplexe Zahlen gleich?**

(6.3.40) Gegeben zwei komplexwertige Terme, für die man gezeigt hat, dass sie denselben Wert ergeben. Wie wertet man diesen Sachverhalt aus? Man bringt beide Terme entweder in die kartesische oder polare Endform. Dann kann man ein festes Auswerungsschema anwenden.

(6.3.41) Liegt die kartesische Endform vor, dann setzt man die Real- und die Imaginärteile gleich. Das ist unser altes Schnittmengenbestimmungsschema. Es ergeben sich zwei skalare Gleichungen, mit denen man weiter arbeiten kann. Beispiele hierfür haben wir bereits in (6.3.18) und in (6.3.38) gegeben.

Liegt dagegen die polare Endform vor, ist Vorsicht angebracht. Als Ausgangspunkt haben wir eine Gleichung $re^{i\alpha} = se^{i\beta}$ zur Verfügung. Dabei gilt r,s$\geq$ 0 und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Was kann man damit anfangen? Durch Betragsbildung folgt sofort r=s. Aber wir dürfen keinesfalls ohne weiteres auf $\alpha = \beta$ schließen! Denn der Winkel ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt. Geht man eine volle Umdrehung weiter oder zurück, kann man das dem resultierenden Endpfeil nicht mehr ansehen. Und das bedeutet, dass man nur auf $\alpha = \beta + 2\pi k$ schließen kann, mit $k \in \mathbb{Z}$.

Nehmen Sie an, der Detektiv erhielte durch Zufall ein Bild einer Mordtat, auf dem eine Uhr samt Uhrzeit zu erkennen ist. Er kennt somit die Uhrzeit der Tat, **nicht aber den Tag,** an dem diese stattfand. (Oder auch: Die Uhr hat keine Datumsangabe).

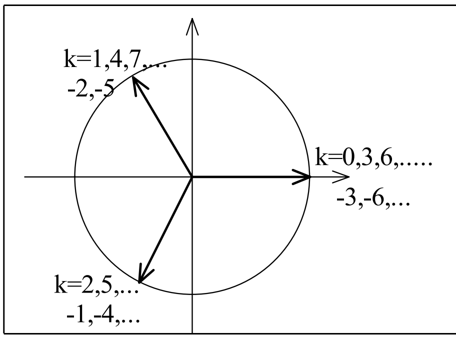
(6.3.42) Verhaltenshilfe bei polarer Endform:

$\Rightarrow$	Man wisse $re^{i\alpha} = se^{i\beta}$ mit $r, s \geq 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Dann	darf man schließen: r=s
!!	und $\alpha = \beta + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ freier Parameter.
	Will man k festlegen, benötigt man zusätzliche Information.

Aus einer Vektorgleichung sind zwei skalare Gleichungen geworden, wobei eine noch den zusätzlichen freien Paramter k$\in \mathbb{Z}$ enthält.

Als Anwendungsbeispiel bestimmen wir alle n-ten Wurzeln von 1, d.h. **alle** komplexen Lösungen von z^n $= 1$ mit n=2,3,4,5,.....(n äußerer Parameter.)

> Zunächst müssen wir die Terme beider Seiten (von $z^n = 1$) in Polarform bringen. (Dabei nie $r, s \geq 0$ vergessen!) Es ist $1 = 1e^{i0}$ mit $1 > 0$. Dann setzen wir $z = re^{i\alpha}$ an, mit r und α unbestimmt, aber $r \geq 0$. (Rollenzuweisung). Es folgt $z^n = r^n e^{in\alpha}$ und $r^n \geq 0$. Beide Seiten haben Polarform. Die Verhaltenshilfe liefert $r^n = 1$ und $n\alpha = 0 + 2\pi k$. Aus der ersten Gleichung folgt $r = 1$ als einzige positive Lösung. Aus der zweiten folgt $n = n_k = \frac{2\pi k}{n}$ für jedes k$\in \mathbb{Z}$. D.h. wir haben für jedes k einen zugehörigen Lösungsvektor $z_k = 1e^{i\alpha_k} = 1e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, der auf dem Einheitskreis liegt. Eine Skizze zeigt sofort, dass diese Pfeile keineswegs alle voneinander verschieden sind. **Für n=0,1,2,...k-1 erhält man die unterschiedlichen Lösungen genau einmal.** Es sind n Stück. Die Parameterwahl n=0,1,...k-1 ist in der Regel die übliche und die günstigste. Die Skizze zeigt den Fall n=3.



$z_0 = 1e^{i0} = 1e^{i\frac{2\pi\cdot 3}{3}} = ...$
$z_1 = 1e^{i\frac{2\pi\cdot 1}{3}} = 1e^{i\frac{2\pi\cdot 4}{3}} = ...$
$z_2 = 1e^{i\frac{2\pi\cdot 2}{3}} = 1e^{i\frac{2\pi\cdot 5}{3}} = ...$
Für n=3 gibt k=0,1,2
mit z_0, z_1, z_2 alle Wurzeln
von z^3 $= 1$

⇑Resultat:

Die Gleichung $z^n = 1$ für n=1,2,... hat genau n Lösungen:
$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ mit n=0,1,...k. Speziell ist $z_0 = 1$.
Das sind die k-ten Einheitswurzeln $\sqrt[k]{1}$ (im Komplexen).

☐ Skizzieren Sie die Einheitswurzeln für k=4 und 5. Schreiben Sie sie in kartesischer Form.

☐ Lösen Sie analog $z^n = -2i$. Was ändert sich allgemin bei $z^n = a$?

(6.3.43) Gilt eine Gleichheit für die kartesische Form, dann gilt sie auch für die entsprechende polare Form und umgekehrt. Ein Beispiel: Wir haben in (6.3.4) gesehen, dass $\sqrt[3]{2+11i} = 2+i$ gilt. Jetzt rechnen wir die linke Seite polar aus. Das gibt $z_n = \sqrt[3]{125}e^{i\frac{(\alpha+2\pi n)}{3}}$ mit tan$\alpha = \frac{11}{2}$. Für die rechte Seite folgt$2+i = 5e^{i\beta}$ mit tan$\beta = \frac{1}{2}$. Das gehört offensichtlich zu k=0, so dass folgt: Ist $\tan\beta = \frac{1}{2}$, so ist $\tan(3\beta) = \frac{11}{2}$. Prüfen Sie das zumindest numerisch mit dem Taschenrechner nach.

6.3.3d: **Die komplexe Konjugation**

(6.3.44) Es sei $z = re^{i\alpha} = u + iv$. Wir haben zwei Methoden, um $\frac{1}{z}$ zu bestimmen. Polar folgt $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$, wie wir gesehen haben. D.h. man geht zu einem Pfeil über mit entgegengesetztem Winkel und der reziproken Länge. Liegt z im Einheitskreis, etwa $r = \frac{1}{2}$, dann liegt $\frac{1}{z}$ außerhalb, denn dann ist $\frac{1}{r} = 2$. Wir können das auch wie folgt schreiben: $\frac{1}{z} = \frac{re^{-i\alpha}}{r^2}$.
In (6.3.19) haben wir $\frac{1}{z}$ bereits kartesisch bestimmt mit dem Ergebnis $\frac{1}{z} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}$. Offensichtlich ist $r^2 = u^2 + v^2$ und u-iv=re$^{-i\alpha}$. Eine Skizze zeigt: **Das ist der Pfeil, der aus z durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht.**

T **(6.3.45)** Die Spiegelungskonstruktion erweist sich als ausgesprochen nützlich. Man definiert:

Es **sei** z=u+iv=re$^{i\alpha}$ eine komplexe Zahl.
Dann heißt die Zahl u-iv = re$^{-i\alpha}$ *die zu z konjugiert komplexe Zahl.*
Wir bezeichnen diese Zahl mit $\bar{z}$.
Es gilt $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$

So ist etwa $\overline{2+3i} = 2-3i$ oder $\bar{i} = -i$.

(6.3.46) Die in der letzten Zeile gegebene wichtige Gleichung verifiziert man sofort. Etwa polar: $z \cdot \bar{z} = r^2e^{i(\alpha-\alpha)} = r^2 = |z|^2$. Die Gleichung ist deshalb so wichtig, **weil man mit ihrer Hilfe den Betrag rechnerisch über eine komplexe Multiplikation erhält.** Sie entspricht der Gleichung $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x}$ für das Skalarprodukt. (Denn $z^2 = |z|^2$ gilt nur für rein reelles z!)

☐ Verifizieren sie die Gleichung $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ über die kartesische Darstellung.

(6.3.47) Eine erste (und sehr beliebte) Anwendung dieser komplexen Konjugation besteht in der Auswertung komplexer Brüche. Vielfach treten Brüche mit komplexen Nennern ("mit i im Nenner") auf. Man möchte, dass diese Nenner reell werden, um den gesamten Term etwa in die kartesische Endform zu bringen. **Dann muss man mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitern.** Der entstehende erweiterte Nenner ist ja das Quadrat des Betrages des alten Nenners und das ist eine nicht negative reelle Zahl! Alle i-s sind aus dem Nenner verschwunden.

Beispiel:

$$\frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{9+1} = \frac{1}{10}(5-5i) = \frac{1}{2}(1-i).$$

Bitte keine weiteren (schriftlichen) **Zwischenschritte** (bei einer derartigen Rechnung, also (3+i)(3-i)=9+1 im Kopf.). Der erweiterte Nenner ist unproblematisch: $u^2 + v^2$. Keine Wurzel, kein negatives Zeichen. Der Zähler ist der alte, multipliziert mit dem konjugiert komplexen Nenner, hier 3-i. Dann wird der (erweiterte) Zähler nach der alten Regel *(Real×Real-Im×Im)* ausmultipliziert. Bei der kartesischen Endform gemeinsame Faktoren möglichst ausklammern. So wird die geometrische Veranschaulichung einfacher.

(6.3.48) Für die komplexe Konjugation gibt es eine Reihe von Rechenregeln. Etwa $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Der Beweis folgt per Tunnelmethode in der kartesischen Form. Aber es gibt noch weitere derartige Regeln.

☐ Stellen Sie selbst einen Satz von **Grundregeln für die komplexe Konjugation** zusammen und versuchen Sie diese, zu verifizieren. (Der erste Teil der Frage ist der wichtige: Was erwarten und erhoffen Sie für Regeln? Man sollte sich rechtzeitige Fragen dieser Art angewöhnen.)

☐ In der Experimentalphysikvorlesung werden komplexe Zahlen benutzt. Die beiden Formeln $z = a + ib$ und $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ werden angeschrieben. Murren bei einigen Studenten und in der Pause kommen Proteste: "i^2 ist doch -1. Also muss es $\sqrt{a^2 - b^2}$ heißen, Ihre Formel ist falsch." Sie sollen ihren Mitstudenten diesen (immer wieder auftauchenden) Irrtum erklären. Wie gehen Sie vor?

6.3.3e **Die Eulersche Gleichung**

(6.3.49) Wir haben den Einheitsvektor zum Winkel α mit $\mathrm{e}^{i\alpha}$ bezeichnet und gesehen, dass diese komplexe Zahl den üblichen Potenzgesetzen genügt. Etwa $\mathrm{e}^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Wir kennen auch die kartesische Dartellung dieser Zahl, nämlich:

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad \text{Die Eulersche Gleichung}}$$

(6.3.50) Die Eulersche Gleichung erweist sich als ausgesprochen nützlich! Nicht nur für die Umwandlung der polaren in die kartesische Form. Durch rein rechnerische Manipulationen kann man aus ihr eine Vielzahl von Folgerungen in Form gültiger Gleichungen ziehen. Die meisten Gleichungen machen Aussagen zu den trigonometrischen Funktionen sin und cos.
(6.3.51) Einige Beispiele, die das typische Vorgehen zeigen:
Beide Seiten der Eulerschen Gleichung quadrieren und dann Real- und Imaginärteil vergleichen:

$\left(e^{i\alpha}\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$ $e^{2i\alpha} = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2i\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

☐ Bilden Sie analog $(...)^3$ und bestimmen Sie Formeln für $\cos(3\alpha)$ und $\sin(3\alpha)$.
(6.3.52) Wir haben $\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ und $\mathrm{e}^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ Addiert und subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so folgen zwei nützliche Formeln, nämlich:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) \\ \sin\alpha &= \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) \end{aligned}}$$

☐ Bilden Sie auch hiervon Quadrate und dritte Potenzen. Was folgt?
(6.3.53) Die Eulersche Formel gilt für alle α. Einige wichtige Spezialfälle, die sich sofort ergeben:

$$\mathrm{e}^{2\pi ni} = 1 \text{ für alle n} \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{e}^{\pi ni} = (-1)^n \text{ für alle n} \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}ni} = i^n \text{ für alle n} \in \mathbb{Z} \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Insbesondere die erste dieser Gleichungen ist bemerkenswert und sehr nützlich. Unser geometrischer Zugang sollte ihren Inhalt verständlich machen. Ohne diesen geometrischen Hintergrund verwirrt diese Gleichung erfahrungsgemäß zahlreiche Anfänger.
☐ Inspizieren Sie in einer Formelsammlung die unter dem Stichwort "Hyperbolische Funktionen" gegebenen Größen. Finden sie ein Analogon zur Eulerschen Gleichung und deren Konsequenzen? Was ändert sich gegenüber den trigonometrischen Funktionen?

6.3.3f **Endformbildung**

(6.3.54) Wir haben das bereits in (6.3.29) als Aufgabe formuliert: **Ein kompliziert aufgebauter komplexwertiger Term soll entweder in die kartesische oder die polare Endform gebracht werden.** Hierzu haben wir inzwischen alle Hilfsmittel bereitgestellt. Teilweise muss man mehrfach zwischen polarer und kartesischer Form wechseln. Wir besprechen zwei Beispiele.
(6.3.55) Gegeben eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten. Wir bringen sie zunächst auf Normalform und beseitigen alle i-s in den Nennern:

$$(1 - 2i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 1 = 0 \qquad \to \qquad z^2 + \frac{2}{5}(-3 + 4i)z - \frac{1}{5}(1 + 2i) = 0$$

Ansonsten darf man rechnen wie im Reellen. Insbesondere gibt die p-q-Formel nach einigen Vereinfachungen:

$$z_{12} = \frac{1}{5}(3-4i) \pm \frac{1}{5}\sqrt{-2-14i} = \frac{1}{5}(3-4i) \pm \frac{\sqrt[4]{200}}{5}e^{i\frac{\alpha+\pi}{2}} \qquad \text{mit } \tan\alpha = 7$$

Die Wurzel ist auszuwerten. Das erfolgt über die Polarform. Mit der Eulerschen Formel und $\sqrt[4]{200} = \sqrt{10\sqrt{2}}$ folgt:

$$z_{12} = \frac{1}{5}(3-4i) \pm \frac{\sqrt{10\sqrt{2}}}{5}\left(-\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

Jetzt kann man noch $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ durch m=tanα ausdrücken, was einigen Aufwand erfordert. Am Ende gelangt man so zu dem Resultat in kartesischer Form:

$$\boxed{\mathrm{z}_{12}=\left(\tfrac{3}{5} \pm \tfrac{1}{5}\sqrt{(5\sqrt{2}-1)}\right)+\mathrm{i}\left(-\tfrac{4}{5} \mp \tfrac{1}{5}\sqrt{(5\sqrt{2}+1)}\right)}$$

(6.3.56) Als weiteres Beispiel vereinfachen wir zwei Brüche:

$$\frac{1}{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}} = \frac{(1+i)(1-i)}{(1-i)+((1+i)} = 1$$

Hier genügt einfache Hauptnennerbildung. Im nächsten Beispiel ist zu erweitern:

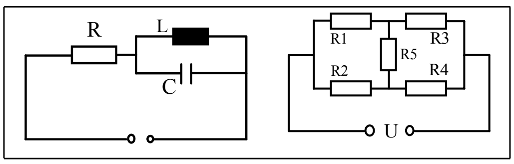
$$\frac{1}{1+\frac{2}{3-i}} = \frac{3-i}{i((3-i)+2} = \frac{3-i}{3(i+1)} = \frac{1}{3}\frac{(3-i)(1-i)}{1+1} = \frac{1}{3}(1-2i).$$

6.3.4 Komplexe Widerstände

Die Wechselstromlehre der Elektrotechnik liefert eine illustrative Anwendung der komplexen Zahlen. Viele Probleme zu den Wechselstromschaltungen lassen sich mit Hilfe komplexer Zahlen deutlich effizienter lösen als mit rein reeller Rechnung. Warum eignet sich dieser Bereich für eine komplexe Darstellung? Die zu erfassenden stationären Wechselstromgrößen benötigen zu ihrer Festlegung ***zwei Zahlangaben:*** *Betrag und relative Phase. Daher liegt eine $\mathbb{R}^2$-Beschreibung nahe. Und mit Hilfe der komplexen Zahlen lassen sich jetzt Formeln aufbauen, für die eine Division zulässig ist. Insbesondere zeigt sich, dass eine weitgehende Analogie zum Gleichstromfall besteht, wo vielfach Divisionen benutzt werden.*

(6.3.57) Worum geht es?

- Wir betrachten ein irgendwie aus Widerständen, Spulen und Kondensatoren aufgebautes elektrisches Netzwerk.(Kondensatoren sind ideale Schaltelemente, die Ladungen und ein davon erzeugtes elektrisches Feld speichern und auch wieder abgeben können. Spulen sind Schaltelemente, die ein magnetisches Feld als Folge fließender Ströme auf- und abbauen.) Die Figur zeigt zwei Beispiele solcher Schaltungen.



- An das Netzwerk soll eine (einzige) sinusförmige Spannung der Kreisfrequenz ω angelegt werden. Wir haben $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Dabei ist T die Schwingungsdauer einer einzelnen Schwingung und f ist die übliche Frequenz, also die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit. ω ist zunächst als äußerer Paramter anzusehen. Jede feste Wahl liefert ein zugehöriges physikalisches Problem.

- Wir warten, bis sich nach dem Einschalten ein Gleichgewichtsszustand eingestellt hat, bis die Auswirkungen des Einschaltens abgeklungen sind. Die Zeit, die man hierzu benötigt, ist charakteristisch für den Bau des jeweiligen Systems und wird *Relaxationszeit* genannt. Auf sie - ihre Bestimmung und Messung - gehen wir nicht weiter ein.

- Wir fragen**: Wie groß ist der Strom, der als Folge der angelegten Spannung im Anschluss an den Einschaltvorgang durch das Netzwerk fließt?** Und genauer: Wie groß sind die Ströme, die durch die einzelnen Schaltelemente fließen? Wie groß sind die Spannungsabfälle an den einzelnen Schaltelementen? Alle dies Größen lassen sich beobachten - durch Messungen bestimmen. Die Erfahrung zeigt: Die Größen sind unter den beschriebenen Umständen **eindeutig festgelegt** und sollten damit vorhersagbar sein.
- Zusätzlich fragt man: Wie ändern sich die einzelnen Beobachtungsgrößen, wenn man die Frequenz der angelegten Wechselspannung, der Erregerspannung, ändert? Kurz: Wenn man ω ändert.
- Und als abrundende Ergänzung: Man zeigt, dass reale Schaltungen so idealisiert werden können, dass ihr Verhalten tatsächlich einem derartigen Netzwerk aus verschiedenen Schaltelementen entspricht.

6.3.4a **Die Beschreibung**

(6.3.58) Was heißt **Dauerzustand** genauer? Erfahrungsgemäß und in Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen fließt durch jedes Schaltelement des Netzes ebenso wie durch das Gesamtnetz jeweils ein eindeutig bestimmter Strom, der nach Abklingen des Einschaltens erneut **sinusförmig ist mit derselben Kreisfrequenz** wie die der angelegten Spannung. Dies ist der entscheidende Sachverhalt, den wir hier voraussetzen wollen. Für andere Schwingungsformen gilt Entsprechendes nicht, wie wir noch sehen werden!
(6.3.59) Die genaue Gestalt der resultierenden Ströme sollte sich aus den Eingabedaten

erregende Spannung sowie Art und Zusammenbau der Schaltlelemente

vorhersagen lassen. Wir beschränken uns hier auf die Frage nach dem Gesamtstrom.
(6.3.60) Zunächst müssen wir den bisher qualitativen Begriff des *sinusförmigen Vorgangs* präzisieren. Wir müssen derartige Größen quantitativ beschreiben.

T	Eine zeitlich sich sinusförmig ändernde Größe ist dadurch definiert, daß sie sich als Zuordnung der folgenden Art darstellen läßt: $t \mapsto A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ oder *Zeit* t $\mapsto$ Größe zur Zeit t. Hier ist ω die bereits eingeführte Kreisfrequenz, A_0 die *Amplitude* und φ die *Phasenverschiebung des Vorganges.* Genauer gibt $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ die zeitliche Verschiebug der Sinusfunktion an.

In einer typischen Situation ist ω äußerer Systemparameter (Steckdose f=50s^{-1}. Also $\omega = 2\pi f \approx 314 s^{-1}$.) Und A_0 und φ sind in der beschriebenen Konfiguration für die angelegte Spannung vorgegeben, für die Ströme dagegen experimentell und theoretisch gesucht. Die Bestimmung dieser Größen (Amplitude und Phase für die Ströme) ist mithin unser Ziel.
(6.3.61) Jetzt eine Idee: Die beiden entscheidenden Beschreibungsgrößen könnte man ebenso angeben, wenn man die folgende komplexwertige Zuordnung zur Verfügung hätte:

$$t \mapsto A_\sim(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Nach den Rechenregeln für komplexe Zahlen, kann man hieraus A_0 und φ eindeutig gewinnen. Und besitzt man umgekehrt A_0 und φ, dann ist die zugehörige komplexwertige Zuordnung eindeutig festgelegt. Schließlich kann man über die Eulersche Formel durch Imaginärteilbildung daraus die gesamte reelle Zeitbeschreibung gewinnen.
(6.3.62) Beide Darstellungen sind daher ineinander umwandelbar, sind gleichwertig. Die eine dient der unmittelbaren Beschreibung der Meßergebnisse, die andere zur theoretischen Analyse, Beschreibung und Rechnung.
(6.3.63) Rechnerisch ist die neue Zuordnung $t \mapsto A_\sim(t)$ viel günstiger als die alte. Insbesondere kann man damit für den Wechselstromfall weitgehend die Formeln und Rechnungen des Gleichstromfalles übernehmen. Die reelle Größe $t \mapsto A(t)$ dagegen läßt sich nicht durch einfache Analogie gewinnen. Der rechnerische Umgang mit ihr ist schwieriger.
(Ähnliches haben wir bereits bei der vektoriellen Beschreibung geometrischer Größen erlebt. Diese ließen sich wahlweise in Tupelform oder in geometrischer Form darstellen. Und jede Darstellung hatte ihren speziellen Nutzen.)

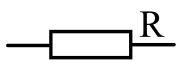
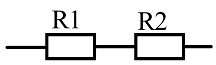
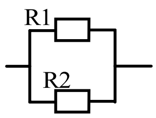
6.3.4b **Das Regelsystem**

(6.3.64) Wir geben jetzt die wichtigsten Resultate und Berechnungsformeln an, mit deren Hilfe man Wechselstromgrößen beschreibt. Wir begründen diese Regeln hier nicht, geben keinen Beweis und keine Herleitung. Ziel ist vielmehr, ein Beispiel für den Einsatz komplexer Zahlen zu geben.
(6.3.65) In Analogie zum Ohmschen Gesetz U=IR für den Gleichstromfall gilt zwischen angelegter Spannung $U_\sim(t)$ und resultierendem Strom $I_\sim(t)$ - beide in komplexer Darstellung - eine Beziehung der folgenden Form:

$$U_\sim(t) = ZI_\sim(t).$$

- Hierbei ist Z eine komplexe Zahl, die man *Impedanz des Stromkreises* oder *komplexen Widerstand des Stromkreises* nennt. Kennt man diese Zahl, ist unser Problem offensichtlich gelöst. Man kann den Strom als Funktion der Erregerspannung durch eine Division bestimmen: $I_\sim(t) = \frac{1}{Z}U_\sim(t)$. Um die Division vornehmen zu können, sollte man möglichst mit der Polarform arbeiten.
- Die Impedanz hängt ab von der Kreisfrequenz ω, von der Art der Zusammenschaltung der Schaltelemente und von gewissen Kenngrößen der beteiligten Bauteile. (R-C-L-Werte. Diese sind im Gegensatz zu Z unabhängig von ω.)

(6.3.66) Der Wert der Impedanz läßt sich nun für viele - nicht alle - Schaltkreise mit Hilfe der folgenden Regeln herleiten. Diese Regeln haben erneut eine zum Gleichstromfall analoge Form.

Regeln zur rekursiven Bestimmung komplexer	**Widerstände**
Für einen rein Ohmschen Widerstand setze Z=R	
Für eine Spule mit Selbstiduktion L setze Z=iωL	
Für einen Kondensator der Kapazität C setze Z=$\frac{1}{i\omega C}$	
Werden zwei Elemente mit Impedanzen Z_1 und Z_2 in Reihe geschaltet, so folgt $Z = Z_1 + Z_2$.	
Werden zwei Elemente mit Impedanzen Z_1 und Z_2 parallel geschaltet, so folgt $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$	

(6.3.67) Durch mehrfaches Anwenden dieser Regeln erhält man Z zumeist als mehr oder weniger kompliziert aufgebauten Rechenausdruck. Diesen bringt man zunächst in kartesische Form, wobei ein Hauptproblem darin besteht, reelle Nenner zu erhalten. Manchmal ist es günstig, sofort zu $\frac{1}{Z}$ überzugehen. Am Ende geht man zur Polarform über. Sei etwa Z=$|Z|\,e^{i\alpha}$. Dies setzt man in $I_\sim(t) = \frac{1}{Z}U_\sim(t)$ ein und liest daraus die gesuchten Größen für den Strom I ab. **Die erforderlichen Rechnungen können recht aufwendig werden!** Unterschätzen Sie daher den Wert technischer Hilfen nicht und nutzen Sie diese.
(6.3.68) Im Laufe der Rechung ergibt sich generell die folgende Vereinfachung: Wir setzen $U_\sim(t) = U_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$. Dabei sind U_0 und φ vorgegeben. Weiter sei $I_\sim(t) = I_0 e^{i(\omega t+\varphi+\delta)}$, wobei I_0 und δ gesucht sind. **Die Größe δ gibt die Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der angelegten Spannung wieder.** Setzt man das in das Ohmsche Gesetz ein, so fällt die gesamte Zeitabhängigkeit über den Faktor $e^{i(\omega t+\varphi)}$ heraus. Es bleibt:

$$I_0 e^{i\delta} = \frac{1}{Z}U_0 = \frac{U_0}{|Z|}e^{-i\alpha}.$$

Dabei haben wir die Polardarstellung der Impedanz eingesetzt. Hieraus lesen wir die beiden gesuchten Größen I_0 und δ ab:

$$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{|Z|}\ , \qquad \delta = -\alpha \quad \text{wobei } Z = |Z|\,e^{i\alpha}.}$$

(Im Falle der komplexen Widerstände ist es üblich, für den gemäß (6.3.41) möglichen Zusatzwinkel $2\pi n$ Null zu wählen.)

!⇑Damit ist unser Problem insgesamt gelöst, in dem Sinne, dass wir eine Lösungsprozedur entwickelt haben, die funktioniert, sobald wir die jeweilige komplexe Impedanz Z kennen. Und die Impedanz können wir in vielen Fällen mit Hilfe der gegebenen Regeln berechnen.

☐ Was bedeutet |Z|=0, was |Z|=∞ für den resultierenden Strom? Ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, so sagt man, der Strom eile der Spannung um 90^0 oder $\frac{\pi}{2}$ voraus. Interpretieren Sie das. Veranschaulichung durch Zeichnen von U_0 und $I_0 e^{i\delta}$.

(6.3.69) Das **Herausfallen der Zeitabhängigkeit aus dem Ohmschen Gesetz** ist die Eigenschaft, die die sinusförmigen Spannungen auszeichnet. Bei anderen periodischen Spannungsformen ist das nicht der Fall, wie wir unten sehen werden.

(6.3.70) Ein einfaches **Beispiel** (für das beschreibene Vorgehen)**:**

Wir schalten einen Ohmschen Widerstand der Stärke R und eine Spule der Stärke L in Reihe. Die Reihenschaltung ergibt $Z = R + i\omega L$. Es folgt:

$$\boxed{|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = R\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha) = \frac{\omega}{\omega_2} \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \frac{R}{L}.}$$

Dabei ist ω_2 eine systemspezifische Hilfsgröße mit der Einheit einer Frequenz. (Wir werden noch zwei weitere Systemfrequenzen ω_0 und ω_1 einführen.) Die Einführung derartiger Hilfsgrößen vereinfacht die Resultatdiskussion beträchtlich.

Für die gesuchten Größen folgt:

$$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} \qquad \text{und} \quad \delta = -atn\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right).}$$

Das liefert für konkrete Werte von U_0, R und L sofort den Strom. Die Formel zeigt, dass das Resultat von der Erregerfrequenz ω abhängt. So wird der resultierende Strom bei gleicher Schaltung kleiner, wenn die Frequenz zunimmt. Der periodische Auf- und Abbau des Magnetfeldes geht rascher vonstatten, was den Strom verkleinert. Für $\omega = 0$ ergibt sich der Gleichstromfall, insbesondere $I_0 = \frac{U_0}{R}$. Dasselbe folgt für L=0 für alle Frequenzen. Die Zeitabhängigkeit läßt sich bei Bedarf über $I(t)=I_0 \sin(\omega t + \varphi + \delta)$ problemlos wieder einfügen. (φ war ja vorgegeben.) Damit verfügen wir über die gewünschten Beschreibungsgrößen des Systems.

☐ Ein Kondensator der Kapazität C und eine Spule der Induktion L seien parallel geschaltet. Berechnen Sie Z und damit |Z| und δ. Was geschieht für $\omega = \omega_0$ mit $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$?

6.3.4c **Nicht sinusförmige Spannungen**

(6.3.71) Wir haben gesehen: Wenn die Eingabespannung sinusförmig ist, dann gilt das auch für den resultierenden Strom. Dies zeigt sich darin, dass die Zeitabhängigkeit aus dem Ohmschen Gesetz herausfällt.

(6.3.72) Was ist, wenn die Eingabespannung **periodisch, nicht sinusförmig** ist? Nehmen wir an, sie sei die Summe zweier Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz, etwa $U_\sim(t) = U_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2}U_0 e^{2i\omega t}$. Beide Summanden beschreiben **einzeln** sinusförmige Vorgänge . Die Summe ist erneut eine periodische, aber nicht länger sinusförmige Funktion mit der Schwingungsdauer oder Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Nun kann man beweisen: Der von der Spannungssumme erzeugte Strom ist gleich der Summe der beiden Ströme, die von den Einzelspannungen erzeugt werden. (Formal: Der Übergang von der Spannung zum Strom ist linear.) Als Schaltung wählen wir das soeben in (6.3.70) berechnete Beispiel mit dem dort betimmten $Z = |Z|\, e^{i\delta}$.

Wir rechnen die Ströme einzeln aus und addieren sie dann. Zunächst in komplexer Form:

$$I_\sim(t) = I_{1\sim}(t) + I_{2\sim}(t) = \frac{U_0}{R}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}e^{i(\omega t+\delta(\omega))} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\omega}{\omega_2}\right)^2}}e^{i(2\omega+\delta(2\omega))}\right].$$

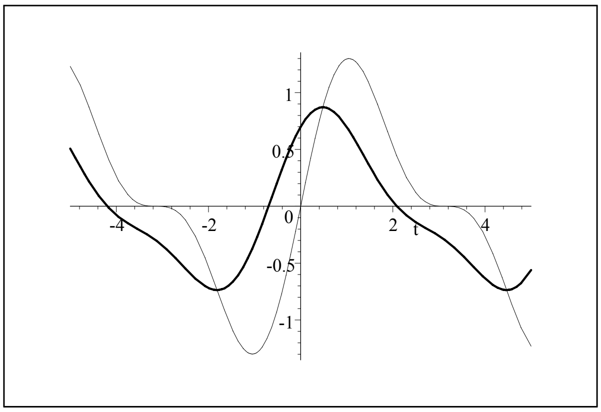
Das enthält keinen gemeinsamen Exponentialfaktor, den man ausklammern und fortkürzen könnte! Immer verbleibt eine Zeitabhängigkeit .

(6.3.73) Wir wählen jetzt speziell $\omega = \omega_2$.

Geht man in dieser Gleichung zum Imaginärteil über, also zu der reellen Strombeschreibung, so sieht man, dass der resultierende Strom eine **andere Form** als die eingegebene Spannung hat. (Man kann zeigen, dass man die übliche Zeitbeschreibung auch nach der Summenbildung durch Realteilbildung erhält.) Die Figur verdeutlicht die nicht mehr vorhandene Proportionalität. Der fette Graph zeigt die Stromstärke, der dünne die Spannung. Mit $\delta(\omega_2) = \arctan(1) = 0.7854$ und $\delta(2\omega_2) = \arctan(2) = 1.1071$ ergibt sich für den reellen Stromverlauf:

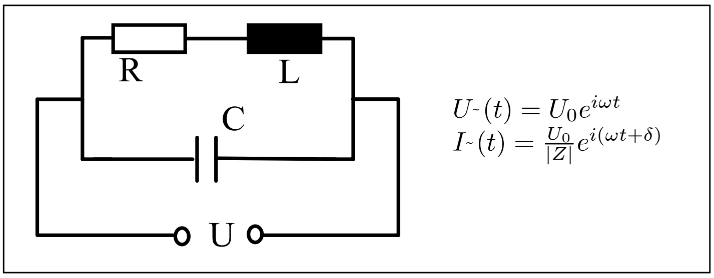
$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t + 0.7854) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t + 1.1071)\right]$$

☐ Wie lautet die Funktion für den reellen Spannungsverlauf?



6.3.4e Weiteres Beispiel: **Ein Schwingkreis**

(6.3.74) Wir betrachten den Schaltkreis der Skizze.



Zur oberen Strombahn gehört nach der Regel *Reihenschaltung* die Impedanz $Z_1 = R + i\omega L$, zur unteren gehört $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$. Die Parallelschaltungsregel gibt für die Gesamtimpedanz

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{R+i\omega L} + i\omega C \quad \text{oder} \quad Z = \frac{1}{\frac{1}{R+i\omega L}+i\omega C}}$$

Jetzt stehen wir vor der oben angeschnittenen Frage: Soll mit Z oder mit $\frac{1}{Z}$ gearbeitet werden? Wir rechnen einmal beide Wege durch.

(6.3.75) Der erste Weg. Die übliche Bruchrechnung sowie Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner gibt:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{R+i\omega L}{1+i\omega C(R+i\omega L)} = \frac{R+i\omega L}{(1-\omega^2 LC)+i\omega RC} \\ &= \frac{(R+i\omega L)\big((1-\omega^2 LC)-i\omega RC\big)}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2(RC)^2} \\ &= \frac{R(1-\omega^2 LC)+\omega^2 LRC + i\big(\omega L(1-\omega^2 LC)-\omega R^2 C\big)}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2(RC)^2} = \frac{R+i\omega\big(L(1-\omega^2 LC)-R^2 C\big)}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2(RC)^2} \end{aligned}$$

Das läßt sich durch die Einführung weiterer systembezogener Hilfsgrößen vereinfachen. Zunächst einmal liegt es nahe, $x = \omega\sqrt{LC}$ als systembezogene einheitenfreie Variable einzuführen. Überdies ziehen wir einen Faktor R vor den dann einheitenfreien Bruch. Damit folgt:

$$Z = Z(x) = R\frac{1 + i\frac{x}{\sqrt{LC}}\left[\frac{L}{R}(1-x^2) - RC\right]}{(1-x^2)^2 + x^2\frac{R^2C}{L}}$$

Inspektion dieses Ausdrucks legt die Einführung der einheitenfreien Hilfsgröße P mit $P^2 = \frac{R^2C}{L}$ nahe. Das gibt:

$$Z = R\frac{1 + ix\left[\frac{1}{P}(1-x^2) - P\right]}{(1-x^2)^2 + x^2P^2} = \frac{R}{P}\frac{P + ix\left[(1-x^2) - P^2\right]}{(1-x^2)^2 + x^2P^2}.$$

Und damit folgt unmittelbar

$$|Z| = \frac{R}{P}\frac{\sqrt{P^2 + x^2\left[(1-x^2) - P^2\right]^2}}{(1-x^2)^2 + x^2P^2} \qquad \text{sowie} \qquad \tan(\delta) = \frac{(1-x^2) - P^2}{P}.$$

Beachtet man, daß

$$P^2 + x^2\left[(1-x^2) - P^2\right]^2 = (P^2 + x^2)\left((1-x^2)^2 + x^2P^2\right) \quad \text{gilt,}$$

dann folgt schließlich noch

$$|Z| = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{P^2 + x^2}{(1-x^2)^2 + x^2P^2}}$$

(6.3.76) Jetzt der zweite Weg:

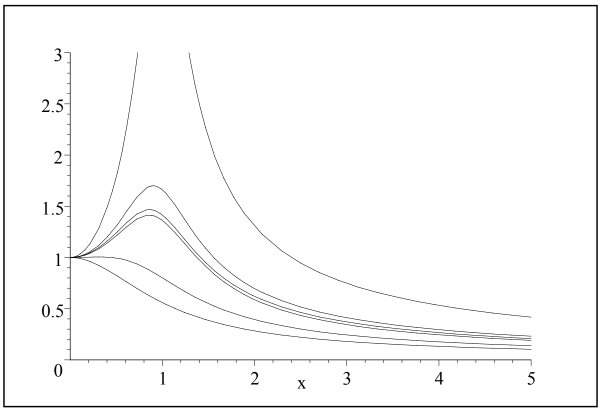
$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{(R - i\omega L) + i\omega C(R^2 + \omega^2L^2)}{R^2 + \omega^2L^2} \\ &= \frac{R + i\omega\left(CR^2 + \omega^2CL^2 - L\right)}{R^2 + \omega^2L^2}\end{aligned}$$

Dieser Teil ist deutlich kürzer! Der Rest der Rechnung erfordert vergleichbaren Aufwand. Einführen der systembezogener Einheiten gibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{R + i\left(xR^2\sqrt{\frac{C}{L}} + x^3\sqrt{\frac{L}{C}} - x\sqrt{\frac{L}{C}}\right)}{R^2 + x^2\frac{L}{C}} \\ &= \frac{P}{R}\frac{P + ix(P^2 + x^2 - 1)}{P^2 + x^2}\end{aligned}$$

Hieraus folgt der Rest analog.

(6.3.76) Die Funktionsschar hängt somit nichttrivial nur noch von dem **einen** Parameter P und der normierten Variablen x ab, was die Diskussion ernorm erleichtert. Ohne diese Hilfsgrößen hängt der Rechenausdruck von den drei Parametern R,L und C sowie von ω ab. Wir geben den Graphen von |Z|/R als Funktion von ω für einige P-Werte.



☐ Zur Verdeutlichung der Aufwandreduktion: Angenommen Sie diskutieren Z als Funktion von ω mit den drei äußeren Parametern R,L und C. Nehmen Sie an, Sie daß Sie für jede dieser Größe 20 verschiedene Werte betrachten wollen. Wieviel Graphen müssen Sie zeichnen und diskutieren? Wieviele sind es, wenn Sie die gegebenen Hilfsgrößen verwenden?

☐ Wieviele unterschiedliche Typen von Schaltungen kann man aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator aufbauen? Ihre Impedanzen lassen sich alle mit den hier beschriebenen Methoden rechnen.