****

Vorkurs Mathematik

F. Krause

Kapitel 5

Lineare Gleichungen

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Kap.5.1: **Das zugehörige Begriffssystem**

5.1.1: **Die Lösungsmenge**

(5.1.1) Eine Gleichung gehört immer zu einer Problemsituation der folgenden Art: Man hat eine Menge von Größen. Man sucht innerhalb dieser Menge bestimmte Elemente, die man jedoch noch nicht genau kennt. Aber man hat gewisse mathematisch formulierbare Bedingungen, die die gesuchten Elemente erfüllen müssen. Das Problem: **Bestimme - suche - alle Elemente, die die gestellten Bedingungen erfüllen.** (Vgl. (1.3.4)).
(5.1.2) In unserem Fall soll die Menge gleich der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen sein. Gesucht werden daher Objekte, die sich durch reelle Zahlen parametrisieren lassen. Sucht man etwa einen Punkt im Raum, so parametrisiert man ihn durch ein Koordinatensystem und sucht die drei Komponenten seines Koordinatenvektors. Die gesuchten Objekte werden zunächst bezeichnet und die bezeichnenden Buchstaben erhalten die Rolle von Unbestimmten.
(5.1.3) Und die Bedingungen sollen *linear* sein. Was das bedeutet, werden wir gleich genauer festlegen.

> Bitte prägen Sie sich ein: *Linear - nichtlinear* ist im mathematischen Bereich ein äußerst wichtiges Unterscheidungsmerkmal.

(5.1.4) Ein **Beispiel:** x und y mögen die Preise zweier Waren bezeichnen. Die Preise selbst seien aber nicht bekannt. Man kennt nur die Kassensummen von zwei Einkäufen. Etwa: 3 Pfund Kaffe und 7 Gummibärchen kosten 15 Euro. Und 4 Pfund Kaffe und 5 Gummibärchen kosten 33 Euro. Mit selbsterklärender Bezeichnungseinführung schreibt sich das:

$$\boxed{\begin{array}{c} 3x + 7y = 15 \\ 4x + 5y = 23 \end{array}}$$

(5.1.5) Die resultierende mathematische Gleichung als solche ist unabhängig von der dahinter stehenden inhaltlichen Bedeutung. So könnte man das soeben formulierte System auch als Schnittpunktsbestimmung zweier Geraden (in der Ebene) interpretieren.
Oder physikalisch: Ein Fahrzeug legt eine Strecke von 15m zurück. Dabei bewegt es sich mit zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Eine Geschwindigkeit hat es 3 Minuten lang inne und die zweite 7 Minuten lang. Usw.
T **(5.1.6)** *Linear* soll jetzt bedeuten, dass alle durch die Problemsituation festgelegten Unbestimmten (im zugehörigen Summanden) höchstens in der **ersten** Potenz auftauchen. Auch Produkte zweier Unbestimmter wie 2xy sind verboten. Konstante Summanden sind zugelassen. Dagegen ist $2x+3y^3 = 7$ nichtlinear.
Schnitte von Ebenen und Geraden führen offensichtlich immer auf lineare Gleichungen. Ist dagegen eine Flugparabel oder ein Kreis beteiligt, so erhält man nichtlineare Gleichungen.
(5.1.7) Als weiteres Besipiel schneiden wir zwei Geraden der Ebene, die durch Gleichungen festgelegt werden. Die erste durch die Gleichung $y = -x + m^2$ und die zweite durch $y = mx + b$. Zu bestimmen sind die Schnittpunktskoordinaten x_S und y_S. Sie erhalten die Rolle von Unbestimmten. Dagegen sind m und b äußere Parameter. Jede zugehörige Wertefestlegung (von m und b) ergibt zwei zugehörige Geraden und damit ein eigenes Schnittproblem. Wir erhalten das Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_S + x_S = m^2 \\ y_S - mx_S = b \end{array}}$$

Das ist ein lineares System (in x_S und y_S) mit zwei äußeren Parametern. Dass m quadratisch auftritt, stört die Linearität nicht. m ist ja äußerer Parameter, keine Unbestimmte.
Die Lösung dieses Problems kann **nie** $m = -1, b = 1$ lauten. Hier hat ein übler Verstoß gegen die ursprüngliche Rollenzuweisung stattgefunden.

☐ Diskutieren Sie das gegebene Geradenschnittproblem graphisch. Welche drei Fälle sind zu unterscheiden? Fertigen Sie für jeden dieser drei Fälle eine typische Skizze an.

T **(5.1.8)** Einige Verallgemeinerungen bieten sich unmittelbar an: So kann man m lineare Gleichungen (m=1,2,3,4,...) statt zwei Gleichungen betrachten. Und es können n Unbestimmte auftreten. Allgemein sprechen wir dann von einem $\boxed{\text{m}\times\text{n-System}}$. **Achtung**: Sofern nichts anderes gesagt ist, werden wir die Zahl der Gleichungen **immer** mit m, die der Unbestimmten mit n bezeichnen. Achten Sie darauf, das nicht zu verwechseln. (Mit dem m aus (5.1.7) hat das jetzige m daher nichts zu tun!)
Die Unbestimmten selbst müssen keineswegs immer mit x, y,.... bezeichnet werden. Es ist die jeweilige Problemsituation, die die mathematischen Rollen der beteiligten Symbole festlegt. Vgl. (1.8.10).
(5.1.9) Kehren wir zum Ausgangsproblem zurück. Was ist unter "*eine Lösung des Gleichungssystems* aus (5.1.4)" zu verstehen? Nun gesucht sind zwei Zahlen a und b (für x und y) mit vorgegebener Reihenfolge. Also ein Element (a,b)$\in \mathbb{R}^2$. Damit wir an den üblichen Matrixkalkül anknüpfen können, werden wir Tupel nicht mehr wie bisher schreibtechnisch komfortabel als **Zeilen** schreiben, sondern als **Spalten**! D.h. wir schreiben $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und nicht mehr (a,b). Für a=3 und b=7 etwa $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Unser System lautet leicht geändert

$$\boxed{\begin{array}{l} 3x + 7y = 25 \\ 4x + 5y = 33 \end{array}.}$$

Jetzt setzen wir 3 für x ein und 7 für y und **berechnen die linken Seiten.** Das gibt $3 \cdot 3 + 7 \cdot 7 = 58$ sowie $4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 47$, also keineswegs die von den Bedingungsgleichungen geforderten Werte 25 und 33. Und das bedeutet, dass $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ **keine Lösung** unseres Gleichungssystems ist. Nur bei Gleichheit hätte man eine Lösung gefunden. (Denken sie an die Unterscheidung der Rollen *Unbestimmte* und *Lösung (einer Gleichung)* in Kap. 1.8.2.)
T **(5.1.10)** Im Prinzip kann man durch diese Vergleichsoperation alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems erhalten:

$\Longrightarrow$	Man nimmt alle Elemente aus $\mathbb{R}^n$, wobei n die Zahl der Unbestimmten ist.
	Setzt die Komponenten in die linken Seiten ein und behält nur diejenigen Tupel, für die die Auswertung die geforderten Werte der rechten Seiten ergibt.
T	Die Gesamtheit der verbleibenden Tupel, der *Lösungen des Systems*, bildet die *Lösungsmenge.*
!	Die Lösungsmenge ist dann allgemein immer eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ haben wir vorzugsweise vektoriell mit Hilfe von Parametrisierungen beschrieben. **Man wird versuchen, auch die Lösungsmengen durch Parametrisierungen festzulegen, zumindest dann, wenn sie viele Elemente enthalten**.
(5.1.11) Bei unserer Vergleichsoperation haben wir bisher alle Elemente aus $\mathbb{R}^n$ zugelassen. Aber man kann das bei Bedarf auch ändern. Bei Preisen wird man etwa nur positve Werte zulassen. Und bei dem in (5.1.7) angegebenen Schnittproblem könnte man beispielsweise nach Schnittpunkten mit ganzzahligen Koordinaten suchen. Vgl. (5.1.1).

5.1b: **Die Festlegung eines linearen Gleichungssystems**

(5.1.12) Was benötigt man mindestens, um die in (5.1.10) beschriebene Vergleichoperation zur Lösungssuche durchführen zu können? Über was muss man verfügen?
(5.1.13) Wir kehren zum Beispiel zurück. Zunächst einmal muss man die vier Zahlen der linken Seite des Systems besitzen zusammen mit ihrer Reihenfolge und Lage. Es ist üblich, diese Information in einem rechteckigen Schema zusammenzufassen. Weiter benötigt man die beiden Zahlen der rechten Seite als Tupel. Schematisch:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3x + 7y = 25 \\ 4x + 5y = 33 \end{array} \text{ gibt } \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 25 \\ 33 \end{pmatrix}}.$$

Das Gleichungssystem erlaubt das Hinschreiben der beiden rechts stehenden Symbole. Und mit der darin enthaltenen Information kann man die beschriebene Operation zur Bestimmung der Lösungsmenge durchführen. **D.h. man benötigt letztlich die beiden rechts stehenden Symbole zur Festlegung des Gleichungssystems.**

(5.1.14) Allgemein benötigt man für ein m×n-Gleichungssystem ein rechteckiges Schema aus m (horizontalen) Zeilen und n (vertikalen) Spalten sowie einen Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^m$. Achtung: m nicht n. Damit hat das allgemeine m×n-System gerade $m \cdot (n+1)$ äußere Freiheitsgrade.

5.1c: **Matrizen**

(5.1.15) Angenommen man hat gewisse Objekte, die durch **zwei Eigenschaften** (mit jeweils endlich vielen Ausprägungen) charakterisiert werden. Etwa Autotypen, die durch die *Herstellerfirma* und die *Farbe* gekennzeichnet werden. Sagen wir drei Firmen M, VW und G sowie vier Farben g,r,b und w. Dann kann man sich alle denkbaren Möglichkeiten (Kombinationen) durch ein rechteckiges Schema verdeutlichen:

	g	r	w	b
M	T_{Mg}	T_{Mr}	T_{Mw}	T_{Mb}
VW	T_{VWg}	T_{VWr}	T_{VWw}	T_{VWb}
G	T_{Gg}	T_{Gr}	T_{Gw}	T_{Gb}

oder vereinfacht
$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir in der rechten Darstellung eine naheliegende Zahlcodierung der beiden Eigenschaften vorgenommen. Die T-s repräsentieren irgendeine weitere Eigenschaft, die zu der jeweiligen Kombination gehört. So könnte T_{Mr} etwa die Anzahl der betrachteten Fahrzeuge des Herstellers M der Farbe r sein. Eigentlich sollte man $T_{M,r}$ schreiben. Solange keine Verwechselungsgefahr besteht, läßt man das Komma fort. Man sollte natürlich nicht T_{254} schreiben.

T **(5.1.16)** Eine derartige Zusammenfassung von Größen, **die nach zwei Eigenschaften klassifiziert sind**, nennt man eine *Matrix*. Im Fall der linearen Gleichungen ist die erste Eigenschaft die Nummer der Gleichung und die zweite die Nummer der Unbestimmten!

Die Eintragungen nennt man die *Matrixkomponenten.* In unserem Fall sind das immer reelle Zahlen. Es können jedoch allgemein auch andere Objekte sein.

Weiter benutzt man bei Matrizen die folgenden Konventionen:

- Die horizontalen Reihen nennt man die *Zeilen* der Matrix.
- Die vertikalen Reihen nennt man die *Spalten* der Matrix
- Wird die gesamte Matrix mit M bezeichnet, so wird die Komponente der i-ten Zeile und der j-ten Spalte mit M_{ij} bezeichnet. (Also: Derselbe Buchstabe für Matrix und Komponente und auf die Reihenfolge i-j achten.)
- Ausgeschrieben sind folgende Schreibweisen üblich und zulässig, wobei bei der mittleren Schreibweise aus dem Zusammenhang klar sein muss, welche Werte die Zeilenzahl m und die spaltenzahl n haben sollen:
$$M = (M_{ij}) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & .... & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & .... & M_{2n} \\ : & : & & : \\ M_{m1} & M_{m2} & .... & M_{mn} \end{pmatrix}.$$

(5.1.17) Unzulässig und unsinnig ist dagegen eine Gleichung wie $M=M_{12}$ oder M_{ij}. Die Matrix ist die angeordnete Gesamtheit ihrer Komponenten, nicht etwa eine einzelne Komponente. Die gesamte Matrix als Schema kann nicht gleich einer individuellen Komponente sein. Vereinbarungsgemäß bezeichnet dagegen (M_{ij}) oder auch
$$(M_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,..,n}}$$
die gesamte Matrix, so daß $M=(M_{ij})$ sinnvoll und zulässig ist. Etwa $D=(D_{ij})$ mit $D_{ij} = i+j$ für $1 \leq i, j, \leq 3$.

☐ Schreiben sie die soeben definierte Matrix D aus. (Endform der Komponente D_{23} ist nicht etwa 2+3, sondern 5.)

- Zeilen- und Spaltenvektoren sind spezielle Matrizen mit nur einer Zeile bzw. Spalte. Daher ist $\vec{x}^K = (x_i)$ eine durchaus zulässige Gleichung.

(5.1.18) Damit haben wir einen allgemeinen und kurzen Formalismus, um ein lineares Gleichungssystem festzulegen und allgemein zu beschreiben:

> $\Longrightarrow$ Ein **lineares Gleichungssystem wird dadurch bestimmt**, dass man eine (reellwertige) $m \times n$-Matrix M vorgibt, die *Matrix des Systems* und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, den *Inhomogenitätenvektor des Systems.*

Für M und $\vec{b}$ sind natürlich fallspezifisch andere Bezeichnungen möglich. Worauf es ankommt, sind nur die jeweiligen Rollen.
(5.1.19) Hat man M und $\vec{b}$ vorgegeben, so kann man daraus leicht das Gleichungssystem rekonstruieren, nachdem man Bezeichnungen für die Unbestimmten gewählt hat, deren Zahl ja durch M fixiert ist. Ein Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ gibt } \boxed{\begin{array}{l} 1a + 2b + 3c + 5d = 3 \\ 0a - 1b + 0c + 2d = -2 \end{array}}$$

Hierbei haben wir die Unbestimmten mit a,b,c und d bezeichnet.

(5.1.20) Wir fassen jetzt auch die Unbestimmten zu einem Spaltentupel $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammen. **Dann können wir jedes lineare Gleichungssystem in der Form** $\boxed{M.\vec{x} = \vec{b}}$ **schreiben**. Links steht ein Produkt aus der Matrix M und dem Spaltenvektor $\vec{x}$. Das Ergebnis dieser Produktbildung (=Verknüpfung im Sinne von Kap.3.2.1) soll gerade die linke Seite des Gleichungssystems sein. Die Bildung erfolgt nach der leicht zu verstehenden Merkregel $\boxed{\textit{Zeile mal Spalte.}}$ Diese Konstruktion taucht immer wieder auf. Achten Sie darauf, die Konstruktion zu erfassen und zu beherrschen.

T **(5.1.21)** Das ursprüngliche System aus m Gleichungen wird somit vektoriell zu einer einzigen Gleichung $M.\vec{x} = \vec{b}$ zusammengefaßt. Für "lineares Gleichungssystem" sagen wir daher meist einfach weitgehend gleichwertig "lineare Gleichung". Will man unbedingt von einer Gleichung der herkömmlichen Art wie 2x+3y=4 sprechen, so kann man "skalare lineare Gleichung" sagen.

☐ Bringen Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrixform. Dabei sind x,y bzw x,y,z Unbestimmte.

x+y=3 y=2	x+y=0 2x+3y=0 x-y=0	x+1=2-y y+x=3x-2y 5+y=0	x+2y+z=1 y-x=2 z=3

☐ ■ Formulieren und lösen Sie jeweils einige Konkretisierungsaufgaben zur Regel "Zeile mal Spalte".

5.1d: **Zuordnungsinterpretation der Matrix**

(5.1.22) Was ist $\vec{x}$ mathematisch für ein Objekt? Ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$? Offenbar nicht ganz. Vielmehr durfte man dafür ja ein beliebiges Element aus $\mathbb{R}^n$ einsetzen. Was ist $M.\vec{x}$? Wir haben es mit derselben Art von Problemen zu tun, auf die wir bereits im Zusammenhang mit dem Verknüpfungsbegriff in Kap. 3.2.1 gestoßen sind. Und wir lösen sie analog zu dem damaligen Vorgehen. **Wir interpretieren M als eine Zuordnung** $\vec{x} \longmapsto M.\vec{x}$, die aus einem beliebigen Vektor $\vec{x}$ aus $\mathbb{R}^n$ einen neuen Vektor $\vec{y}$ aus $\mathbb{R}^m$ macht, wobei gilt $\vec{y} = M.\vec{x}$. Und die rechte Seite wird nach der Regel *Zeile mal Spalte* berechnet. Eigentlich ist $M(\vec{x})$ zu schreiben. Aber diese "von-Klammer" wird zur Klammerersparnis fortgelassen, soweit dadurch keine Probleme entstehen. Verwechseln kann man beispielsweise $M(\vec{a} + \vec{b})$ und $M\vec{a} + \vec{b}$, wenn man die Klammer fortläßt. (Erläutern Sie sich das durch Verlaufsdiagramme.) Wir schreiben jetzt auch kurz $M\vec{x}$ statt $M.\vec{x}$.

(5.1.23) Ein Beispiel:

M	$\vec{x} \mapsto M\vec{x}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1w+2x+3y+5z \\ 0w-1x+0y+2z \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-4+12+5 \\ 0+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

(5.1.24) Wir sehen:

> Die Matrix M erklärt ein Verfahren, das jedem Vektor aus $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ (hier n=4) einen neuen Vektor aus $\mathbb{R}^m$ zuordnet (hier m=2) , der mit M$\vec{a}$ bezeichnet wird.
> Wir schreiben dies in Zuordnungsschreibweise $M : \vec{x} \mapsto M\vec{x}$.
> Die Lösungen des Gleichungssystems $M\vec{x} = \vec{b}$ sind dann alle Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, für die $M\vec{a} = \vec{b}$ gilt, wobei die linke Seite über die Zuordnung erklärt wird und die rechte Seite der vorgegebene Inhomogenitätenvektor der Gleichung ist.
> Die Gesamtheit aller so entstehende Lösungen bildet die **Lösungsmenge (der Gleichung)**. Die Lösungsmenge kann leer sein.

Die eingeführte Matrixzuordnung erweist sich auch in geometrischer Hinsicht als sehr nützlich und wichtig, wie wir noch sehen werden.
(5.1.25) Treten in der Matrix M oder im Inhomogenitätenvektor $\vec{b}$ allgemeine Buchstaben auf, so sind die in der Regel als äußere Parameter zu interpretieren, keinesfalls als Unbestimmte. Jede zugehörige Wertewahl führt zu einem eigenen Gleichungssystem. Das $2 \times 2-$System aus (5.1.7) etwa schreibt sich in Matrixform wie folgt:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 \\ b \end{pmatrix}}$$

(5.1.26) Die eingeführte Zuordnung $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ erfüllt einige Rechenregeln, die sich später als ausgesprochen nützlich erweisen. Nach unserem Rollenkonzept kann $\vec{x}$ auch als freie Variable interpretiert werden. Vgl. (1.8.13), d.h. man darf für $\vec{x}$ zusammengesetzte Vektorterme einsetzen. Etwa $(\alpha\vec{a}) \mapsto M(\alpha\vec{a})$ oder $(\vec{a}+\vec{b}) \mapsto M(\vec{a}+\vec{b})$ oder auch $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) \mapsto M(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})$. Hier sind die von-Klammern zu setzen! Rechts stehen Bezeichnungen für die resultierenden Ausgabevektoren. Diese drei Ausgabevektoren lassen sich nun aber noch auf einen zweite Weise berechnen.
(5.1.27) Genauer gelten stets die folgenden *Linearitätsregeln:*

$$\boxed{\begin{array}{l} M(\alpha\vec{a}) = \alpha M\vec{a} \\ M(\vec{a}+\vec{b}) = M\vec{a} + M\vec{b} \\ M(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha M\vec{a} + \beta M\vec{b} \end{array}}$$

(5.1.28) Inspizieren wir die erste dieser Formeln genauer: α ist Zahl und $\vec{a}$ Vektor aus $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\alpha\vec{a}$ erneut Vektor aus $\mathbb{R}^n$ Das ist unser früheres $\alpha \odot \vec{a}$ für den $\mathbb{R}^n$. M verarbeitet jeden Vektor dieses Raumes, insbesondere $\alpha \odot \vec{a}$, und macht daraus einen Vektor aus $\mathbb{R}^m$, der mit $M(\alpha\vec{a})$ bezeichnet ist. $\alpha M\vec{a}$ dagegen ist wie folgt zu interpretieren: Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ wird durch M zu einem Vektor $M\vec{a}$ aus $\mathbb{R}^m$. Beachten Sie m, nicht n! Und dieser Vektor wird mit dem Skalar α multipliziert. Das Ergebnis ist erneut ein Vektor aus $\mathbb{R}^m$. Die Formel sagt, dass beide Rechenwege dasselbe Resultat ergeben!
☐ Interpretieren Sie die beiden anderen Formeln entsprechend. Wie sind die auftretenden + Zeichen zu verstehen? So ist das + aus $\vec{a}+\vec{b}$ das $\boxplus$ aus $\mathbb{R}^n$.

(5.1.29) Wieso gelten diese Formeln? Wir illustrieren den Nachweis der ersten Gleichung am Beispiel der allgemeinen 2×3-Matrix. Wir haben die Umformungen durchnumeriert und gehen sie sorgfältiger durch:

$$M(\alpha\vec{x}) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} M_{11}\alpha x_1 + M_{12}\alpha x_2 + M_{13}\alpha x_3 \\ M_{11}\alpha x_1 + M_{12}\alpha x_2 + M_{13}\alpha x_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} \alpha(M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3) \\ \alpha(M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3) \end{pmatrix} \overset{(4)}{=} \alpha \begin{pmatrix} M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3 \\ M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3 \end{pmatrix} \overset{(5)}{=} \alpha M\vec{x}$$

$\overset{(1)}{=}$ Ausschreiben von M($\alpha\vec{x}$) in Komponentenform mit den eingeführten Bezeichnungen. $\alpha\vec{x}$ hat die angegebenen Komponenten als komponentenweise Multiplikation mit α.

$\overset{(2)}{=}$ Ausführen des Matrixproduktes nach der Regel *Zeile mal Spalte.* Kurz: Die linke Seite des Gleichungssystems wird ausgeschrieben.

$\overset{(3)}{=}$ In jeder Komponente wird α ausgeklammert. Das ist möglich, weil jeder Summand genau ein α enthält. Die Rechnungen erfolgen vollständig in $\mathbb{R}$.

$\overset{(4)}{=}$ Nach der Definition von $\alpha\vec{y}$ in den Tupelräumen $\mathbb{R}^n$ darf man α vorziehen!

$\overset{(5)}{=}$ Bezeichnungsnutzung.

Bis auf Schritt (3) werden praktisch nur Definitionen und Schreibweisen gezielt eingesetzt. Im entscheidenden Schritt (3) wird das Distributivgesetz für reelle Zahlen benutzt, um α in jeder Komponente auszuklammern. Offenbar ist dieser Schritt (ebenso wie das Ausschreiben der Definitionen) problemlos auf n Summanden und m Gleichungen verallgemeinerbar. In kurzer Charakterisierung: *Die Vektorregel wird auf Rechenregeln für Zahlen zurückgeführt.* Diese Rückführung erweist sich in vielen Fällen als nützliche Strategie

☐ Beweisen Sie analog die zweite Regel $M(\vec{a}+\vec{b}) = M\vec{a} + M\vec{b}$.

☐ Die dritte oben gegebene Regel folgt jetzt aus den beiden vorangegangenen, ja ist zu ihnen gleichwertig. D.h. die beiden anderen folgen aus ihr. Begründen Sie das.

(5.1.30) Die drei hergeleiteten Regeln bilden die Grundlage der *linearen Algebra* und sind entsprechend wichtig. Auch wir werden sie in Kap. 5.3, etwa in (5.3.21), bei der Diskussion der allgemeinen Eigenschaften der Lösungsmenge nutzen. Die angegebenen Eigenschaften werden meist durch das Stichwort *Linearität* charakterisiert. Es ist keineswegs eine Selbstverständlichkeit, dass sie gelten. So ist etwa $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Das Wurzelziehen ist nicht linear.

☐ Wir betrachten das folgende Gleichungssystem und schreiben es mit Hilfe der Regel "Zeile×Spalte" in Matrixform. Dabei seien x und y Unbestimmte und m äußerer Parameter.

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + my = 3 \\ x + 2y^2 = m \end{array}} \qquad \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix}$$

Diese Umformung ist als solche korrekt, verstößt aber gegen eine Vereinbarung, die wir im Zusammenhang mit den linearen Gleichungen getroffen haben. Welche Vereinbarung ist das? Diese Vereinbarung dürfen wir auch nicht fortlassen. Zeigen Sie, dass jetzt die Linearität nicht gelten würde. Und wie steht es mit (5.1.10)?

(5.1.31) Fassen wir unseren gegenwärtigen **Wissensstand** zusammen:

- Wir haben gesehen, wie und warum Anwendungssituationen zu (linearen) Gleichungssystemen führen.
- Wir wissen, wie man ein m×n-System festlegt: Durch die Matrix M des System und den Inhomogenitätenvektor $\vec{b}$. Die Bestimmungsgleichung schreibt sich einheitlich in der Form $M\vec{x} = \vec{b}$.
- Das mit der Bestimmungsgleichung verbundene Problem ist die Bestimmung der Lösungsmenge. Diese wird durch Angabe ihrer Elemente festgelegt. Das sind alle *Lösungen der Gleichung*, d.h. alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, die $M\vec{a} = \vec{b}$ erfüllen. (Unterschied der Rollen *Lösung* und *Unbestimmte*!)
- Die Lösungsmenge ist jeweils eine wohlbestimmte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir wollen sie mit $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{M,\vec{b}}$ bezeichnen. Die zweite Schreibweise deutet an, dass diese Menge von den beiden Vorgabegrößen M und $\vec{b}$ abhängt, ja durch sie festgelegt wird.

- Die Matrizen linearer Gleichungssysteme sind als vektoriell Zuordnungen $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ zu interpretieren, die generell die angegebenen Linearitätsregeln erfüllen.

Kap.5.2: **Ein Lösungskalkül**

(5.2.1) Wie bestimmt man für ein konkret gegebenes System die Lösungsmenge? Im Prinzip, durch das in (5.1.10) beschriebene aschenputtelartige Probierverfahren: *Die guten ins* $\mathbb{L}-$ *Töpfchen, die schlechten ins komplementäre Aus.* Aber das ist nur selten praktikabel. Es gibt einfach zu viele durchzuprobierende Tupel. Schematische Verfahren, die die Lösungsmenge mit **endlich** vielen Schritten produzieren, nennen wir *Lösungsverfahren* oder *Lösungskalküle.*
(5.2.2) Zunächst könnte man versuchen, auch für die allgemeine lineare Gleichung $M\vec{x} = \vec{b}$ eine **Lösungsformel** anzugeben, analog zur p-q-Formel im Fall der quadratischen Gleichung. Dieser Weg erweist sich jedoch als problematisch. Zum einen ist eine Unzahl von Fallunterscheidungen erforderlich. Und in den Fällen, in denen eine einfache Formel existiert ($n \times n - System$ mit eindeutiger Lösung) erweist sich die konkrete Formelauswertung ab n=3 als ausgesprochen mühsam und langwierig. (Die zugehörige Lösungsformel läuft unter dem Namen *Cramers Regel.*) Es ist daher besser, mit Lösungs**verfahren** zu arbeiten, die am Ende jeweils die richtigen Lösungen produzieren.
(5.2.3) Auch das Arbeiten mit den Verfahren ist teilweise recht arbeitsaufwendig. Die modernen Computeralgebrasysteme nehmen einem zum Glück die Rechenarbeit weitgehend ab. Um mit diesen Programmen jedoch sinnvoll arbeiten zu können, sollte man angemessene abstrakte Kenntnisse über die Struktur der Lösungsmenge und die Probleme, die beim Lösungsprozess auftreten, besitzen. Also letztlich all das, was im vorliegenden Kapitel vermittelt wird.
(5.2.4) Sprachlich missbräuchlich ist es vielfach üblich, unter *Lösung der Gleichung* je nach Bedarf die Lösungsmenge oder die Anwendung eines Lösungsverfahrens (zur Gewinnung der Lösungsmenge) zu verstehen. Zur Erzeugung eines tieferen Verständnisses sollten Sie beides zunächst sorgfältig auseinander halten! Und noch weiter: Untergründig schwelt immer die Vorstellung, eine anständige Gleichung habe genau eine Lösung. Dann ist die Lösungsmenge einelementig und *Lösung* bezeichnet dann auch noch dieses eine Element. (Die Lösung der Gleichung ergibt die Lösung und das ist die Lösung.)
(5.2.5) Es gibt zahlreiche Lösungsverfahren mit unterschiedlichen Eigenschaften. Und damit auch Beurteilungskriterien, unter welchen Umständen welches Verfahren besonders nützlich ist. Wir wollen hier eine Verfahren vorstellen, das eine Reihe von Vorteilen aufweist:

- Es ist von der Schreibarbeit her kurz, vermeidet Unnötiges.
- Es läßt sich vielfach problemlos auf nichtlineare Systeme verallgemeinern.
- Man kann gut fallspezifische Eigenheiten eines Systems bei der Rechnung einbringen und zur Abkürzung der Rechnung und zum Aufffinden fallspezifischer Eigenschaften verwenden.

In der Schule werden (heutzutage) vielfach Verfahren gelehrt, die diese Vorteile nicht haben, dafür schematischer ablaufen. Bearbeiter des Kurses stehen daher vor dem Dilemma, ob sie beim alten schulischen Verfahren bleiben oder ob sie sich der Mühe unterziehen sollen, das neue zu lernen. Wollen Sie persönlich beim alten bleiben, sollten sie den folgenden Test machen:

> Können Sie die folgenden beiden Gleichungssysteme lösen, sagt Ihnen Ihre schulisches Vorwissen, wie Sie das zu machen haben? Wenn Sie die Lösung nicht mit erträglichem Aufwand schaffen, sollten Sie sich doch um das anschließend beschriebene Verfahren bemühen (a,b,c,d jeweils Unbestimmte!)

$$\boxed{\begin{array}{c} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} a^2+bc=a \\ ab+bd=b \\ ac+dc=c \\ cb+d^2=d \end{array}}$$

T **(5.2.6)** Wir nennen das vorzustellende Verfahren *Eliminationsverfahren,* weil in einer Reihe aufeinanderfolgender Schritte Unbestimmte hinausgeworfen - eliminiert werden - wobei jeweils **kleinere Systeme** entstehen, bis man am Ende bei einer einzigen Gleichung angelangt ist. In einem zweiten Schrittfolge muss man dann rückwärtsgehend die eliminierten Unbestimmten festlegen.
(5.2.7) Als Ergebnis erhält man je nach Fall die eindeutige Lösung oder eine Parametrisierung der (größeren) Lösungsmenge. Beachten Sie bereits jetzt: Gesucht ist die Lösungsmenge als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ein und

dieselbe Menge kann viele Parametrisierungen haben. Auch kann die Lösungsmenge leer sein, weil das System unlösbar ist.

Die Eliminationsschritte:
Bei jedem Eliminationsschritt wird eine Unbestimmte ausgewählt, die (mindestens) aus dem nachfolgenden System herausfallen soll. Dies wird meist durch die üblichen Kombinationsbildungen der Gleichungen bewirkt. Keine Gleichung darf dabei vergessen werden. Triviale Gleichungen dürfen fortgelassen werden.
Das **Ergebnis jedes Eliminationsschrittes** ist ein neues Gleichungssystem mit mindestens einer Unbestimmten weniger und mindestens einer Gleichung weniger.
Ende der Elimination:
Nach endlich vielen Schritten gelangt man zu einem Sytem **mit einer einzigen Gleichung** mit mindestens einer Unbestimmten oder einem unlösbaren System..
Ist die verbleibende Gleichung lösbar, löst man nach einer (zu wählenden) Unbestimmten auf. Die übrigen Unbestimmten dieser Gleichung erhalten per Rollenwechsel die Rolle freier Parameter!
Das Rückeinsetzen:
Jetzt geht man zum jeweils vorangegengenen System zurück und wählt eine Gleichung dieses Systems, die man besonders gut nach einer (bei diesem Schritt) herausgeworfenen Unbestimmten auflösen kann. Das ergibt diese Unbestimmte. Sind weitere Unbestimmte mit herausgefallen, so werden diese per Rollenwechsel zu freien Parametern gemacht.
Die Endform:
Nach dem letzten Rückeinsetzungsschritt faßt man die erhaltenen Lösungsgleichungen zu einem Tupel zusammen. Sind freie Parameter vorhanden, wird man das Tupel auch in die geometrische Form bringen.
Vergleich mit der Aufgabenstellung, eventuell Probe.

(5.2.8) Man verrechnet sich besonders bei der Elimination und dem Rückeinsetzen leicht. Meist ist es dann besser, die alte Rechnung zumindest teilweise zu korrigieren und **nicht** alles neu zu rechnen. Daher sollte man erkennen können, was man in den einzelnen Schritten gemacht hat. Die nachfolgenden Beispiele zeigen selbsterklärend, wie das geht.
(5.2.9) Bitte setzen Sie sich vor dem Durcharbeiten der Beispiele mit der Schemabbeschreibung in (5.2.7) gründlich und mehrfach auseinander. Üben sie *abstrakt* und nicht erst durch Nachvollzug der Beispiele, zu lernen. Und beim Selberrechnen von Beispielen dann nicht eine Vielzahl unnötiger Zwischenschritte hinschreiben , etwa 100-99 statt gleich 1. Oder 28y-15y statt 13y usw. Auch nie ay-2y statt gleich (a-2)y.
Der Pfeil $\downarrow$ zeigt die jeweils zu eliminierende Variable an. 4(1)-3(2) sagt: 4 mal die erste Gleichung minus 3 mal die zweite. Vermeiden Sie bei der Elimination das vorzeitige Entstehen von Brüchen, ja beseitigen Sie möglichst anfängliche Brüche in den Koeffizienten.
(5.2.10) Erstes Beispiel:

$3\overset{\downarrow}{x}+7y=25$	+4(1)-3(2)
4x+5y=33	

$\rightarrow$ 13y=1

$\underline{\underline{x=\frac{106}{13}}}$ $\longleftarrow$ $\underline{\underline{y=\frac{1}{13}}}$ $\underline{\underline{\vec{x}_L=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}106\\1\end{pmatrix}}}$

Wir haben eine eindeutige Lösung ohne freien Parameter!
Jetzt als zweites Beispiel ein 2×4-System.

$1a + 2b + 3c + 5d = 3$ $0a - 1b + 0c + 2d = -2$ +1(1)+2(2)	$\longrightarrow \boxed{a + 3c + 9d = -1}$
$\underline{\underline{b = 2 + 2d}} \quad \longleftarrow$	$\underline{\underline{a = -1 - 3c - 3d}} \qquad \underline{\underline{c, d \quad frei}}$
$\vec{x}_L(c,d) = \begin{pmatrix} -1 - 3c - 3d \\ 2 + 2d \\ c \\ d \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Lösungsmenge enthält zwei freie Parameter. Geometrisch beschreibt sie eine Ebene im vierdimensionalen Raum.

(5.2.11) Jetzt ein 3×3-System. Hier benötigt man zwei Eliminationsschritte. Der erste Schritt erläutert, was die Forderung "Keine Gleichung darf vergessen werden" besagt. Man darf nicht etwa zweimal die Gleichung 2(1)-(2) bilden. Dann wäre (3) "vergessen".

$x + 3y - 2z = 1$ $2x - 2y + z = 2$ $3x + y + 2z = 0$ 2(1)-(2) 3(1)-(3) $\;\rightarrow$	$8y - 5z = 0$ $8y - 8z = 3$ (1)-(2) $\;\rightarrow$	$3z = -3$ $\downarrow$
$x = 1 - 3(-\frac{5}{8}) + 2(-1)$ $\underline{\underline{x = \frac{7}{8}}}$	$8y - 8(-1) = 3$ $\underline{\underline{y=-\frac{5}{8}}}$ $\longleftarrow$	$\underline{\underline{z = -1}}$
$\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}}$		

Erneut liegt eine eindeutige Lösung (=einelementige Lösungsmenge) vor
Jetzt ändern wir das letzte System etwas ab,

$x + 3y - 2z = 1$ $2x - 2y + 4z = 2$ $3x + y + 2z = 0$	2(1)-(2) 3(1)-(3)	$\rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix}\text{8y-8z=0}\\ \text{8y-8z=3}\end{matrix}}$

Das System ist **unlösbar**, da 8y-8z nur einen Wert haben kann!

(5.2.12) Als nächstes betrachten wir ein System mit äußeren Parametern. Wir gehen das Schema durch und achten darauf, ob bei der allgemeinen Rechnung Probleme entstehen. Während man bisher so vorging, dass man jeweils diejenigen Variablen hinauswarf, die zu den kleinsten Multiplikationszahlen führten, sollte man jetzt möglichst Unbestimmte hinauswerfen, deren Faktoren keine äußeren Parameter enthalten. Irgendwann läßt sich das aber nicht mehr vermeiden.

Der erste Schritt geht wie bisher:

$$\boxed{\begin{matrix} y_S + x_S = m^2 \\ y_S - m x_S = b \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{(1+m)x_S = m^2 - b}$$

Jetzt möchte man nach der Unbestimmten x_S auflösen. Aber das ist problematisch, erfordert eine **Fallunterscheidung je nach Wert der äußeren Parameter!** Vgl. auch Kap.4.6.3.

- Ist $m \neq -1$, dann kann man dividieren und erhält $x_S = \frac{1}{1+m}(m^2 - b)$. Rückeinsetzen gibt auch y_S. Insgesamt folgt mit etwas Bruchrechnung

$$\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m^2 - b \\ m^3 + b \end{pmatrix} \quad \text{für } m \neq -1.}$$

- Ist m=-1, so lautet die letzte Gleichung $\boxed{0x_S = 1-b}$. **Gesucht sind alle x_S die diese Gleichung erfüllen.** Inspektion zeigt, dass eine weitere Fallunterscheidung erforderlich ist:
  - Ist $b \neq 1$, dann ist die Gleichung unlösbar. Und damit ist das gesamte Gleichungssystem unlösbar.

    $$\boxed{\text{System unlösbar, wenn } m=-1 \text{ und } b\neq 1.}$$

  - Ist zusätzlich $b=1$, lautet die Gleichung $\boxed{0x_S = 0}$. Und dafür ist jedes x_S Lösung, d.h. x_S ist freier Parameter! Rückeinsetzen (mit $-m=b=1$) gibt $y_S = 1-x_S$. Insgesamt:

    $$\boxed{\vec{x}_L(x_S) = \begin{pmatrix} x_S \\ 1-x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_S \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für b=1 und m=-1.}}$$

☐ Interpretieren Sie die drei Fälle im Rahmen der Schnittpunktsinterpretation des Gleichungssystems.
(5.2.13) Das Beispiel ist typisch für die Probleme, die beim Vorhandensein äußerer Parameter im Gleichungssystem auftauchen. Man gelangt zu einer Gleichung der Form Ax=B, wobei x Unbestimmte und A und B Terme sind, die von den äußeren Parametern abhängen können. Dann muss man prüfen, ob Fälle mit A=0 möglich sind! Diese sind gesondert zu behandeln, da dann nicht durch A dividiert werden darf. Je nachdem ob auch B=0 gilt oder nicht, ist eine weitere Unterscheidung erforderlich. Es wird dringend empfohlen, die Gleichungen für die Sonderfälle mit eingesetzten Parameterwerten erneut **hinzuschreiben** und zu **inspizieren**, ob es Lösungen gibt.
(5.2.14) Wir haben es mit einer **Verzweigung des Lösungsweges** zu tun. Das Endergebnis ist eine **verzweigte Lösungsformel**, die sich jedoch manchmal wieder zu einem einzigen Ausdruck zusammenfassen läßt. Jede zulässige Werteinsetzung der äußeren Parameter muss dann zu einer bestimmten Lösung führen.
(5.2.15) Im Verlaufe der Eliminationsprozedur hat man eine Reihe von Wahlmöglichkeiten. Was bedeutet es, wenn man eine andere Wahl trifft, etwa in einem Schritt eine andere Unbestimmte eliminiert oder beim Rückeinsetzen eine andere Gleichung wählt? **Man erhält dann unter Umständen eine andere Parametrisierung derselben Lösungsmenge.** Unterschiedliche Wege können zu unterschiedlichen Parametrisierungen führen. Testen wir das an einem Beispiel:
In dem folgenden System liegt es nahe, zunächst z zu eliminieren:

3x+2y+$\overset{\downarrow}{z}$=0 2x+y - z =-2	(1)+(2)

$\longrightarrow \boxed{5x+3y=-2}$ $\quad \underline{\underline{\text{y frei}}}$ und $\underline{\underline{\text{x=-}\tfrac{1}{5}\text{(2+3y)}}}$

$\underline{\underline{z = \frac{1}{5}(6-y)}}$ $\quad \vec{x}_L(y) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2-3y \\ y \\ 6+11y \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}y\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Jetzt eliminieren wir alternativ im ersten Schritt y.

3x+2$\overset{\downarrow}{y}$+z=0 2x+y-z=-2	(1)-2(2)

$\longrightarrow \boxed{\text{-x+3z=+4}}$ $\quad \underline{\underline{z \;\; frei}}$ und $\underline{\underline{x = 3z-4}}$

$\underline{\underline{y = -5z+6}}$ $\quad \vec{y}_L(z) = \begin{pmatrix} 3z-4 \\ -5z+6 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Richtungen der beiden Geraden sind offensichtlich dieselben. Gehen Sie aber auch durch denselben Punkt? Wir finden $\vec{y}_L(\frac{6}{5}) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Und das ist gerade der Aufpunkt der ersten Parametrisierung.
Beide Lösungswege ergeben dieselbe Lösungsmenge, aber über unterschiedliche Parametrisierungen.
Das erfolgreiche Beispiel ist natürlich kein allgemeiner Beweis, dass die beschriebene Prozedur immer dieselbe und auch die vollständige Löungsmenge liefert. ein solcher Beweis erfordert mehr Formalismus und wird im Rahmen der linearen Algebra nachgeholt.
(5.2.16) Die Matrixform $M\vec{x} = \vec{b}$ gehört zur Normalform eines linearen Gleichungssystems: Alle Terme mit Unbestimmten kommen auf die linke Seite und dort in die gewählte Reihenfolge. Alle Summanden

ohne Unbestimmte auf die rechte Seite, um so den Inhomogenitätsvektor $\vec{b}$ aufzubauen. Diese Form ist für allgemeine Überlegungen wie wir sie im nächsten Teil durchführen werden, wichtig. Für unser Elimination-schema ist sie jedoch nicht erforderlich. Um angemessen bilanzieren zu können, sollten nur immer gleiche Unbestimmte untereinander stehen. Im Falle von Schnittmengengleichungen etwa ist es eher sinnvoll, die Unbestimmten auf ihrer jeweiligen Seite zu belassen und nur die konstanten Terme zusammenzufassen. Das haben wir in unseren früheren Beispielen auch so gemacht. Vgl. etwa (4.6.6).

(5.2.17) Wie steht es mit dem Übergang zu nichtlinearen Gleichungen? Man behält das Schema bei, nur dass man die Art des Hinauswerfens der Unbestimmten abändern muss. Meist löst man eine der Gleichungen nach der hinauszuwerfenden Unbestimmten auf und setzt einfach in die übrigen Gleichungen ein. Der Rest des Vorgehens kann weitgehend übernommen werden. Erproben Sie das an den beiden Testbeispielen aus (5.2.5).

Kap.5.3: **Allgemeine Resultate**

(5.3.1) Vielfach ist es möglich, **Aussagen über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu machen, ohne die Lösungen selbst zu kennen.** Diese Aussagen gelten entweder generell für alle linearen Gleichungssysteme (im Gegensatz zu nichtlinearen) oder man kann die Gültigkeit über eine Auswertung der beiden Eingabegrößen M und $\vec{b}$ gewinnen, ohne dass man die Lösungen selbst bestimmt muss. Die angesprochenen Eigenschaften erweisen sich als ausgesprochen nützlich. (Beispiel dazu in (5.3.16)).

> *Bei der Diskussion dieser Eigenschaften geht die Vektorrechnung nicht nur wie bisher als reine Beschreibungshilfe ein. Vielmehr werden wir sehen, dass unserer Zentralformel (mit eventuell veränderter Summandenzahl) erneut herausragende, eben **zentrale** Bedeutung zukommt.*

(5.3.2) Um was für Aussagen geht es? Ein erstes wichtiges Merkmal einer Lösungsmenge ist deren "Größe". Oder auch: *Wieviele Lösungen hat das System?* Eine quadratische Gleichung hat in der Regel zwei Lösungen, nie aber drei. Wie steht es mit den linearen Gleichungen. **Denkbar** ist zunächst jede Anzahl. Wir haben bereits Beispiele mit unendlich vielen Lösungen gefunden. Und im Falle unendlich vieler Lösungen kann man nach der Zahl der Freiheitsgrade, der Zahl der zur Festlegung benötigten Zahlangaben fragen. Beispiele mit einem und mit zwei freien Parametern sind vorgekommen. Das nachfolgende Schema stellt die zunächst denkbaren Möglichkeiten zusammen. Lösungszahl 0 bedeutet *unlösbares System.* Und "Sonstige" steht für nicht parametrisierbare Lösungsmengen, für die man dann auch keine Zahl von Freiheitsgraden angeben kann.

Lösungszahl	Freiheitsgrade
0	0
1	0
2	0
3	0
:	0
$\infty \longrightarrow$	1 2 3 : ∞ *Sonstige*

⇓ Es wird sich zeigen, dass die meisten dieser zunächst denkbaren Fälle **nicht vorkommen können**. So gibt es kein lineares Gleichungssystem, das genau 2 oder 3 Lösungen besitzt. Ja, findet man zwei verschiedene Lösungen, dann muss es unendlich viele geben.

⇓ Die Vektorrechnung bietet eine weitere unterstützende Hilfe zur Analyse der Lösungsmengen. Wir wählen n=3, also drei Unbestimmte. Dann ist die Lösungsmenge stets Teil des $\mathbb{R}^3$. Wir interpretieren diesen Raum als einen $\mathbb{R}^3_K$, interpretieren also alle Lösungen als Koordinatenvektoren und fragen nach der geometrischen Figur, die so durch $\mathbb{L}$ beschrieben wird. Obwohl man sich nun eine unglaubliche Menge räumlicher Figuren vorstellen kann, werden wir sehen, dass die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme in geometrischer Interpretation stets einige wenige alte Bekannte ergeben.

T **(5.3.3)** Wir beginnen mit einer für die allgemeinen Überlegungen zentralen Definition:

> Ein lineares Gleichungssystem heißt *homogen,* wenn sein Inhomogentätenvektor der Nullvektor ist. Also $\vec{b} = \vec{0}$. Oder auch $M\vec{x} = \vec{0}$.
> Andernfalls ($\vec{b} \neq \vec{0}$) heißt das System *inhomogen.*

Bei einem homogenen System müssen **alle** Komponenten b_i des Inhomogenitätenvektors $\vec{b} = (b_i)$ Null sein. Ist nur eine einzige Komponente ungleich Null, liegt ein inhomomgenes System vor. Denken Sie daran, dass $\vec{b}$ aus der Normalform abzulesen ist. Die Gleichung 2(x+1)+2y+3=x+5 ist homogen trotz der vorhandenen konstanten Terme. Die ergeben zusammengefaßt nämlich eine Null.

(5.3.4) Wieso ist die Aussonderung der homogenen Gleichungssysteme so nützlich? Nun, für homogene Gleichungen kann man besonders leicht allgemeine Aussagen über die Lösungsmengenstruktur gewinnen.

Und mit den dabei gewonnenen Resultaten kann man anschließend das allgemeine (inhomogene) Problem knacken.
(5.3.5) Einige einfachste konkretisierende Beispiele homogener Systeme:

2x+3y=0	2x+3y=0 x-y=0	x+y+z=0 x-z=0	x+y=0 2x+2y=0 3x+3y=0

☐ Wie groß sind die charakterisierenden Zahlen m und n für diese 4 Systeme?

5.3a: **Die Lösungsmengen homogener Gleichungssysteme**

! **(5.3.6)** Sei also M$\vec{x}=\vec{0}$ irgendein homogenes System. Eine erste Beobachtung ist: **Ein homogenes System ist nie unlösbar.** Denn der Nullvektor ist immer eine Lösung, wie man sofort durch Einsetzen (in die linke Seite) sieht. (Etwa: $2{\cdot}0+3\cdot 0$ ergibt 0 wie verlangt!)
(5.3.7) Eine Zwischenbemerkung: **Raten einer Lösung** ist mathematisch zulässig und einwandfrei. Es kommt nur darauf an, ob der geratene Wert die Bedingungsgleichung erfüllt oder nicht. Vielfach begegnet man der Vorstellung, eine Lösung sei mathematisch nur akzeptabel, wenn sie auch *ausgerechnet* sei. Infolge der in (5.2.4) beschriebenen fehlenden begrifflichen Entfaltung des Wortes *Lösung* werden die beiden wesentlich verschiedenen Aufgaben "Bestimmung einer Lösung" und "Beschreibung eines Lösungsverfahrens" unterbewußt interpretiert als "Bestimme eine Lösung mit Hilfe eines eingeführten Lösungsverfahrens". Diese Bemerkung wird besonders im Bereich der einfachen Differentialgleichungen der Physik wichtig.

!$_T$**(5.3.8)** Also: Eine homogene lineare Gleichung M$\vec{x}=\vec{0}$ hat immer mindestens eine Lösung, den Nullvektor. Da diese Lösung unabhängig von der konkreten Matrix M verfügbar ist, nennt man den Nullvektor *die triviale Lösung der homogenen Gleichung.*
☐ Warum heißt es: *Die triviale Lösung* und nicht *Eine triviale Lösung*? Welcher Unterschied im Wahrheitsgehalt und im Aussagewert besteht zwischen den folgenden beiden Sätzen: "Der Nullvektor ist Lösung der homogenen Gleichung" und "Nur der Nullvektor ist Lösung der homogenen Gleichung"?
(5.3.9) Kehren wir zur Diskussion eines beliebigen homogenen Gleichungssystems zurück. Dann sind (nur noch) zwei denkbare Fälle möglich: Entweder ist der Nullvektor die einzige Lösung des Systems oder es gibt mindestens einen weiteren Lösungsvektor $\vec{a}\neq\vec{0}$. Im ersten Fall haben wir die Lösungsmenge bereits vollständig bestimmt: $\mathbb{L}=\{\vec{0}\}$. (Bitte das nicht mit der leeren Menge $\emptyset$ verwechseln! Null ist nicht dasselbe wie Nichts!).

Wir behaupten: **Im zweiten Fall gibt es notwendig unendlich viele Lösungen. Denn mit $\vec{a}$ ist auch jedes Vektorvielfache $\alpha\vec{a}$ eine Lösung.** Wie kommt das? Nun, da $\vec{a}$ Lösung ist (Rolle!), gilt M$\vec{a}=\vec{0}$. Was ist M$(\alpha\vec{a})$? In (5.1.27) - Linearität - haben wir die Rechenregel M$(\alpha\vec{x})=\alpha M\vec{x}$ als allgemein gültige Regel bewiesen. Anwendung auf M$(\alpha\vec{a})$ gibt die gültige Gleichung $M(\alpha\vec{a})=\alpha\cdot M\vec{a}$ $=\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$. Und das besagt, dass auch $\alpha\vec{a}$ eine Lösung der Gleichung M$\vec{x}=\vec{0}$ ist. Die geforderte Bedingung ist erfüllt. Geometrisch intuitiv können wir das wie folgt interpretieren: **Mit $\vec{a}$ ist auch die von $\vec{a}$ erzeugte Ursprungsgerade Lösung der Gleichung.** Oder: Alle Punkte, die auf dieser Gerade liegen, besitzen einen Koordinatenvektor, der auch Lösung der gegebenen homogenen Gleichung ist. Oder noch anders formuliert: mit $\vec{a}\neq\vec{0}$ ist auch mindestens die von $\vec{a}$ erzeugte Ursprungsgerade in der Lösungsmenge enthalten.
(5.3.10) Jetzt setzen wir unsere Argumentation analog fort: Entweder haben wir bereits alle Lösungen gefunden oder es gibt mindestens eine Lösung $\vec{b}\neq\vec{0}$, die nicht auf dieser Geraden liegt. Als Lösung erfüllt sie $M\vec{b}=\vec{0}$. Wir rechnen erneut mit Hilfe der Linearitätsregeln: $M(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=\alpha M\vec{a}+\beta M\vec{b}=\alpha\vec{0}+\beta\vec{0}=\vec{0}$. Und das besagt, dass jetzt automatisch alle Vektoren $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ Lösungen von $M\vec{x}=\vec{0}$ sind. Oder wieder geometrisch interpretiert: Die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Ebene liegt ganz in der Lösungsmenge!
(5.3.11) Die Argumentation läßt sich analog fortsetzen. Nach spätestens n Schritten muss man zur gesamten Lösungsmenge gelangt sein. (Man kann allgemein zeigen, dass man nach n Schritten den gesamten $\mathbb{R}^n$ erhält und größer kann die Lösungsmenge nicht werden.) In der Regel gelangt man jedoch bereits mit weniger als n Schritten zur gesamten Lösungmenge. Die Zahl k dieser Schritte erweist sich überdies als Größe, die nur von M abhängt, nicht von der restlichen Konstruktion. Damit haben wir aber ein früher bereits gestecktes Ziel erreicht: Wir suchten eine Parametrisierung der Lösungsmenge.

⇑ **(5.3.12)** Fassen wir zusammen:

	Die Struktur der Lösungsmenge einer homogenen Gleichung
M gegeben	Zur homogenen Gleichung $M\vec{x}=\vec{0}$ gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl k mit $0\leq k\leq n$ mit folgenden Eigenschaften:
k=0	Ist k=0, so ist $\vec{x}_L=\vec{0}$ einzige Lösung von $M\vec{x}=\vec{0}$.
k>0	Ist k>0, dann gibt es Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,....\vec{a}_k\in\mathbb{R}^k$, die alle $M\vec{a}_i=\vec{0}$ erfüllen, derart, daß $\vec{x}_L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+.....+\alpha_k\vec{a}_k$ eine Parametrisierung der Lösungsmenge bildet. Genauer gehört zu jeder Lösung $\vec{w}$ des Systems genau ein Parametertupel $(\beta_1,\beta_2,....,\beta_k)$, so daß gilt: $\vec{w}=\vec{x}_L(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)=\beta_1\vec{a}_1+\beta_2\vec{a}_2+.....+\beta_k\vec{a}_k$.

Insbesondere bedeutet k=0, dass die Gleichung **nur** trivial lösbar ist.

(5.3.13) Die eingeführte Zahl k erweist sich als ausgesprochen wichtig. **Sie gibt an, wieviele freie Parameter zur Beschreibung der Lösungsmenge benötigt werden.** Und überdies ist festgelegt, wie aus den freien Parametern die einzelnen Lösungsvektoren zu bilden sind: Nämlich genau nach Art unserer Zentralformel nur mit k statt mit drei Summanden:

$$\vec{x}_L(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_k)=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_k\vec{a}_k.$$

(5.3.14) Löst man eine homogene Gleichung etwa mit Hilfe des Eliminationskalküls und bringt man das Resultat in die geometrische Form, so kann man daraus k ablesen. Die Parametrisierung muss immer wie angegeben aussehen. Andernfalls muss ein Fehler vorliegen. Nehmen wir die Gleichung (m=1, n=3): x+2y+3z=0. Durch Auflösen nach x folgt sofort:

$$\vec{x}_L(y,z)=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Also k=2. Hätte man nach y aufgelöst, so hätte man eine andere Parametrisierung derselben Ebene (k=2) erhalten.

☐ Inspizieren sie das Schema aus (5.3.2). Welche der dort noch denkbaren Fälle verbleiben? Und beachten Sie, dass man nicht nur weiß, dass es "k=f freie Parameter gibt", sondern dass man jetzt auch weiß, wie daraus die Lösung entsteht.

(5.3.15) Eine nützliche Konsequenz des Resultates: Man habe $M\vec{x}=\vec{0}$ gelöst und möchte eine Probe machen. Man kenne das korrekte k. Dann genügt es, die gefundenen $\vec{a}_i$ zu prüfen. Erfüllen diese die homogene Gleichung, also $M\vec{a}_i=\vec{0}$ für i=1,..,k , dann ist das Resultat korrekt. Bei größerem k kann das viel Schreib- und Sortierarbeit sparen!

(5.3.16) Der Wert von k wird durch die Matrix M festgelegt. Wir wollen diesen Sachverhalt für das einfache Beispiel der 2×2-Matrix etwas konkretisieren. Wegen n=2 kann k die Werte 0,1oder 2 annehmen. Wir setzen, um Indizes zu vermeiden, M=$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$und betrachten das zugehörige homogene System, bei dem wir sogleich einen Eliminationsschritt vornehmen:

$ax+by=0$	d(1)-b(2)	→	(ad-bc)x=0	und	(ad-bc)y=0
$cx+dy=0$	oder c(1)-a(2)				

Wir sehen: Ist die Größe ad-bc≠0, dann folgt sofort x=y=0. D.h. nur der Nullvektor ist Lösung und damit k=0. Die Zahl D=ad-bc kann man aber unmittelbar aus der Matrix ablesen. Und damit hat man ein Kriterium, etwas Wichtiges (nämlich k=0) über die Lösungsmenge direkt aus der Matrix abzulesen. Für M=$\begin{pmatrix}5&3\\-7&6\end{pmatrix}$ etwa folgt D=30+21=51. D.h. k=0. Das System hat nur die triviale Lösung. Wir sehen, was es bedeutet, wenn wir sagten: **Es ist möglich, direkt aus der Matrix auf Eigenschaften der Lösung zu schließen, ohne dass man die Lösung selbst kennt.**

Sind alle 4 Matrixkomponenten Null, also a=b=c=d=0, dann ergibt jede Wahl von x und y eine Lösung, und das bedeutet k=2. Es verbleibt der Fall, dass D=0 ist, aber mindestens eine Komponente ungleich Null. Dieser Fall muss dann zu k=1 gehören.

☐ Überlegen Sie sich einige Beispiele mit k=1 und rechnen Sie diese.

(5.3.17) Im Rahmen der Linearen Algebra werden zahlreiche weitere Methoden entwickelt, die auch für n>2 Aussagen über k liefern, besonders auch solche, die zeigen, ob der Fall k=0 vorliegt oder nicht. Die unmittelbare Verallgemeinerung der soeben für n=m=2 gegebenen Methode auf den Fall n=m=3 ist wegen der Vielzahl benötigter Fallunterscheidungen bereits recht mühsam.

☐ Versuchen Sie sich einmal daran.

(5.3.18) Welche Konsequenzen hat das Auftreten äußerer Parameter in der Matrix? In der Regel bewirken die beim Lösungsweg auftretenden Verzweigungen ganzzahlige Änderungen des k-Wertes.
Rechnen wir ein einfaches Beispiel (x,y Unbestimmte) :

ax+2y=0 3x+by=0	b(1)-2(2)

$\boxed{\text{(ab-6)x=0}}$ Für ab-6$\neq$ 0 folgt x=y=0, also $\underline{\underline{k=0}}$

Für ab=6 folgt x frei..... also $\underline{\underline{k=1}}$

5.3b: **Die Lösungsmenge inhomogener Systeme**

⇓ Damit haben wir verstanden, wie die Lösungsmengen homogener Systeme aussehen. Wie steht es nun mit den inhomogenen Systemen? Wir haben bereits angedeutet, dass sich dieses Problem relativ leicht auf die Resultate des Spezialfalles der homogenen Systeme zurückführen läßt.

T **(5.3.19)** Der Zusammenhang mit den homogenen Systemen wird zunächst durch folgende Definition hergestellt:

> Ist M$\vec{x} = \vec{b}$ eine beliebige lineare Gleichung, dann heißt M$\vec{x} = \vec{0}$ *die zugeordnete homogene Gleichung.* (Dasselbe M!)

(5.3.20) Sei $M\vec{x} = \vec{b}$ ein beliebiges inhomogenes System. Die erste Beobachtung, die wir machen, ist, dass jetzt **unlösbare Systeme** vorkommen können. Intuitiv bedeutet das, dass die gestellten Bedingungen widersprüchlich und damit **unerfüllbar** sind. Dann ist die zugehörige Lösungsmenge leer!
Im Rahmen unserer Eliminationsprozedur besagt das, dass man auf Bedingungen wie $\boxed{\text{0x=2}}$ stößt oder auch auf Systeme wie $\boxed{\begin{matrix} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=5 \end{matrix}}$. Hat man ein Paar (x,y), das die erste Gleichung erfüllt, dann ergibt die Auswertung der linken Seite der zweiten 8, nie aber die verlangte 5. Derartiges ist nur im inhomogenen Fall möglich.

(5.3.21) Ist die Gleichung dagegen nicht unlösbar, dann gibt es mindestens eine Lösung des Systems. Wir nennen diese Lösung $\vec{x}_S$. (S für "speziell"!). Für $\vec{x}_S$ gilt $M\vec{x}_S = \vec{b}$. (Rolle: *Lösung. (1.8.18).)* Das ist eine gültige Gleichung. Jetzt gehen wir zum zugeordneten homogenen Sytem über. Dessen Struktur kennen wir. Sei $\vec{x}_H = \vec{x}_L(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ irgendeine Lösung des zugeordneten homogenen Systems. Wir bilden $\vec{x}_S + \vec{x}_H$. Geometrisch interpretiert bedeutet dies, dass wir die Lösungsmenge des homogenen Systems um $\vec{x}_S$ **parallel verschieben.** Wir behaupten: Das ergibt erneut eine Lösung des inhomogenen Systems. Der Beweis folgt sofort über die Linearität von M

$$M(\vec{x}_S + \vec{x}_H) = M\vec{x}_S + M\vec{x}_H = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}.$$

(5.3.22) Wir haben damit tatsächlich weitere Lösungen gefunden. Jede dieser Lösungen hat die Form $\vec{x}_S + \vec{x}_H$, wobei $\vec{x}_H$ irgendeine der Lösungen des zugeordneten homogenen Systems ist. Sind das aber auch **alle** Lösungen dieses Systems? Angenommen ein querulatorisches Individuum kommt und behauptet, es hätte eine weitere Lösung $\vec{x}_Q$ gefunden, die nicht unter den bereits vorhandenen sei. Es wird überprüft, dass tatsächlich eine Lösung vorliegt, dass also M$\vec{x}_Q = \vec{b}$ gilt. Dann rechnen wir im Rahmen der Vektorrechnung wie folgt: $\vec{x}_Q = \vec{x}_S + (\vec{x}_Q - \vec{x}_S)$. Für den Differenzvektor gilt aber erneut wegen der Linearität (5.1.27)

$$M(\vec{x}_Q - \vec{x}_S) = M\vec{x}_Q - M\vec{x}_S = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

D.h. der Differenzvektor ist eine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung und damit einer der Vektoren $\vec{x}_L(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Und damit muss $\vec{x}_Q$ doch bereits unter den gefundenen Lösungen sein.

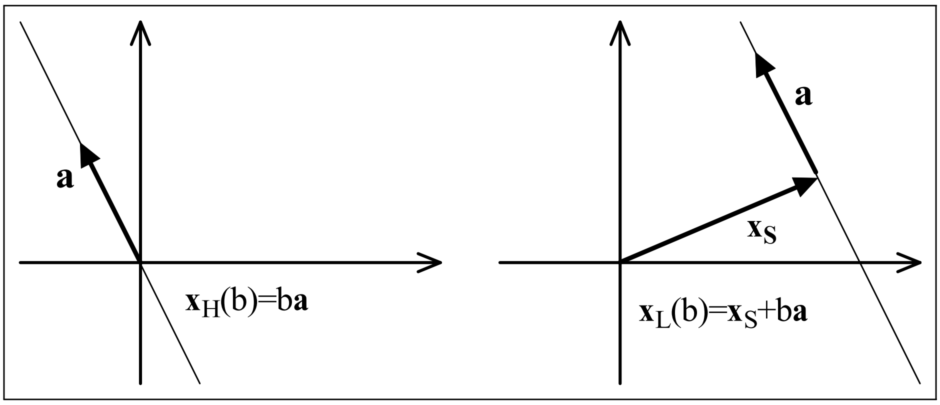
$\Uparrow$! **Folglich besitzen wir alle Lösungen des inhomogenen Systems!**

(5.3.23) Im Falle k=0 ist $\vec{x}_H$ nur der Nullvektor und damit ist die spezielle gefundene Lösung $\vec{x}_S$ auch die einzige Lösung. Hat also das zugeordnete homogene System k=0, dann ist das inhomogene System entweder **unlösbar** oder es ist **eindeutig lösbar**.
Ist k=1, dann liegt eine um den Aufpunktvektor $\vec{x}_S$ verschobene Gerade vor usw.

(5.3.24) Fassen wir zusammen:

	Resultate zum inhomogenen Fall:
!	Ein inhomogenes System $M\vec{x} = \vec{b}$ ist entweder lösbar oder unlösbar.
	Das zugeordnete homogene System $M\vec{x} = \vec{0}$ habe eine Lösungsmenge mit k freien Parametern und werde wie beschrieben durch $\vec{x}_H = \vec{x}_H(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \alpha_1 a_1 + ...\alpha_k \vec{a}_k$ parametrisiert.
	Dabei sind die $\vec{a}_i$ Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung.
	Ist $M\vec{x} = \vec{b}$ lösbar und $\vec{x}_S$ irgendeine Lösung, dann erhält man wie folgt eine Parametrisierung der Lösungsmenge:
!	$\vec{x}_L(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \vec{x}_S + \vec{x}_H(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \vec{x}_S + \alpha_1 a_1 + ...\alpha_k \vec{a}_k$
	Hierin sind alle Lösungen enthalten.

(5.3.25) Erneut zeigt die Parametrisierung die Struktur der Zentralformel, jetzt allerdings mit k+1 Summanden. Und einer der Koeffizienten ist darin gleich 1 gesetzt, ergibt also einen Aufpunktvektor, um den die Lösung der homogenen Gleichung parallel verschoben ist. Die Lösungsmengen der homogenen Gleichung sind Geraden (k=1), Ebenen (k=2), dreidimensionale Räume (k=3) usw. In geometrischer Hinsicht sind das besonders einfache Figuren. Die nachfolgende symbolische Skizze faßt diesen Sachverhalt zusammen.



(5.3.26) Hat man demnach ein inhomogenes System irgendwie in Form einer Parametrisierung gelöst, läßt sich der allgemeine Lösungsvektor in die geometrische Form bringen, mit einem festen Vektor $\vec{x}_S$ und k Summanden der Form $\alpha\vec{a}$. Dann ist notwendig $\vec{x}_S$ eine Lösung der Gleichung selbst und die Vektoren $\vec{a}$ sind Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung. Die Zahl der freien Parameter ist die k-Zahl des zugeordneten homogenen Systems. Damit hat man erneut sofort eine nützliche Hilfe bei Proben.

☐ Was bedeutet k=0 für den lösbaren inhomogenen Fall?

☐ Überprüfen Sie dies an den Beispielen aus (5.2.10) und (5.2.15).

5.3c: **Die Ranggleichung** $k + \ell = n$

? Welche Bedeutung hat k? Bisher ist k die Zahl der freien Parameter, die in der Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung auftritt. Aber man kann k auch mit der Zahl der Bedingungen, die im Gleichungssystem enthalten sind, in Beziehung setzen. Das ergibt ein für die praktische Arbeit nützliches Resultat.

(5.3.27) Angenommen wir starten mit einem 3×3-System mit k=0. Intuitiv haben wir es mit 3 Bedingungen für drei Unbestimmte zu tun, die letztere vollständig bestimmen. Angenommen wir lassen eine Bedingung fort. Dann sind die Unbestimmten nicht mehr festgelegt und tatsächlich findet man für das neue System k=1. Läßt man eine zweite Gleichung fort, folgt k=2. Man kann vermuten, dass eine Beziehung zwischen k und der Zahl der Bedingungsgleichungen besteht.
Es sieht so aus, als würden Gleichungszahl und k-Wert zusammenhängen. Allerdings tritt noch eine Komplikation auf. Zur Erläuterung betrachten wir die folgenden beiden Systeme:

$$\begin{array}{c} 2x-y+3z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 8x-2y+11z=0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} 2x-y+3z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}$$

Man erwartet für das erste System k=0 und für das zweite k=1. Rechnet man nach, so findet man jedoch in beiden Fällen k=1. Was ist der Grund? Die dritte Gleichung des ersten Systems ist einfach eine Kombination der ersten beiden Gleichungen. Nämlich 3(1)+2(2). Das heißt, die dritte Gleichung stellt **keinerlei zusätzliche Bedingung an die Unbestimmten und kann hinzugefügt oder fortgelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.** Wir müssen bzw. dürfen also unter den Gleichungen zunächst alle abhängigen streichen.

T Sei jetzt ℓ die Zahl der unabhängigen, nicht mehr fortlassbaren Gleichungen. Dann gilt tatsächlich immer $\ell + k = n$. Allgemein ist natürlich $\ell \leq m$. Aber es kann durchaus ℓ<m vorkommen.

T	Es sei M$\vec{x} = \vec{0}$ ein homogenes m×n-System.
T	Es sei ℓ mit 0≤ $\ell \leq m$ die Zahl der nicht fortlassbaren Gleichungen
T	Es sei 0≤k≤ n die Zahl der freien Parameter der Lösungsmenge
!!!	**Dann gilt** k+$\ell = n$.

☐ Darf man eigentlich definieren "Sei ℓ die Zahl der unbhängigen....Gleichungen?" Wieso ist eine solche Definition eigentlich unzulässig? Was muss zuvor noch bewiesen werden?
(5.3.28) Auf den Beweis der Aussage der Frage gehen wir hier nicht ein. Ebensowenig auf die Frage, wie man in Problemfällen entscheidet, ob eine Gleichung eine Folge der übrigen ist. In vielen Fällen kann man jedoch (mit etwas Übung) unmittelbar sehen, ob die Gleichungen des Systems unabhängig sind oder nicht. Dann kennt man ℓ und erhält über $k = n - \ell$ die für die Lösungsmenge so wichtige Größe k.

In den Computeralgebrasystemen finden Sie ℓ unter dem Stichwort "Rang der Matrix".

☐ Gehen Sie die gerechneten Beispiele durch und versuchen Sie jeweils aus dem Gleichungssystem ℓ und damit k zu bestimmen. Vergleichen Sie dann mit dem tatsächlichen Ergebnis.
(5.3.29) Als Illustration und zugleich weiteres Beispiel für den Kalkül rechnen wir ein 3×4-System, in das wir anschließend zusätzlich einen äußeren Parameter einbauen. Das System ist so gebaut, dass x und y im ersten Schritt gemeinsam herausfallen.

x-3y+7z-11w=9 x-3y+5z-7w=9 x-3y+4z-5w=9	(1)-(2) (3)-(2)	→	2z-4w=0 z-2w=0

Die Lösung folgt unmittelbar zu

$$\vec{x}_L(y,w) = \begin{pmatrix} 9+3y-3w \\ y \\ 2w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also k=2 und $\ell = 2$, obwohl m=3 ist. Man verifiziert durch Inspektion, dass der Aufpunktvektor die inhomogene Gleichung erfüllt, wogegen die beiden Richtungsvektoren der homogenen Gleichung genügen.

(5.3.30) Jetzt führen wir einen äußeren Parameter a in das System ein. Und zwar so, dass für a=1 das alte System entsteht. Wieder eliminieren wir x und y zugleich:

a(x-3y)+7z-11w=9 x-3y+a(5z-7w)=9 x-3y+4z-5w=9	(1)-a(3) (2)-(3)	→	(7-4a)z+(-11+5a)w=9-9a (5a-4)z+(-7a+5)w=0

(5.3.31) An dieser Stelle wird gern und naheliegend gefragt, ob die Rechnung auch für a=0 zulässig sei, da Multiplikation mit 0 ja die zugehörige Bedingung trivialisiert. Wir kommen unter (5.3.34) auf diese Frage zurück. Jetzt rechnen wir erst einmal weiter.

(5.3.32) Es liegt nahe, z über die zweite Gleichung durch w auszudrücken und in die erste Gleichung einzusetzen. Das erfordert aber eine Fallunterscheidung.

- Der Fall $5a - 4 \neq 0$.

  Für a$\neq \frac{4}{5}$ berechne man z aus der zweiten Gleichung und setze in die erste ein. Das gibt

  $$z = \frac{7a-5}{5a-4}w \qquad \text{und damit} \qquad -3w\frac{-3+2a+a^2}{-4+5a} = 9 - 9a.$$

  Nun hat $-3 + 2a + a^2 = 0$ die Lösungen $a = 1$ und $a = -3$. Das erfordert eine weitere Fallunterscheidung.

-
  - Unterfall $a = 1$ (also das oben gerechnete System!): Jetzt lautet die letzte zu erfüllende Gleichung 0w=0. Damit ist w frei! Rückeinsetzen gibt z=2w und x=3y+9-3w, auch y frei. Das ist unsere alte Lösung mit k=2.
  - Unterfall $a = -3$: Jetzt lautet die letzte Gleichung 0w=36. Das ist eine nicht erfüllbare Bedingung. Das System ist unlösbar. (Beachten Sie: Wir formulieren immer die letzte zu erfüllende Gleichung mit den jeweiligen speziellen Werten der äußeren Parameter. Dies Gleichung sollte man unbedingt hinschreiben!)
  - Unterfall a$\neq \frac{4}{5}, 1, -3$. Jetzt kann die kritische Gleichung nach w aufgelöst werden. Es folgt

    $$\boxed{w = 3\tfrac{5a-4}{a+3} \quad \text{und} \quad z = 3\tfrac{7a-5}{a+3}}$$

    Beim Rückeinsetzen wählen wir y frei und finden

    $$\boxed{x = 3y + \tfrac{27}{a+3}}.$$

    Das gibt zusammen

    $$\vec{x}_L(y) = \begin{pmatrix} 3y + \frac{27}{a+3} \\ y \\ 3\frac{7a-5}{a+3} \\ 3\frac{5a-4}{a+3} \end{pmatrix} = \frac{3}{a+3}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 7a-5 \\ 5a-4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    Beachten sie, dass diese Endformel auch für den Fall a=$\frac{5}{4}$ definiert ist, der im vorliegenden Fall ausgeschlossen ist.

- Der Fall 5a-4=0. Für a=$\frac{4}{5}$ lautet das zu lösende (**und unbedingt hinzuschreibende!)** System für z und w:

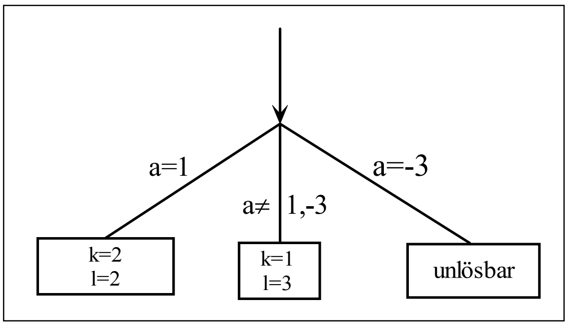
  $$\begin{aligned} \tfrac{19}{5}z + (-7)w &= \tfrac{9}{5} \\ 0z + (-\tfrac{3}{5})w &= 0 \end{aligned}$$

  Also w=0 und z=$\frac{9}{19}$. Und nach Rückeinsetzen $x = 3y + \frac{135}{19}$ mit y frei. Zusammen gibt das eine Lösung mit k=1:

  $$\vec{x}_L(y) = \begin{pmatrix} 3y + \frac{135}{19} \\ y \\ \frac{9}{19} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{9}{19}\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erneut verifiziert man leicht, dass Aufpunkt- und Richtungsvektor das inhomogene bzw. homogene System erfüllen. Vergleicht man mit dem Resultat des dritten Unterfalles, so zeigt sich, dass man das dortige Resultat für a=$\frac{4}{5}$ erneut erhalten hat. D.h. einer der Verzweigungen des Lösungsweges vereinigt sich in der Endformel wieder.

(5.3.33) Das Endresultat hat damit die folgende Verzweigungsstruktur:



(5.3.34) Zurück zu der oben angeschnittenen Frage:

> *Was ist, wenn man im Rahmen des Eliminationsprozesses eine Gleichung mit a multipliziert mit dem Wert a=0 ? Geht dadurch nicht eine der Bedingungen verloren, so dass zusätzliche unzulässige Lösungen auftreten könnten?*

Zunächst wird man in solchen Fällen den Fall a=0 gesondert nachprüfen. Dabei stellt man fest, dass die problematisierte Rechnung nie zusätzliche Lösungen produziert. Also wird man vermuten, dass sich dieser Sachverhalt allgemein beweisen läßt.

Anstatt eines allgemeinane Beweises diskutieren wir das für unseren Beispielfall. Wir starten mit den drei Gleichungen für x,y,z,w. Nach der Elimination sind es eigentlich immer noch drei Gleichungen. Nur dass aus den ersten beiden hingeschriebenen x und y eliminiert ist. Die dritte Gleichung schreiben wir (im Eliminationsprozess) nicht mehr hin, da wir sie in der weiteren Rechnung erst ganz am Ende benötigen. Unser Schema erspart uns diese unnötige Schreibarbeit. Die beiden Gleichungssysteme {(1),(2),(3)} und {(1)-a(2),(2)-(3),(3)} sind aber offensichtlich auch für a=0 zueinander gleichwertig. Und das heißt, dass der Fall a=0 hier nicht gesondert gerechnet werden muss.

☐ Diskutieren Sie als Beispiel, bei dem die Multiplikation mit a für a=0 Probleme schafft:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ \frac{1}{a}x+2y &= b \end{aligned}$$