****

Vorkurs Mathematik

F. Krause

Kapitel 4

Vektorielle Beschreibung geometrischer Objekte

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Kap.4.1: **Die Zentralformel**

Die nachfolgend vorgestellte Formel enthält in höchster Konzentration das Spezifische der Vektorrechnung, den Unterschied zur Zahlrechnung. Durch eine jeweils fallspezifische Rollenzuweisung gewinnen wir daraus in vorliegenden Kapitel die üblichen Vektorbeschreibungen geometrischer Objekte.

! **Ausschließlich mit Hilfe der Regeln der Vektorrechnung läßt sich die folgende Vektorformel bilden**:

$$\boxed{\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = x\tilde{\mathbf{a}} + y\tilde{\mathbf{b}} + z\tilde{\mathbf{c}}.}}$$

Die Konstruktion des Termes der rechten Seite verlangt vektorielle Addition und die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl als Verknüpfungen. Überdies wird das Assoziativgesetz benötigt, um das Fortlassen der Klammern zu rechtfertigen. Nochmals: **Die angegebene Konstruktion ist in jedem Vektorraum möglich.**
(4.1.1) Die Formel faßt einerseits Vieles zusammen, was wir bisher gemacht haben und bildet andererseits den **Ausgangspunkt der nachfolgend gegebenen Vektorbeschreibungen geometrischer Ojekte.** Dazu muss man immer nur geeignete Interpretationen und Konkretisierungen der Formelgrößen vornehmen.
(4.1.2) Beispielsweise erfaßt die Formel die in Kap. 2.4.1 beschriebene Koordinatendarstellung geometrischer Pfeile. Sei K ein gewähltes Koordinatensystem. $\vec{e}_1 \in V_0^3$ sei der Einheitsvektor in 1-Richtung. Also $\vec{e}_1^K = (1,0,0)$. Entsprechend seien $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ definiert. Dann gilt für jedes $\vec{x} \in V_0^3$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \vec{x}^K &= (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \qquad \text{oder} \\ & \boxed{\vec{x} = \mathrm{x}\vec{e}_1 + \mathrm{y}\vec{e}_2 + \mathrm{z}\vec{e}_3} \end{aligned}$$

wie man sofort überprüft. Das ist offensichtlich eine Spezialisierung obiger Hauptformel, die **die operativ-geometrische Konstruktion des Pfeiles $\vec{x}$ aus dem Koordinatenvektor $\vec{x}^K$** erfaßt: *Gehe um x in 1-Richtung, dann parallel zur 2-Richtung um y weiter usw.* Vgl. (2.4.5). Die geometrische Vektoraddition beschreibt ja einen zu durchlaufenden achsenparallelen Weg. Die Interpretation als "achsenparaller Weg" gilt auch für Vektoren, die nicht aufeinander senkrecht stehen. Es handelt sich einfach um die Parallelogrammregel (3.3.8).

4.1.a: **Ein Charakteristikum des Rechnens mit Vektoren**

(4.1.3) Weiter deutet die Formel einen fundamentalen Unterschied an, der zwischen dem Rechnen mit Zahlen und dem mit Vektoren besteht. Bei Zahlen ist es nicht möglich, aus einer Gleichung wie 2+3=5 von der rechten Seite auf die linke zu schließen. Bei Vektoren ist das aber in gewisser Weise der Fall. Allerdings muss man annehmen, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ vorgegeben sind, dass sie die Rolle äußerer Parameter erhalten.
Wir betrachten der Einfachheit halber als Beispiel den ebenen Fall. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen verschiedene Richtungen haben. Sei $\vec{x}$ ein Vektor in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Ebene. Dann kann man stets und eindeutig zwei Zahlen x und y finden, so dass $\vec{x} = \vec{a}x + \vec{b}y$ gilt. Geometrisch konstruiert man die Zerlegung, indem man durch den Endpunkt von $\vec{x}$ die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallelen Geraden zieht. Die Schnitte mit den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Geraden liefern x und y (als Vielfache von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$). Und das heißt, dass man in diesem Sinne von der Summe auf die Summanden schließen kann.
☐ Fertigen Sie eine konkrete Skizze nach dieser Vorschrift!
Die soeben angedeutete fallspezifische **Rollenzuweisung** ist ist typisch, tritt im Zusammenhang mit dieser Formel meistens auf: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ äußere Parameter. Die Zahlen x,y und z unabhängige Veränderliche und $\vec{x}$ abhängige Veränderliche. Es ist sinnvoll, sich dies als Automat (Verlaufsdiagramm, Kap. 3.1.1) mit drei Eingabebahnen vorzustellen. In konkreten Problemsituationen, bei denen die Formel auftritt, ist es dann zweckmäßig, auf Abweichungen von dieser üblichen Rollenverteilung zu achten. Und der *Schluß von der*

Summe auf die Summanden läßt sich dahingehend interpretieren, dass man die Laufrichtung im angesprochenen Automaten umkehren (*invertieren*) kann. So wie man die Zuordnung $x \mapsto x^3$ durch $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ umkehren oder neutralisieren kann.

4.1b: **Geometrische Form und Tupelform**

(4.1.4) Bisher durfte unsere Formel Vektoren aus irgendeinem Vektorraum enthalten. Jetzt nehmen wir an, alle beteiligten Vektoren seien aus einem $\mathbb{R}^n$ oder einem $\mathbb{R}^3_{K.}$. Dann läßt sich der Ausdruck der rechten Seite über die zugehörige komponentenweise Verknüpfung zu einem einzigen Tupel zusammenfassen. Das nennen wir die *Tupelform (des Ausdrucks).* Wogegen wir den ursprünglichen Ausdruck $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ die *geometrische Form* nennen. Ein Beispiel: $\vec{a}=(1,2,0)$ und $\vec{b}=(0,1,2)$ und $\vec{c}=(2,0,1)$. Für die Tupelform folgt

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=x(1,2,0)+y(0,1,2)+z(2,0,1)=(x+2z,2x+y,2y+z).$$

! Wir empfehlen, den mittleren Schritt nicht aufzuschreiben. Mit etwas Konzentration kann man unmittelbar die Tupelform angeben und das spart einige Arbeit.

(4.1.5) Bemerkenswert ist, dass man auch problemlos **von der Tupel- zur geometrischen Form gelangt** (was eine andere Form des Schlusses von der Summe auf die Summanden ist.) Liest man die Gleichungskette von rechts nach links, so sieht man, wie das geht. Suche in jeder Komponente alle Beiträge mit x und nehme nur die Kofaktoren (bei 7x die 7, bei x=1x die 1, bei 0=0x die 0 usw.). Das gibt den Vektorfaktor zu x. Zwei Beispiele:

$$\begin{aligned}(x+2z,2x+y,2y+z) &= x(1,2,0)+y(0,1,2)+z(2,0,1)\\ (1,2+3z-y,4+2y-z) &= 1(1,2,4)+y(0,-1,2)+z(0,3,-1)\end{aligned}$$

Im unteren Beispiel haben wir sogar noch x=1 gewählt.

(4.1.6) Das wechselseitige Umrechnen der beiden Formen wird beständig benötigt und sollte effizient (also ohne langwierige Zwischenrechnungen) beherrscht werden. Vergewissern Sie sich und stellen Sie sicher, dass Sie das können.

Die *geometrische Form* von Formeln werden wir benutzen, um die Formeln geometrisch zu interpretieren: Die geometrische Form beschreibt ja nach (4.1.2) einen geometrischen Weg, auf dem man zum gesuchten Punkt gelangt. Daher die Bezeichnung. Die Tupelform dagegen wird eher für Rechnungen benötigt.

☐ Wie sieht der eben erwähnte geometrische Weg vom Anfangspunkt zum Endpunkt des zu (2,-1,4) gehörigen Pfeiles aus?

Kap.4.2: **Der Schwerpunkt**

Das einfachste Beispiel einer Vektorformel der Physik ist die Formel für den ***Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten****. Durch sie wird ein einzelner Punkt (Eine Figur mit 0 inneren Freiheitsgraden . Vgl. (2.2.8)) festgelegt. Die Formel benutzt ausschließlich durch die Vektorraumaxiome gesicherte Konstruktionen, ist also in jedem Vektorraum bildbar.*

(4.2.1) Es geht um das folgende Problem: Man hat an den Raumpunkten $P_1, P_2, ...P_N$ jeweils einen Massenpunkt der Masse $m_1, m_2, ...m_N$. Also ein System aus N Massenpunkten. Vgl. (2.1.2). Hierfür möchte man ein einfacheres Ersatzsystem erschaffen, das aus einem einzigen Massenpunkt bestehen und das in möglichst vielen Eigenschaften mit dem Ausgangssystem übereinstimmen soll. **Welche Masse muss man wählen und an welchem Ort soll sich die Ersatzmasse befinden?**
(4.2.2) Meist leistet die folgende Konstruktion das Verlangte:

1. Als Masse verwendet man die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2 + ... + m_N$.
2. Als Ort des neuen Massenpunktes wählt man eine Punkt $S \in E^3$, dessen Ortsvektor (bezüglich des Ursprunges 0) sich wie folgt berechnet:

$$\boxed{\boxed{\vec{x}_S = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2+...+m_N\vec{x}_N}{M}}}.$$

   Hierbei soll $\vec{x}_i$ der Ortsvektor des Punktes P_i sein. S wird **der Schwerpunkt des Systems** genannt

4.2.a:**Vertrautmachen mit der Formel**

(4.2.3) Wir wollen am Beispiel dieser Formel erneut kurz illustrieren, wie man sich mit einer neuen wichtigen Formel vertraut macht. Das verlangt eine Reihe eigenständiger geistiger Aktivitäten. Überlegungen wie die nachfolgenden bezeichnen wir auch als *mit der Formel Herumspielen.* Dabei geht man weniger systematisch vor als mit fallspezifischem aktivem Hinschauen.
☐ Sei $m_1 = m_2 = m_3$ und $\vec{x}_1^K = (2, 0, 0)$, $\vec{x}_2^K = (0, 3, 0)$ und $\vec{x}_3^K = (0, 1, 4)$. Machen Sie eine Skizze und schätzen Sie die Lage des Schwerpunktes. Berechnen Sie dann $\vec{x}_S^K$. Was ändert sich, wenn man $m_1 = 3$ wählt?
(4.2.4) Beachten Sie zu Beginn, dass der rechts stehende Rechenausdruck allein mit Hilfe der Vektorraumaxiome gebildet werden kann. Man benötigt die beiden Verknüpfungen und die Rechenregeln für Vektoren, insbesondere das Assoziativgesetz. Setzt man $\alpha_1 = m_!/M$, $\alpha_2 = m_2/M$ usw., dann schreibt sich die Formel $\vec{x}_S = \alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_N\vec{x}_N$. Ein typischer Ausdruck der Vektorrechnung. Zusätzlich gilt $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N = 1$. Gibt man den beteiligten Größen Einheiten, so hat $\vec{x}_S$ dieselbe Einheit wie ein Ortsvektor, denn die Einheit der Massen fällt heraus. Für N =1 stimmen Ausgangssystem und Ersatzzsystem überein. Ist K ein volles Koordinatensystem, so kann man zu den Koordinatenvektoren übergehen und findet mit Hilfe der beiden Regeln $(\vec{a} + \vec{b})^K = \vec{a}^K + \vec{b}^K$ und $(\lambda\vec{a})^K$ sofort:

$$\boxed{\vec{x}_S^K = \frac{m_1\vec{x}_1^K+m_2\vec{x}_2^K+...+m_N\vec{x}_N^K}{M}}.$$

Das läßt sich bei Bedarf in Tripelform bringen
☐ Was ergibt sich für N=2 und gleiche Massen $m_1 = m_2$?
(4.2.5) Für N=3 liegt **eine Spezialisierung der Hauptformel** vor, die darin besteht, dass die drei Koordinaten x,y,z nicht mehr beliebig wählbar sind, sondern die Zusatzbedingung x+y+z=1 erfüllen müssen. Da Massen üblicherweise positiv sind, sind die Koeffizienten x,y und z dies auch.
(4.2.6) Mit der Koordinatenformel lassen sich leicht konkrete Beispiele durchrechnen, was man bei Bedarf tun sollte (*Herumspielen!*). Häufig ist es auch nützlich, die Schwerpunktformel wie folgt umzuformen:

$$\boxed{M\vec{x}_S = m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + ... + m_N\vec{x}_N.}$$

Das ist offensichtlich eine erstes Indiz, wie die erwünschte Ersatzfunktion realisiert wird: Man darf die rechts stehende Summe (über alle Punkte) durch den linken Ausdruck ersetzen, der sich nur auf den Schwerpunkt und die dort konzentrierte Masse bezieht.

☐ $m_1 = m_2 = 1$ und $m_3 = 5$. Weiter $\vec{x}_1 = \vec{e}_2 = -\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3 = 3\vec{e}_3$. Bestimmen Sie $\vec{x}_S$ und $\vec{x}_S^K$. Fertigen Sie eine Skizze der Konfiguration.

4.2c: **Eigenschaften der Schwerpunktsformel**

(4.2.7) Was geschieht bei Ursprungswechsel? Der Ersatzpunkt S selbst sollte von der Wahl des Ursprungs nicht abhängen. Andernfalls könnte er nicht als physikalisches Ersatzsystem dienen. Wir analysieren diese Frage wie folgt:
Sei Q ein zweiter Ursprung mit Ortsvektor $\vec{x}_Q$, bezogen auf $0 \in E^3$. Weiter sei $\vec{y}_P$ der Ortsvektor von P bezüglich des neuen Ursprunges. Dann gilt für jedes P die Beziehung $\vec{y}_P = \vec{x}_P - \vec{x}_Q$ wie eine Skizze sofort zeigt. (Skizze **anfertigen**!) Oder $\vec{x}_P = \vec{y}_P + \vec{x}_Q$. Das setzen wir in die rechte Seite der Schwerpunktsformel ein und finden

$$\boxed{\frac{m_1(\vec{y}_1+\vec{x}_P)+...+m_N(\vec{y}_N+\vec{x}_Q)}{M} = \frac{m_1\vec{y}_1+...+m_N\vec{x}_N}{M} + \frac{m_1+...+m_N}{M}\vec{x}_Q}$$

Die rechte Seite ist aber $\vec{y}_S + \vec{x}_Q$, also der Ortsvektor des alten S bezogen auf den neuen Ursprung.

! **(4.2.8) Jede Ursprungswahl führt zu demselben Raumpunkt S in E^3.**

(4.2.9) Für zahlreiche Probleme ist es nützlich, den Schwerpunkt S selbst als Ursprung zu wählen. In diesem System hat der Schwerpunkt den Ortsvektor $\vec{0}$, denn der Ursprung ist ja der Schwerpunkt. Damit folgt sofort: $m_1\vec{x}_1 + ... + m_N\vec{x}_N = \vec{0}$ für die Ortsvektoren dieses Systems. Wählen wir N=2. Also $m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 = 0$. Oder $\vec{x}_2 = -(m_1/m_2)\vec{x}_1$. Beide Vektoren haben entgegengesetzte Richtung im Raum, aber dem Hebelgesetz entsprechende Längen. Ist m_1 doppelt so groß wie m_2, dann ist m_2 doppelt so lang wie m_1.

(4.2.10) Jetzt eine weitere Probe. Wir wählen N=3. Dann sollte der Schwerpunkt in der von den drei Punkten aufgespannten Ebene liegen. Das werden wir in (4.4.10) beweisen. Vorläufig testen wir unser Konzept wie folgt: Zuerst ersetzen wir die beiden Punkte 1 und 2 durch ihre Schwerpunktsmasse. Dann ersetzen wir das System aus dem Schwerpunkt (der ersten beiden Massen) plus dritter Punkt erneut durch den zugehörigen Schwerpunkt. **Ergibt das den gemeinsamen Schwerpunkt aller drei Punkte**? Die folgende Rechnung - die erneut nur die Vektorraumaxiome verwendet - zeigt das.
1 und 2 vereinigen gibt die Masse $M_{12} = m_1 + m_2$ und $\vec{x}_{S12} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/M_{12}$. Weitere Vereinigung mit 3 gibt mit selbsterklärender Schreibweise

$$\vec{x}_{S(12)3} = \frac{(M_{12}\vec{x}_{S12} + m_3 x_3)}{(M_{12} + m_3)} = \frac{((m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2) + m_3\vec{x}_3)}{M} = \vec{x}_S.$$

Es entsteht also wirklich der Gesamtschwerpunkt! Man verallgemeinert die Rechnung problemlos auf N Summanden und eine Aufteilung in N_1 und N_2 Summanden mit $n = N_1 + N_2$.

☐ Inwiefern gibt ein an der Decke hängendes Mobile eine experimentelle Illustration dieser Rechnung?

☐ Es seien And B zwei Figuren des E^3. Weiter sei λ eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Jetzt bilden wir die Menge

$$S_\lambda = \{Z \mid Z \in E^3, \vec{x}_Z = \lambda\vec{x}_Q + (1-\lambda)\vec{x}_P, Q \in A, P \in B\}.$$

D.h Z liegt genau dann in S_λ, wenn Z der Schwerpunkt eines Punktes aus A mit Masse λ und eines zweiten aus B mit Masse $(1-\lambda)$ ist. Überzeugen Sie sich davon. Dann bildet S_λ auch eine Figur in E^3. Wie ändert sich diese Figur, wenn man λ von 0 nach 1 wachsen läßt.

☐ Schreiben oder konzipieren Sie ein Computerprogramm, das dieses *Morphing* realisiert.

Kap.4.3: **Geraden im Raum**

Geraden und Kreise sind die wichtigsten und einfachsten geometrischen Mengen vom Kurventyp, also von Mengen mit einem (inneren) Freiheitsgrad. Wir entwickeln hier die ***vektorielle Geradenbeschreibung****, die eine besonders große Bedeutung für die Anwendungen besitzt. Der Formalismus erweist sich als exemplarisch für alle weiteren Parametrisierungen, also die 2. in Kap.1.6.1 angekündigte vektorielle Beschreibungsform für Figuren.*

4.3a: **Die Parametrisierungsformel**

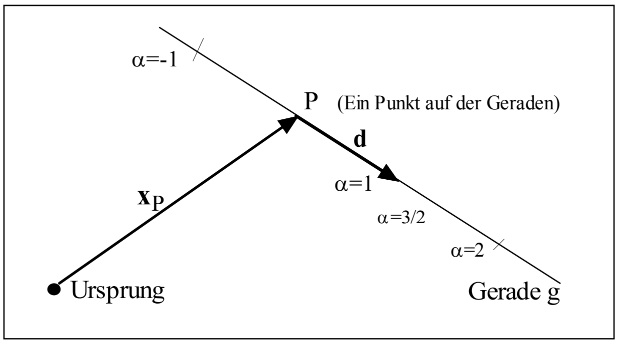
(4.3.1) Geraden (im Raum) sind zunächst einmal bestimmte Teilmengen $g \subset E^3$. Eine mögliche und gebräuchliche Festlegung einer Geraden sieht wie folgt aus : $P, Q \in E^3$ seien verschiedene Punkte. Dann sei g die Verbindungsgerade von P und Q. Als Teilmenge ist g die Gesamtheit aller Punkte die auf g liegen. Im Gegensatz zum Schwerpunkt geht es jetzt nicht mehr um die Beschreibung eines einzelnen Punktes (0 innere Freiheitsgrade) sondern um die Beschreibung einer Vielzahl von Punkten mit einem (inneren) Freiheitsgrad. Die Figur "Gerade" dagegen hat 4 (äußere) Freiheitsgrade.

☐ Begründen Sie die 4 äußeren Freiheitsgrade.

⊤ **(4.3.2)** Zwei Wege einer Quantifizierung bieten sich an: Man kann wie in der Ebene mit Gleichungen (für die Koordinaten der Punkte auf der Geraden) arbeiten. Vgl. Kap. 1.6. Oder man arbeitet mit einer vektoriellen Darstellung, die man **Parametrisierung** nennt. Letztere ist meist einfacher und nützlicher und soll jetzt entwickelt werden. Mit der Parametrisierungsmethode kann man eine Vielzahl weiterer Figuren erfassen und quantifizieren. Wir werden sie nachfolgend fast immer der Gleichungsbeschreibung vorziehen.

? Wie wird man eine Gerade oder irgendeine andere Figur vektoriell beschreiben? Nun man wird die Ortsvektoren aller zugehörigen Punkte angeben. Der Endpunkt ist gemeint, soll zur Menge gehören, nicht etwa der gesamte Pfeil. Wir arbeiten in V_0^3, wählen also nur einen Ursprung, noch kein volles Koordinatensystem.

(4.3.3) Sei also g eine Gerade und $P \in g$ ein Punkt darauf mit Ortsvektor $\vec{x}_P$. Wir gehen in Gedanken von 0 nach P. Wie kommen wir **von dort** zu den weiteren Punkten von g? Nun wir müssen immer in dieselbe Richtung gehen nur unterschiedlich weit. Eine Skizze zeigt das sofort.



Sei nun $\vec{d} \neq \vec{0}$ ein Richtungsvektor der Geraden, ein Vektor mit zu g paralleler Richtung und Q ein weitere Punkt von g . Dann gilt offenbar $\vec{x}_Q = \vec{x}_P + \alpha\vec{d}$ mit einem geeigneten Zahlfaktor α. Durchläuft α alle reellen Zahlen, so erhält man auf diese Weise **alle Ortsvektoren von g genau einmal.**

⊤ Den zu α gehörigen Ortsvektor bezeichnen wir mit $\vec{x}_g(\alpha)$. Und α selbst interpretieren wir als freien Parameter: Jede Wahl von α liefert eines der uns interessierenden Objekte.

⇑ **(4.3.4)** Fassen wir zusammen:

$$\boxed{\alpha \mapsto \vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha\vec{d}}.$$

Die Interpretation der Bestandteile dieser Formel:

α	Der Parameter, ein freier Parameter. Darf umbenannt werden.
$\vec{x}_g(\alpha)$	Gelesen "x-g-von α". **Kein Produkt!"** **Bezeichnung** des Ortsvektors, der zum Parameterwert α gehört.
$\vec{x}_P + \alpha\vec{d}$	Berechnungsterm für den Ortsvektor. Eingabe eines $\alpha - Wertes$ ergibt den Ortsvektor.
$\vec{x}_P$	Der *Aufpunktvektor* der Parametrisierung. Äußerer Parameter.
$\vec{d}$	Der *Richtungsvektor* der Parametrisierung. Äußerer Parameter.
$\alpha \mapsto \vec{x}_g(\alpha)$	Die gesamte Zuordnung heißt *eine (vektorielle) Parametrisierung der Geraden g.*

(4.3.5) Jeder Punkt der Geraden gehört zu genau einem Zahlwert des Parameters. Speziell gehört der zuerst gewählte Punkt P zum Parameterwert 0. Durch $\vec{d}$ wird jetzt ein Koordinatensystem - eine "Zahlengerade" - entlang g ausgelegt. Damit können wir die Zuordnung auch als eine Art *Benennung* oder *Namensgebung* der zunächst namenlosen Punkte der Geraden interpretieren. Als Namenskatalog werden die reellen Zahlen benutzt. Über die Zuordnung erhält jeder Namen einen Namensbesitzer in Form eines Ortsvektors und jeder Ortsvektor auf g erhält eine Namen in Form einer Zahl, wird also *quantifiziert.* Dieser Name gibt an, wieviele durch $\vec{d}$ bestimmte Einheitslängen man von P aus weitergehen muss, um zum betrachteten Geradenpunkt zu gelangen.

Meist wird man den Aufpunkt P in der Bezeichnung nicht erwähnen. $\boxed{u \mapsto \vec{a} + u\vec{d}}$ etwa ist die Parametrisierung einer Geraden mit *Aufpunktvektor* $\vec{a}$ (und nicht $\vec{a}_P$).

T Der Begriff *Parametrisierung* steht generell für eine derartige Quantifizierung zunächst namenloser Objekte durch Zahlen. Parametrisierung einer Ebene, eines Kreises usw. Kurz: *Parametrisierung* **bedeutet *Namensgebung* der betrachteten Objekte mit Hilfe von Zahlen.**

4.3b: Die Verfeinerung der geometrischen Interpretation

(4.3.6) Zunächst sehen wir, dass erneut eine Spezialisierung der Hauptformel vorliegt. Etwa $z = 0$, $x = 1$ und $y = \alpha$. Was besagt das geometrisch? Die Ortsvektoren $\vec{x}_g(\alpha)$ der Geraden ändern i.a. ihre Länge und ihre Richtung, wenn man den Geradenpunkt ändert. Eine solche gekoppelte Änderung ist dann jeweils schwierig zu präzisieren. **Die Formel reduziert die Änderung auf die Längenänderung des einen Summandenvektors** $\vec{d}$. Der erste Summand bleibt fest, der zweite ändert nur seine Länge, nicht seine Richtung. Der eine vorhandene Freiheitsgrad wird so optimal freigelegt. Vgl. die Figur in (4.3.3).

(4.3.7) Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die Vektoren $\vec{x}_P$ und $\vec{d}$ dieselbe Richtung haben. Dann erhält man eine Gerade durch den Ursprung. Ist insbesondere $\vec{x}_P$ gleich Null, dann liegt sicher eine Gerade durch den Nullpunkt vor. Vgl. die Figur in (5.3.25).

☐ Wieso darf man **nicht** schließen: Wenn $\vec{x}_P$ ungleich Null ist, geht die Gerade nicht durch den Ursprung?

☐ Was geschieht, wenn man in $\vec{x}_P + \alpha\vec{d}$ den Vektor $\vec{d}$ festläßt, aber $\vec{x}_P$ in $\vec{x}_Q$ verändert, wobei Q nicht auf g liegen muss? Was geschieht, wenn man umgekehrt $\vec{x}_P$ fest läßt, aber $\vec{d}$ verändert.

4.3c: **Übergang zu den Koordinatenvektoren**

(4.3.8) Bisher haben wir die Punkte von g durch Ortsvektoren, also geometrische Pfeile beschrieben. Möchte man eine vollständige Quantifizierung, so muss man ein volles Koordinatensystem K vorgeben und in der üblichen Weise zu den Koordinatenvektoren übergehen. Mit Hilfe der Übergangsregeln (3.3.27) ist das leicht. Man findet folgende Parametrisierung der Koordinatenvektoren:

$$\boxed{\alpha \mapsto \vec{x}_g^K(\alpha) = \vec{x}_P^K + \alpha\vec{d}^K}.$$

T Hierbei haben wir $\vec{x}_g^K(\alpha)$ anstelle von $(\vec{x}_g(\alpha))^K$ geschrieben. Zur Festlegung der gesamten Parametrisierung benötigt man daher die beiden Koordinatenvektoren $\vec{x}_P^K$ und $\vec{d}^K$. **Mehr nicht.**

☐ Skizzieren Sie den Verlauf der durch die Parametrisierung $\vec{x}_g^K(a) = (0,0,2) + a(1,1,0)$ gegebenen Geraden im Raum.
☐ Geben Sie eine Parameterdarstellung der x-Achse und der ersten Winkelhalbierenden der y-z-Ebene.
☐ Was erhält man, wenn man in der Zuordnung $a \mapsto \vec{x}_g(a)$ nur die Parameterwerte $0 \leq a \leq 1$ zuläßt? Was, wenn man $0 \leq a < \infty$ zuläßt?
☐ Der Aufpunktvektor $\vec{a}^K$ und Richtungsvektor $\vec{d}^K$ seien gegeben. Wie erkennt man, ob die zugehörige Gerade ganz in der x-z-Ebene verläuft? (Was muss gelten?)

4.3d: **Die Vorgabe einer Parametrisierung**

⇑ Fassen wir zusammen, wie die vektorielle Parametrisierung einer Geraden vonstatten geht. **Was hat man zu tun, um eine Gerade quantitativ zu beschreiben**?
(4.3.9) Die Parametrisierungsformel ist festgelegt, sobald die beiden äußeren Parameter $\vec{x}_P$ und $\vec{d}$ fixiert sind. Um also eine Parametrisierung einer durch eine Situation gegebenen Geraden zu erhalten, muss man

1. ein Koordinatensystem - mindestens einen Ursprung - festlegen,

2. sich den Ortsvektor bzw. den Koordinatenvektor **irgendeines** Punktes der Geraden verschaffen

3. und den Ortsvektor bzw. den Koordinatenvektor **irgendeines** Richtungsvektors ($\neq \vec{0}$) der Geraden bestimmen.

Aus diesen Größen kann man die Formel für eine Parametrisierung aufbauen. Und mit Hilfe dieser Formel erhält man alle Punkte der Geraden wie gewünscht.

4.3e: **Umparametrisierungen**

(4.3.10) Die Wahl des Aufpunktes P und des Richtungsvektors $\vec{d}$ enthalten eine beträchtliche Willkür. Es gibt viele Punkte auf der Geraden. Wählt man einen anderen Aufpunkt Q und einen anderen Richtungsvektor $\vec{f}$, so erhält man **eine andere Parametrisierung derselben Geraden.**
T **(4.3.11)** Um Verwechslungen zu vermeiden, sollte man dann auch die Bezeichnung wechseln und beispielsweise schreiben $b \mapsto \vec{y}_g(b) = \vec{x}_Q + b\vec{f}$. Eine Parametrisierung einer zweiten Geraden h dagegen könnte man erneut mit $b \mapsto \vec{x}_h(b)$ bezeichnen. $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$ deutet immer auf Ortsvektor hin. Ein Index g auf die betrachtete Gerade, allgemeiner die geometrische Figur. Die Bezeichnung des Parameters ist zunächst frei. Allerdings sollte man es sich angewöhnen, die Parameter für mehrere parametriserte Objekte unterschiedlich zu bezeichnen. Was gleiche Bezeichnungswahl bedeutet, werden wir in Kap. 4.7 sehen.
☐ Entwickeln Sie allgemeine Formeln für eine Umparametrisierung.
☐ Ist *Umparametrisierung* dasselbe wie *Termumformung?* Ist es ein Spezialfall?

4.3f: **Die Zweipunkteform einer Geraden**

(4.3.12) Häufig wird eine Gerade dadurch festgelegt, dass zwei **verschiedene** Punkte P und Q der Geraden gegeben sind. D.h. für uns: ihre Orts- oder Koordinatenvektoren sind gegeben. Wie erhält man dann eine Parametrisierung der Geraden? Nun wir wählen einen der beiden Punkte als Aufpunkt. Sagen wir P. Dann benötigen wir noch einen Richtungsvektor. Offensichlich ist $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$ ein solcher. (Skizze anfertigen!) Als Interpretation: P ist der Ursprung des auf P verlegten Koordinatensystems. Dessen Einheit liegt bei Q. Damit folgt als Parametrisierung:

P und Q auf g gegeben mit $P \neq Q$.
$a \mapsto x_g(a) = \vec{x}_P + a(\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$
Die *Zweipunkteform der Geraden*

T **(4.3.13)** Beachten Sie, $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$, nicht aber $\vec{x}_P - \vec{x}_Q$. Immer wieder wird gesagt, die zweite Wahl sei doch auch korrekt. Das ist richtig, aber die zweite Wahl ist hochgradig **ungeschickt**, weil sie später bei der Behandlung weitergehender Probleme zu vielen Unannehmlichkeiten führt. Für den winzigen Vorteil, sich das günstige Vorzeichen nicht **merken** zu müssen, heimst man sich riesige Probleme ein.

4.3g: **Geradlinig gleichförmige Bewegung**

(4.3.14) Bisher hatte der Parameter α eine reine Hilfsfunktion, hatte die Rolle eines freien Parameters. Nach einer Umparametrisierung etwa gehörte zu demselben Geradenpunkt ein anderer Wert des neuen Parameters.
(4.3.15) In gewissen Fällen besitzt der Parameter jedoch eine durch die Aufgabensituation festgelegte inhaltliche Bedeutung. Betrachten wir etwa einen Massenpunkt, der sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. In einer Zeiteinheit legt er daher die Strecke $\vec{v}$ zurück, in 2 Zeiteinheiten die Strecke $2\vec{v}$ usw. Befindet er sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Orte $\vec{a}$, dann befindet er sich k Sekunden Später am Orte $\vec{a} + k\vec{v}$. Offenbar liegt eine Geradenbeschreibung vor. Wir bezeichnen den Ort zur Zeit t mit $\vec{r}(t)$. Dann gilt $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$. Diese Formel liefert uns jetzt den Ort für jeden beliebigen Zeitpunkt t durch Einsetzen des zugehörigen t-Wertes. Es ist eine Parametrisierung der Bahngeraden, wobei der Parameter die Zeit ist.
T Eine Bewegung dieses Typs wird in der Physik *geradlining-gleichförmig* genannt. Kräftefreie Bewegungen sind von dieser Art!
(4.3.16) Kennt man den Ort zu zwei verschiedenen Zeitpunkten - sagen wir $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$, dann kann man daraus die **vektorielle Geschwindigkeit** herleiten. Verifizieren Sie selbst die folgende Formel, die erneut eine Spezialisierung der Zentralformel darstellt:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}}$$

(4.3.17) Häufig ist es so, dass man nicht den Ort zur Zeit t=0 kennt, sondern den zu einem anderen Zeitpunkt t_0. Also $\vec{r}(t_0) = \vec{b}$ sei gegeben. Zusätzlich wisse man die konstante Geschwindigkeit $\vec{v}$. Unter diesen Umständen sollte man die folgende Beschreibung der Bewegung verwenden:

$$\vec{r}(t) = \vec{b} + (t - t_0)\vec{v}.$$

Die rechte Seite ist gleich $(\vec{b} - t_0\vec{v}) + t\vec{v}$. Und $\vec{b} - t_0\vec{v}$ ist gerade der Ort zur Zeit $t = 0$. D.h. es liegt eine Termumformung, nicht etwa eine Umparametrisierung vor!
(4.3.18) Fassen wir die vektorielle Beschreibung der geradlinig gleichförmigen Bewegung zusammen:

$\vec{r}(t)$	Bezeichnung für den Ortsvektor zur (beliebigen) Zeit t
t_0 und $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$	Bekannter Ort $\vec{a}$ zum Zeitpunkt t_0 / Beobachtungsdaten mit der Rolle äußerer Parameter.
$\vec{v}$	Konstante vektorielle Geschwindigkeit. Berechenbar über den Ortsvektor zu zwei Zeitpunkten.
$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{v}(t - t_0)$	Berechnungsformel für den Ort für beliebige Zeiten. Dabei sind $\vec{a}$, $\vec{v}$ und t_0 äußere Parameter. t ist unabhängige Variable.

☐ Rechnen Sie bei Bedarf selbst einige numerische Konkretisierungen mit Übergang zu den Koordinatenvektoren.

4.3h: **Geraden in der Ebene**

(4.3.19) Wir betrachten eine Ebene E und darin befindliche Geraden. Alle Formeln für die vektorielle Geradenbeschreibung lassen sich offensichtlich übernehmen. Es gibt nur einen Unterschied: Die Koordinatenvektoren sind Zweitupel, haben nur zwei Komponenten. Eine typische vektorielle Geradenbeschreibung wäre $\vec{x}_g(u) = \vec{a} + u\vec{e}$ mit $\vec{a}^K = (2, 1)$ und $\vec{e}^K = (-1, 3)$. Das gibt $\vec{x}_g^K(u) = (2, 1) + u(-1, 3) = (2 - u, 1 + 3u)$. Diese Gerade läßt sich sofort zeichnen. Die Vorgabe ähnelt der Punkt-Richtungsform der Geradengleichung.

(4.3.20) Wie gelangt man jetzt zu einer der üblichen Geradengleichungen? Nun, für jeden Punkt der Geraden haben wir die beiden zugehörigen Koordinaten als Funktion des Parameters. Im Beispiel $x = 2 - u$ und $y = 1 + 3u$. Bei der Gleichungsbeschreibung fällt der Parameter heraus, wird nicht länger benötigt. Wir stellen die erste Gleichung nach u um und setzen das in die zweite Gleichung ein. Im Beispiel: $u = 2 - x$. Einsetzen gibt $y = 1 + 3(2 - x) = 7 - 3x$. Das ist die Normalform der Geradengleichung!
(4.3.21) Geht es auch umgekehrt? Eine Gerade sei durch die Gleichung $y = mx + b$ gegeben. Wir suchen eine Parametrisierung. Dazu brauchen wir einen Punkt auf der Geraden. etwa $x_S^K = (0, b)$. Und wir brauchen einen Richtungsvektor. Den erhalten wir über die Steigung leicht zu $\vec{e}^K = (1, m)$. Also ist $\vec{x}_g(\alpha) = (0, b) + \alpha(1, m)$ eine mögliche Parametrisierung.

□ Läßt sich das auf Geraden im Raum verallgemeinern? Hinweis: Sie erhalten bzw. benötigen 2 Gleichungen für die drei Koordinaten der Geradenpunkte.

4.3i: **Zusammenfassung**

(4.3.22) Fassen wir zusammen, was wir zur vektoriellen Beschreibung von Geraden überlegt haben. Die Beschreibung läuft unter dem Stichwort Parametrisierung, im Gegensatz zu Gleichungsbeschreibung.

- Wir haben zunächst die allgemeine Beschreibungsformel $\alpha \mapsto \vec{x}_g(\alpha) = \vec{a} + \alpha\vec{d}$ hergeleitet und interpretiert.
- Anschließend haben wir Ergänzungen zu dieser Formel gegeben, die sämtlich naheliegende zugehörige Probleme behandelten. Wir haben:
  - den Übergang von der Ortsvektor- zur Koordinatenvektorbeschreibung besprochen
  - das Schema zur Gewinnung einer Geradenparametrisierung formuliert
  - die Möglichkeit unterschiedlicher Parametrisierungen derselben Geraden aufgezeigt
  - die Beschreibungsformel hergeleitet, die man erhält, wenn zwei Punkte vorgegeben sind
  - in der Ebene den Zusammenhang zwischen Gleichungsbeschreibung und Parameterbeschreibung von Geraden hergestellt.

Kap.4.4: **Ebenen im Raum**

Ebenen im Raum sind die einfachsten Mengen mit zwei inneren Freiheitsgraden, also die einfachsten Flächen.

(4.4.1) Hat man die vektorielle Beschreibung von Geraden im Raum verstanden, fällt die analoge Beschreibung von Ebenen nicht schwer. Eine Ebene im Raum ist qualitativ zunächst erneut eine Punktmenge des Konfigurationsraumes E^3 mit ganz charakteristischen Eigenschaften. Sie wird nicht wie eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt, sondern durch drei, die nicht alle auf einer Geraden liegen dürfen.

⇓ Unser Ziel ist, jeden Punkt einer Ebene durch Festlegung seines Ortsvektors (bei festem Ursprung) anzugeben. Und dieser Ortsvektor sollte mit Hilfe eines einfachen Rechenausdrucks darstellbar sein. (Im Kapitel über das Skalarprodukt, insbesondere in (6.1.38), werden wir auch Gleichungsbeschreibungen von Ebenen besprechen).

(4.4.2) Wir fixieren zunächst erneut nur den Ursprung 0 und gehen zu einem festen Punkt P der Ebene E (Bezeichnung!). Der zugehörige Ortsvektor sei $\vec{x}_P$. Dieser Ortsvektor liegt als Pfeil in der Regel nicht ganz in der Ebene, nur sein Endpunkt P gehört dazu. Als Nächstes wählen wir einen Richtungsvektor $\vec{e}$ in der Ebene und bilden die durch $\vec{x}_P + \alpha\vec{e}$ beschriebene Gerade. Das ist eine Gerade in der Ebene. Nun gibt es in E noch weitere Richtungen, die nicht auf der Geraden liegen. Wir wählen eine davon, sagen wir $\vec{f}$. **Jetzt verschieben wir die Gerade in der Ebene parallel in Richtung $\vec{f}$.** Dann erreichen wir mit der Geraden jeden Punkt der Ebene genau einmal. Die Paralleverschiebung können wir aber leicht als Formel verwirklichen. Wir müssen nur den Aufpunkt P in Richtung von $\vec{f}$ verschieben. Für den Ortsvektor des Aufpunktes heißt das, aus $\vec{x}_P$ wird $\left(\vec{x}_P + \beta\vec{f}\right)$ mit beliebigem (freiem) Zahlfaktor β. Damit haben wir die gesuchte Formel:

$$\boxed{\vec{x}_E(\alpha,\beta) = \vec{x}_P + \alpha\vec{e} + \beta\vec{f}.}$$

(4.4.3) Hier haben wir es mit **zwei** freien Parametern zu tun. Oder auch: Die Ebene ist eine Figur mit **zwei (inneren) Freiheitsgraden**. Zu jedem Punkte Q der Ebene gibt es ein eindeutig bestimmtes Namenstupel (α_Q, β_Q), für das $\vec{x}_E(\alpha_Q, \beta_Q) = \vec{x}_Q$ gilt. (Wir wissen noch nicht, wie man dieses Namenspaar berechnet, aber unsere Konstruktion zeigt uns, dass es ein solches Paar (α_Q, β_Q) geben muß, wir können es bereits bezeichnen. Das nicht triviale Berechnungsproblem merken wir uns, um es später auf mehrere Weisen zu lösen. Vgl. das Vorgehen in (1.3.4))

! **(4.4.4)** Nochmals die zur vektoriellen Ebenenbeschreibung gehörigen Begriffe:

α, β	Die Parameter, zwei freie Parameter. Dürfen umbenannt werden.
$\vec{x}_E(\alpha,\beta)$	Gelesen "x-E-von α, β". **Kein Produkt!**" **Bezeichnung** des Ortsvektors, der zum Parameterpaar (α, β) gehört.
$\vec{x}_P + \alpha\vec{e} + \beta\vec{f}$	Berechnungsterm für den Ortsvektor. Eingabe eines $\alpha, \beta - Paares$ ergibt den Ortsvektor.
$\vec{x}_P$	Der *Aufpunktvektor* der Parametrisierung. Äußerer Parameter. P liegt in E.
$\vec{e}, \vec{f}$	Zwei *Richtungsvektoren* der Ebene mit **verschiedenen**.Richtungen Äußere Parameter.
$\alpha \mapsto \vec{x}_g(\alpha)$	Die gesamte Zuordnung heißt *eine (vektorielle) Parametrisierung der Ebene E.*.

T Beachten Sie: "*Verschiedene Richtungen*" verlangt auch, dass keiner der beiden Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{f}$ der Nullvektor ist! Darauf ist zu achten. Solche Paare von Vektoren (unterschiedlicher Richtung) werden wir auch *unabhängig* nennen.

⇓ Ein guter und verstandener Formalismus läßt sich meist auch bequem verallgemeinern. Diese wichtige Leistung wollen wir jetzt beispielhaft üben, indem wir die Resultate der Geradenbeschreibung auf den Fall der Ebene verallgemeinern.

☐ Eine Ebene E sei durch eine Parametrisierung beschrieben $\vec{x}_E(\alpha,\beta) = \vec{x}_P + \alpha\vec{e} + \beta\vec{f}$. Wie kann man die Ebene E in Richtung von $\vec{k}$ parallel verschieben? (Eine Parametrisierung der verschobenen Ebene ist anzugeben.)
(4.4.5) Bisher haben wir wieder nur mit Ortsvektoren gearbeitet. Begründen Sie den Übergang zu der Koordinatenvektorbeschreibung mit Hilfe der Gleichungen (3.3.27):

$$\boxed{\vec{x}_E^K(\alpha,\beta) = \vec{x}_P^K + \alpha\vec{e}^K + \beta\vec{f}^K.}$$

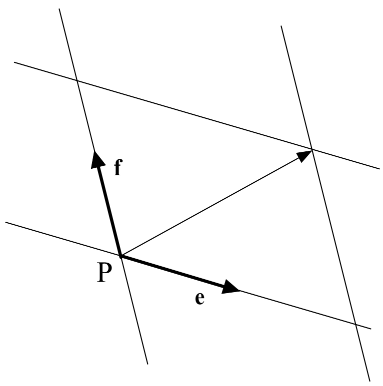
(4.4.6) Ein Beispiel, wie man eine Ebene über eine vektorielle Beschreibung vorgibt: Die Ebene H soll parallel zur x-y-Ebene verlaufen und die z-Achse in der Höhe h schneiden. Die letzte Angabe liefert uns einen Punkt der Ebene mit Koordinatenvektor (0,0,h). Zwei unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind $\vec{e}_1^K = (1,0,0)$ und $\vec{e}_2^K = (0,1,0)$. Natürlich hätte man auch andere wählen können. Aber diese beiden bieten sich als besonders einfach an. Damit haben wir alle Zutaten (=äußere Parameter) der Ebenenbeschreibung und erhalten

$$\vec{x}_H(u,v) = (0,0,h) + u(1,0,0) + v(0,1,0) = (u,v,h).$$

Die Parameter haben wir mit u und v bezeichnet. Überdies haben wir die geometrische Form zusätzlich in die Tripelform umgewandelt. (Denken Sie an die Rollen: u und v sind hier unabhängige Parameter. h dagegen ist äußerer Parameter!).
(4.4.7) In der hergeleiteten Formel darf (und soll) man Zahlen einsetzen um so Koordinatenvektoren von einzelnen Punkten der Ebene zu erhalten. Jede Wahl von u und v liefert ja einen solchen. Etwa:

$$\vec{x}_H^K(1,2) = (1,2,h) \quad \text{oder} \quad \vec{x}_H^K(7,a+2) = (7,a+2,h) \quad \text{usw..}$$

(4.4.8) Eine Parametrisierung der Ebene kann geometrisch auch als **Vorgabe eines Koordinatensystems innerhalb der Ebene** interpretiert werden! Dazu legen wir zunächst unsere Papierebene in Gedanken in die Ebene. Der Punkt P sei der Ursprung. Dann zeichnen wir eine Koordinatenachse in Richtung von $\vec{e}$ und eine zweite in Richtung von $\vec{f}$. Die beiden Richtungen müssen nicht aufeinander senkrecht stehen. Den Summenvektor $u\vec{e} + v\vec{f}$ erhalten wir über die Parallelogrammkonstruktion (3.3.8). Dann lassen sich u und v als Koordinaten des Endpunktes (in der Ebene) interpretieren!



☐ Welche Figur erhält man, wenn man $0 \leq u,v \leq 1$ verlangt? Welche, wenn man $1 \leq u,v$ verlangt usw. Insgesamt ergibt sich eine Zerlegung der Ebene in 9 Bereiche. Machen Sie eine Skizze. Die Lösung sollte in Form einer geometrischen Konstruktionsbeschreibung erfolgen.
(4.4.9) Die nachfolgende Konstruktion sollte genau verstanden und beherrscht werden!
☐ Es sei ein Punkt Q der Ebene mit Ortsvektor $\vec{x}_Q = \vec{x}_P + u_Q\vec{e} + v_Q\vec{f}$ gegeben. Der Ursprung der Zeichenebene liege wieder in P. **Bestimmen Sie $\mathbf{u}_Q$ und $\mathbf{v}_Q$** geometrisch. D.h. entwickeln Sie ein Konstruktionsverfahren, mit dem Sie aus gegebenen Vektoren $\vec{e}, \vec{f}$ und $\vec{s} = u_Q\vec{e} + v_Q\vec{f}$ die beiden Zahlwerte u_Q und v_Q erhalten!
(4.4.10) Eine Ebene (im Raum) wird vielfach durch Vorgabe von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmt. D.h. für uns, dass die drei Ortsvektoren $\vec{x}_P, \vec{x}_Q$ und $\vec{x}_R$ dieser Punkte gegeben sind.
☐ Begründen Sie die folgende *Dreipunkteform* der Ebenenparametrisierung:

$$\boxed{\vec{x}_E(\alpha,\beta) = \vec{x}_P + \alpha(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) + \beta(\vec{x}_R - \vec{x}_P)}$$

Statt P als Aufpunkt zu nehmen, hätte man auch Q oder R wählen können. Aber erneut eine zu merkende Konvention: **Der Vektor, der als Aufpunkt gewählt ist, sollte in den Differenzvektoren immer mit negativem Zeichen auftauchen.** Mit den Regeln der Vektorrechnung allein läßt sich diese Gleichung (durch Sortieren nach den Vektoren) auch in die folgende Form bringen

$$\begin{aligned} \vec{x}_E(\alpha,\beta) &= (1-\alpha-\beta)\vec{x}_P + \alpha\vec{x}_Q + \beta\vec{x}_R \\ &= \gamma\vec{x}_P + \alpha\vec{x}_Q + \beta\vec{x}_R \quad \text{mit} \quad \alpha+\beta+\gamma = 1 \end{aligned}$$

Hierbei ist in der zweiten Zeile $\gamma = 1-\alpha-\beta$ als Hilfsgröße zu interpretieren.

☐ Denken Sie sich selbst zur Konsolidierung ein Beispiel (für die Dreipunkteform) aus.

☐ Die drei Punkte P,Q und R erzeugen ein Dreieck in der zugehörigen Ebene. Wie sind α und β zu wählen, damit man gerade die Punkte dieses Dreiecks erhält? Wie erhält man die drei Seiten?

(4.4.11) Es liegt nahe, die Formel der Ebenenbeschreibung mit unserer Hauptformel $\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ zu vergleichen! Die nachfolgende Tabelle tut dies:

$\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$		x,y,z beliebig	Allgemein (f=3)
$\vec{x}_g(y) = \vec{a} + y\vec{b}$		x=1,ybeliebig,z=0	Gerade (f=1)
$\vec{x}_E(y,z) = \vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$		x=1,y und z beliebig	Ebene (f=2)
$\vec{x}_E(y,z) = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$		x+y+z=1, sonst beliebig	Dreipunkteform (f=2)

Wir sehen, dass stets Spezialfälle der zentralen Formel vorliegen, bei der bestimmte Koeffizienten 1 oder 0 gesetzt sind.

☐ Wie hängt die Dreipunkteform der Ebene mit der Schwerpunktformel zusammen? Welche Interpretation ergibt sich? (x,y,z dürfen beliebig sein, wenn sie nur die Nebenbedingung x+y+z=1 erfüllen. Etwa x=4, y=-2 und z=-1. Was ist aber, wenn man zusätzlich x,y,z$\geq$ 0 fordert? Wo sollte dann der Schwerpunkt liegen? Tut er das tatsächlich? Klären Sie das.

(4.4.12) Die Berechnungsformeln unserer Parametrisierungen lassen sich allein mit dem Formalismus der allgemeinen Vektorrechnung bilden. Man kann sie daher in jedem Vektorraum bilden, etwa im $\mathbb{R}^4$ oder allgemeiner im $\mathbb{R}^n$. Damit kann man dort sofort Geraden und Ebenen erklären! Man hat nur die Formeln zu übernehmen und alle Vektoren als entsprechende Tupel zu interpretieren. Die nachfolgende Frage gibt ein interessantes Beispiel:

☐ Im $\mathbb{R}^2$ beschreiben die vier Vektoren (0,0), (0,1), (1,0) und (1,1) die vier Eckpunkte eines Quadrates. Das Quadrat hat vier Kanten. Eine wird beispielsweise durch (1,y) mit 0$\leq$ y $\leq$ 1 beschreiben. Machen Sie eine Skizze. In drei Dimensionen kann man analog dazu den Einheitswürfel vektoriell beschreiben. (1,1,1) ist einer der 8 Eckpunkte. Und (0,1,z) mit 0$\leq$ z $\leq$ 1 beschreibt eine der 12 Kanten. Und (0,y,z) mit $0 \leq y, z \leq 1$ beschreibt eines der 6 Oberflächenquadrate. Machen Sie auch hier eine Skizze. Und jetzt gehen Sie zum **vierdimensionalen Würfel** über! Wieviele Eckpunkte hat er, wieviele Kanten in Form von Strecken und Quadraten? Und wieviele dreidimensionale Oberflächenwürfel? Wie beschreibt man all diese Objekte vektoriell?

Kap.4.5: **Flugparabeln**

! *Im Sinne der in Kap.3.4 gegebenen Klassifikation gehört die Geradenparametrisierung formal zu den* ***Bahnkurven:*** *Einer Zahl wird ein Vektor zugeordnet. Und tatsächlich haben wir die geradlinig gleichförmige Bewegung in Kap. 4.3.7 mit Hilfe einer Formel vom Typ einer Geradenparametrisierung beschrieben. Wir wollen jetzt eine andere physikalisch wichtige Bewegung behandeln, erneut in der Form einer Bahnkurve. Mit Hilfe dieser Bahnkurve lassen sich die vektoriellen Rechenmethoden sehr schön illustrieren und zahlreiche elementare Anwendungen besprechen.*

4.5a: **Voraussetzungen**

(4.5.1) Der nachfolgende Einschub beschreibt genauer worum es geht, gibt insbesondere die Bedingungen an, unter denen die **vektorielle Flugparabelbeschreibung** gilt. Es werden also die Bedingungen zusammengestellt, unter denen man die Resultate dieses Textteiles modular einsetzen kann.

Vor.	Ein Körper sei als Massenpunkt idealisierbar. Auf ihn wirke nur ein einziger Einfluß in Form einer (örtlich und zeitlich) konstanten Kraft.
⧫	D.h. der Einfluß der Außenwelt auf diesen Körper kann stets durch ein festes Element $\vec{F} \in V^3$ - also durch einen einzigen freien Vektor - beschrieben werden.
⧫	D.h. die Kraft auf den Körper hat an jedem Ort und auch für jede Geschwindigkeit dieselbe Richtung und dieselbe Stärke.
$\Rightarrow$	**Dann** zeigt die Mechanik, dass der Körper notwendig eine parabelförmige Bewegung ausführt, die wir *Flugparabel* nennen wollen und die sich gut vektoriell beschreiben läßt.

(4.5.2) Der wichtigste Anwendungsfall der geschilderten Situation ist der *freie Flug im konstanten Schwerefeld der Erde.* Unsere Bedingungen verlangen, dass man die Luftreibung vernachlässigen kann und dass die Bewegung in einem so kleinen Bereich erfolgt, dass die Erdanziehung als konstant asngenommen werden darf und dass auch der Einfluß der Erdrotation vernachlässigbar ist. Es gibt aber durchaus weitere Realisierungen, etwa die Bewegung einer elektrischen Ladung in einem Plattenkondensator.

4.5b: **Die Flugparabelformel**

? **(4.5.3)** Was interessiert physikalisch am Verhalten des Massenpunktes in einer Situation der beschriebenen Art? Was möchte man wissen?

> ! **(4.5.4)** Die zentrale Eigenschaft, die man zur Beschreibung benötigt, ist **der Ort des Massenpunktes zur (beliebigen) Zeit t.** Diesen Ort möchte man angeben können. Es zeigt sich, dass man daraus alle weiteren interessierenden Eigenschaften rechnerisch erhält.

Wir können den Ort entweder als Ortsvektor oder als Koordinatenvektor (bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems) festlegen. Man benötigt einen Rechenausdruck, in den man den (beliebig wählbaren) Zeitpunkt eingeben kann und den zugehörigen Ortsvektor erhält. (Vgl. die Typisierung der Terme in Kap. 3.4).

(4.5.5) Man beobachtet den Massenpunkt im Zeitraum $t_a \leq t \leq t_e$, den wir den Beobachtungszeitraum nennen wollen. Per Idealisierung wird man das meist auf **alle** Zeiten ($t \in \mathbb{R}$) ausdehnen. Den Ortsvektor zur Zeit t wollen wir mit $\vec{r}(t)$ bezeichnen. (r-von-t. Kein Produkt!) Wir haben es erneut mit einer Zuordnung zu tun:

$t \mapsto \vec{r}(t)$	Zuordnung
t	Zeitpunkt, meist freie oder unabhängige Variable
$\vec{r}(t)$	Ortsvektor zur Zeit t, aus V_0^3, meist abhängige Variable
$\vec{r}(3)$	Ortsvektor zur Zeit 3, nicht $\vec{r}(t=3)$ schreiben.

☐ Was besagt $\vec{r}^K(2) = (0,0,7)$? (Antwort: Zur Zeit 2 befindet sich der Punkt am Ort mit Koordinatenvektor (0,0,7), trifft also die z-Achse in z=7.)

(4.5.6) Mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung der Mechanik folgt unter den oben genannten (idealen) Bedingungen die folgende Berechnungsformel für $\vec{r}(t)$. *Wie* diese Folgerung zustande kommt, interessiert hier nicht, da wir ja den **Umgang** mit einer derartigen Vektorformel - ihre Verwendung - üben wollen. (Vgl. Kap.1.8.1 *Modulares Arbeiten*).

! **Die allgemeine Berechnungsformel für eine Flugparabel:**

$$\boxed{t \longmapsto \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} \vec{g}, \vec{v}_0 \in V^3 \\ \vec{r}_0 \in V_0^3\ ,\ \ \mathrm{t}_0 \in \mathbb{R} \end{array}}$$

T Welche Bedeutung haben die einzelnen Größen in dieser Formel?

$\vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$	Die auf den Punkt (der Masse m) wirkende Beschleunigung. Beschreibt den Umwelteinfluß auf den Massenpunkt.
t_0	Der *Beobachtungszeitpunkt.* Ein Zeitpunkt, für den man Information über den Zustand des Massenpunktes besitzt
$\vec{r}_0$	Der Ortsvektor zur Zeit $\mathrm{t}=\mathrm{t}_0$. Es gilt also $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$.
$\vec{v}_0$	Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit t_0. Es gilt $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$.

(4.5.7) Das übliche Vorgehen zur Festlegung einer Flugparabel sieht so aus: Die Situation legt zunächst $\vec{g}$ als äußeren Parameter fest. Häufig fixiert die Aufgabe $\vec{g}$ auf einen bestimmten Wert und man rechnet trotzdem zunächst mit allgemeinem $\vec{g}$. Dann sucht man nach einem Zeitpunkt, für den man **Information über die zu betrachtende Bahn** besitzt. Dieser Zeitpunkt wird mit t_0 bezeichnet. $t_0 = 0$ ist möglich, aber häufig wird man einen anderen Wert vorziehen. Dann versucht man, den Ortsvektor zum Zeitpunkt t_0 aus den Angaben zu bestimmen. Meist ist er direkt angegeben. Das gibt $\vec{r}_0$. Und schließlich benötigt man die momentane Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt. Das ist $\vec{v}_0$. Hat man diese Angaben (10 Zahlangaben = äußere Freiheitsgrade für die Flugparabel!), so setzt man sie in die Formel für die Flugparabel ein **und ist am Ziel. Denn jetzt kann man den Ortsvektor für alle Zeiten rechnerisch bestimmen.** t ist freie Variable, man darf dafür einen beliebigen Wert einsetzen. Also ein innerer Freiheitsgrad.

(4.5.8) Neben dem Ort interessiert vielfach noch die momentane Geschwindigkeit des Punktes (zur Zeit t). Diese bezeichnen wir mit $\vec{v}(t)$. Wir werden später sehen, dass man sie aus der Bahnkurvenformel berechnen kann. Das (leicht zu merkende) Resultat nehmen wir vorweg.

! **Die Formel für die momentane Geschwindigkeit einer Flugparabel:**

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}(t - t_0) + \vec{v}_0}.$$

Die Konstanten haben dieselben Werte und Bedeutung wie in der Flugparabelformel. $\vec{r}_0$ kommt nicht mehr vor. Beachten Sie, dass t in beiden Formeln immer nur in der Form $\mathrm{t}\text{-}\mathrm{t}_0$ vorkommt, also als Abweichung von t_0. Insbesondere folgt sofort $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ und $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$, was ja hineingesteckt ist. Beachten Sie, dass die Geschwindigkeitsformel die Form einer Geradenparametrisierung hat: Die Geschwindigkeit ändert sich wie der Ortsvektor einer Geradenparametrisierung.

(4.5.9) $\vec{r}_0$ und $\vec{v}_0$ werden aus historischen Gründen meist *Anfangswerte* genannt. Das suggeriert, dass die Bewegung im Zeitpunkt t_0 *anfängt* und dass es nicht zulässig sei, Werte vor diesem Zeitpunkt zu bestimmen. Das ist manchmal korrekt (*Abschuß einer Kanone*) , meist aber Unsinn. Unsere oben gegebene Erläuterung (Zeitpunkt mit Information über die Bahn) vermeidet diese Falle.

☐ Die Größe $\vec{g}$ ist äußerer Parameter. Jede Wahl liefert uns eine mögliche Bewegung. Was ergibt sich für $\vec{g} = \vec{0}$ als Spezielfall der Flugparabel? Betrachten Sie $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$.

☐ Was für eine spezielle Bewegung ergibt sich für $\vec{v}_0 = \vec{0}$?

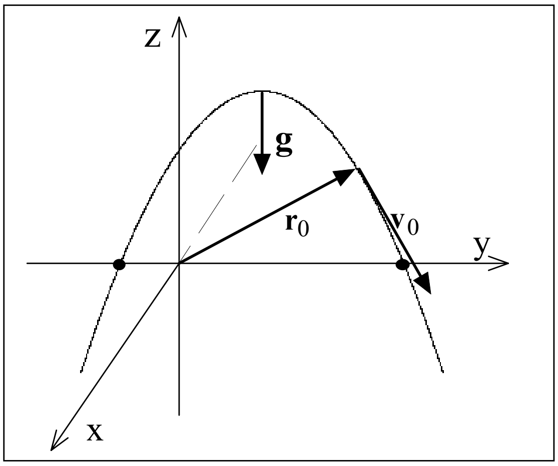
☐ Ein Flugparabel sei wie in (4.5.6) gegeben. Bestimmen sie die Größen $\vec{s}_0 = \vec{r}(0)$ und $\vec{w}_0 = \vec{v}(0)$. Damit haben Sie Information über den Systemzustand zur Zeit t= 0. Damit können Sie die Formel für die Flugparabel erneut bilden. (Jetzt für $\mathrm{t}_0 = 0$.) Zeigen Sie, dass die neue Formel durch Termumformung entsteht, dass keineswegs eine Umparametrisierung vorliegt. (Rollen und Rollenwechsel der beteiligten Größen?)

☐ Können Sie die beiden Hauptformeln zur Flugparabel und deren Interpretation rekonstruieren? Bemühen Sie sich unbedingt darum.

(4.5.10) Bisher haben wir alle Formeln auf der Ebene der Ortsvektoren behandelt. Man kann jedoch in der üblichen Weise problemlos zu den Formeln für **Koordinatenvektoren** übergehen. Formulieren wir die Formeln für beide Größen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}^K(t) = \vec{r}_0^K + \vec{v}_0^K(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}^K(t-t_0)^2 \\ \vec{v}^K(t) = \vec{v}_0^K + \vec{g}^K(t-t_0) \end{array}}$$

(4.5.11) An dieser Stelle sollte etwas über die **Wahl des Koordinatensystems** gesagt werden. Vgl.(2.3.5). Zunächst ist - über die Problemsituation - immer die physikalisch geometrische Konfiguration gegeben. In diese Konfiguration hinein denkt man sich die Koordinatenachsen geeignet gelegt. *Geeignet* heißt, dass die entstehenden Komponentengleichungen in $\mathbb{R}^3_K$ eine günstige, meist besonders einfache Form erhalten. Und dann stellt man sich vor, dass alles so gedreht wird, bis eine ganz bestimmte Lage relativ zur Papierebene entsteht. Im Falle der Flugparabel geht man üblicherweise so vor, dass die negative z-Achse in Richtung von $\vec{g}$ zeigt. Das bedeutet $\vec{g}^K = (0,0,-g)$ mit $g>0$ gilt. Denken Sie daran, dass wir in (2.3.6) vereinbart haben, dass die Papierebene gleich der y-z-Ebene sein soll. Dann ist im üblichen Bild, die x-y-Ebene gleich der Horizontalebene, die senkrecht auf $\vec{g}$ steht. Der Scheitel der Flugbahn hat -nicht eingezeichnet- einen Koordinatenvektor $\vec{x}_S^K = (0, y_S, z_S)$. Manchmal ist es günstig, y_S und z_s als geometrische Längeneinheiten der zugehörigen Koordinatenachsen zu verwenden.



(4.5.12) Beispiel: **Bestimme die Flugbahn eines Geschosses (im konstanten Schwerefeld), das zur Zeit t=0 im Ursprung unter dem Winkel α und der (skalaren) Geschwindigkeit v_0 abgeschossen wird.**
Eine konkreten Wert der Beschleunigung ist nicht anggegeben. Wir setzen daher $\vec{g}^K = (0,0,-g)$ an, wobei g äußerer Parameter ist. Wir haben Information über die Flugbahn zur Zeit t=0. D.h. $t_0 = 0$. (Beachten Sie, wie sich dann die Formeln vereinfachen!). Ort zur Zeit t_0=0 ist der Ursprung, Also $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Die Richtung der zugehörigen Geschwindigkeit in der Horizontalebene ist nicht angegeben. Wir legen die y-z-Ebene so, dass sie die Geschwindigkeit enthält. Also $\vec{v}_0^K = (0, v_{0y}, v_{0z})$. Eine Skizze zeigt, dass $v_{0y} = v\cos\alpha$ und $v_{0z} = v\sin\alpha$ gilt. Oder $\vec{v}_0^K = v(0,\cos\alpha,\sin\alpha)$. Dabei ist v der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$.
Damit verfügt man bereits über alle Größen, die das Festlegungsschema fordert. Man kann die gesuchte Flugparabel unmittelbar **hinschreiben**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}^K(t) = (0,0,0) + v(0,\cos\alpha,\sin\alpha)(t-0) + \frac{1}{2}(0,0,-g)(t-0)^2 \\ \vec{v}^K(t) = v(0,\cos\alpha,\sin\alpha) + (0,0,-g)(t-0). \end{array}}$$

Alles Weitere folgt aus diesen beiden Formeln.
Üblicherweise wird man die **Festlegung einer Flugparabel** nicht so ausführlich formulieren. Man wird nur die Punkte angeben, an denen man eine Wahl trifft. Und man wird in der Endformel kommentarlos naheliegende Vereinfachungen vornehmen, etwa sofort t statt t-0 schreiben.
(4.5.13) Lesen sie nochmals die Aufgabenstellung. Dann sollte die Formulierung der Antwort etwa wie folgt (und nicht länger!) aussehen:

$t_0 = 0$. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $\vec{g}^K = (0, 0, -g)$ mit g>0 wird und $\vec{v}_0^K = (0, v\cos\alpha, v\sin\alpha)$. Weiter ist $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Das ergibt die folgende Flugparabel:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}^K(t) = (0, v\cos\alpha, v\sin\alpha)t + \frac{1}{2}(0,0,-g)t^2 = (0, vt\cos\alpha, vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2) \\ \vec{v}^K(t) = (0, v\cos\alpha, v\sin\alpha) + (0,0,-g)t = (0, v\cos\alpha, v\sin\alpha - gt). \end{array}}$$

Dabei wurde die Flugparabel auch gleich aus der geometrischen in die Tupelform gebracht. Vgl. (4.1.4-6). **Letztere wird meist benötigt**. Formuliert wird so, dass man die für das Schema benötigten Eingabegrößen sowie die Wahl des Koordinatensystems erkennen kann, nicht mehr. Sind insbesondere in der Aufgabenstellung noch konkrete Zahlwerte gegeben, etwa g=9.81m/s^2 und $v_{0y} = 10m/s$ und $v_{0z} = 20m/s$, wird auch kaum mehr Text geschrieben. Man gibt vielmehr unmittelbar die Flugparabel an und dazu die konkreten Werte.

$$\begin{array}{l} \vec{r}^K(t) = (0, v_{0y}t, v_{0z}t - \frac{g}{2}t^2) \quad \text{mit g=9.81m/s}^2,\ \ v_{0y} = 10m/s,\ \ v_{0z} = 20m/s. \\ \vec{v}^k(t) = (0, v_{0y}, v_{0z} - gt) \end{array}$$

? **Warum dieses Vorgehen?** Nun, die Erstellung der Flugparabelformel ist nicht Selbstzweck, sondern sie ist **Ausgangspunkt für die Behandlung eigentlich interessierender Probleme zu den Flugbahnen**! Es ist ein dazu notwendiger vorgeschalteter Routineschritt. Die eigentliche Gedankenarbeit beginnt in der Regel erst danach. In Kap. 4.6.2 geben wir dazu ein Beispiel. Zuvor setzen wir die Diskussion der allgemeinen Formel fort.

4.5c: **Geometrische Interpretation der Formel**

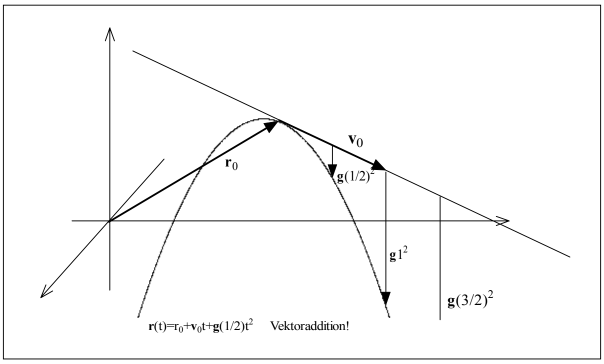
(4.5.14) Wie sehen die Bahnen geometrisch aus, die durch unsere Vektorformeln erfaßt werden? Will man weitergehende Probleme zu Flugbahnen behandeln, so benötigt man zugehörige geometrische Vorstellungen und muss in der Lage sein, diese mit den Vektorformeln zu verknüpfen.
(4.5.15) Wir beginnen damit, dass wir die Formel der Flugparabel mit der der Ebenenparametrisierung vergleichen. Dabei wählen wir $t_0 = 0$. Die betrachtete Ebene E sei wie folgt bestimmt: Sie gehe durch den Endpunkt von $\vec{r}_0$ und $\vec{g}$ sowie $\vec{v}_0$ seien zugehörige Richtungsvektoren. Dann vergleichen wir:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t \mapsto & \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}_0 + (\frac{1}{2}t^2)\vec{g} \\ t \mapsto & \vec{x}_E(t, \frac{1}{2}t^2) = \vec{r}_0 + t\vec{v}_0 + (\frac{1}{2}t^2)\vec{g} \\ (t,s) \mapsto & \vec{x}_E(t,s) = \vec{r}_0 + t\vec{v}_0 + s\vec{g} \end{array}}$$

D.h.: Der Massenpunkt verläuft ganz in in der Ebene E, die durch $\vec{r}_0$ geht und durch die (als unabhängig vorausgesetzten) Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{v}_0$ bestimmt wird. Es liegt also immer *eine ebene Bewegung im Raume* vor.
(4.5.15) Überdies haben wir über die Parallelogramminterpretation der Vektoraddition die folgende einfache geometrische Konstruktion der Flugbahn und damit der Bewegung:

(1)	Gehe nach $\vec{r}_0$. Dann hat man $\vec{r}(t_0)$
	Dann erhält man $\vec{r}(t_0 + k)$ innerhalb von E wie folgt:
(2)	Gehen (vektoriell) um die Strecke $k\vec{v}_0$ weiter.
(3)	Und dann um $\frac{1}{2}k^2\vec{g}$. Der Endpunkt ergibt den gesuchten Ortsvektor $\vec{r}(t_0 + k)$

Das sieht bereits sehr nach Parabel aus. Aber denken Sie daran, dass $\vec{g}$ und $\vec{v}_0$ i.a. nicht aufeinander senkrecht stehen. Im Extremfall können sie sogar dieselbe Richtung haben.



4.5d: **Projektionen - Die Koordinatenfunktionen einer Bahnkurve**

(4.5.16) Wir betrachten allgemeiner eine beliebige Bahnkurve $t \mapsto \vec{r}(t)$, also einen Massenpunkt, der sich mit der Zeit im Konfigurationsraum bewegt und zur Zeit t den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ besitzt. Hierzu führen wir ein volles Koordinatensystem ein und bilden die Zuordnung $t \mapsto r^K(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Die letzte Gleichung beinhaltet die typische **Einführung einer Bezeichnung!** (Rolle. Vgl. (1.8.10)).Wir wissen, dass für jedes t ein Zahltripel vorliegt. Also geben wir den drei t-abhängigen Komponenten eine Namen. x(t) bezeichnet die erste Komponente von $\vec{r}^K(t)$ usw. Infolge der Zeitabhängigkeit liegen drei Funktionen $t \mapsto x(t)$ usw. vor. Wir nennen diese Funktionen die *Koordinatenfunktionen* der Bahnkurve. Für Beispiel (4.5.13) etwa gilt x(t)=0 und $y(t) = vt\cos\alpha$ un $z(t) = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.
(4.5.17) Welche geometrische Bedeutung haben diese drei Funktionen? Wir stellen uns dazu vor, dass wir die Bahn des Massenpunktes mit achsenparallelen Lichtstrahlen beleuchten. Zunächst bilden wir den Schatten des Punktes auf die drei Koordinatenebenen. Die Bahn des Schattens ergibt sich aus $\vec{r}^K(t)$, indem man eine der Koordinatenfunktionen durch Null ersetzt. $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ beschreibt die Schattenbahn in der x-y-Ebene. Im Falle der Flugparabel (mit der oben besprochenen Koordinatenwahl) gibt das

$$t \mapsto (x_0 + v_{0x}t, y_0 + v_{0y}t, 0) = (x_{0,y_0}, 0) + t(v_{0x}, v_{0y}, 0).$$

Und das ist eine geradlinig gleichförmige Bewegung in der x-y-Ebene. Ein nützliches Resultat, das man sich merken sollte. Oder auch: In der Ebene, die senkrecht zu $\vec{g}$ steht, bewegt sich der Schatten mit konstanter Geschwindigkeit.
T Üblicherweise nennt man derartige Schattenabbildungen *Projektionen* oder *Projektionsabbildungen.*
(4.5.18) Projiziert man den Schatten jetzt weiter auf die zugehörigen Koordinatenachsen, so erhält man die Koordinatenfunktionen. $t \mapsto x(t)$ etwa ist die Projektion der Bahnbewegung auf die x-Achse. Im Falle der Flugparabel (mit üblichem Koordinatensystem) ist die Projektion $t \mapsto z(t) = z_0 + v_z(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_o)^2$ ein quadratischer Ausdruck in t. Vgl. (1.5.2).
☐ Wie muss man das Licht einfallen lassen, damit man eine Koordinatenfunktion, etwa z(t), als Ergebnis einer einzigen Projektion erhält?
☐ Zeigen Sie: Der Schatten auf der z-Achse, also z(t), verhält sich wie ein im Schwerefeld senkrecht fallender bzw. steigender Körper.
(4.5.19) Der Nutzen: **Geometrische Bedingungen werden gerne als Bedingungen an die Koordinatenfunktionen formuliert.** Der Schnitt mit der Hotizontalebene erfolgt beispielsweise für z(t)=0.
(4.5.20) Vielfach gibt man allgemeiner Bahnkurven vor, indem man die drei Koordinatenfunktionen bestimmt. Ein besonders wichtiges Beispiel hierfür ist die Kreisbewegung. Wir legen sie in die x-y-Ebene und nehmen den Ursprung als Mittelpunkt. Eine Skizze gibt einem unmittelbar die Projektionen und damit die gesamte Bahnkurve:

$$\boxed{t \mapsto \vec{s}^K(t) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), 0) \quad \omega \text{ ein äußerer Parameter.}}$$

☐ Was für eine Bewegung wird durch $t \mapsto (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), ht)$ beschrieben? Was für eine Bewegung durch $t \mapsto (x_0, y_0 + v(t-t_0), z_0)$.

4.5e: **Die Bahnform der Flugparabel**

!⇓ **Wir wollen jetzt zeigen, dass die Bahnform einer Flugparabel eine Parabel ist.**
(4.5.20) Dazu müssen wir nur einige frühere Überlegungen geeignet zusammensetzen: Eine Parabel erkennen wir über eine *Parabelgleichung*, d.h. wir benötigen eine Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten der Parabelpunkte. Vgl. Kap.1.6. Eine solche Gleichung müssen wir aus der vektoriellen Parametrisierung gewinnen.
(4.5.21) Wir legen unser Koordinatensystem wie in (4.5.12) besprochen. $t_0 = 0$. Dann erhalten wir aus der Tupelform die folgenden drei Koordinatenfunktionen:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = 0 \\ y(t) = v_{0y}t \\ z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}}$$

Die erste Gleichung besagt, dass die Bewegung vollständig (also für alle Zeiten!) in der y-z-Ebene stattfindet, unserer Papierebene. Die beiden anderen Gleichungen geben die Koordinaten zu vorgegebenen Zeitpunkten. Wir benötigen eine Gleichung zwischen y und z, wobei wir den Zeitpunkt (zu dem sich der Punkt an diesem Ort befindet) vergessen dürfen. Denn in der Gleichungsform sind ja die einzelnen Punkte namenlos. Wir erreichen unser Ziel, indem wir die zweite Gleichung nach t umstellen $t = \frac{y}{v_{0z}}$. Dabei haben wir die nicht mehr interessierende t-Abhängigkeit in y(t) in der Bezeichnung fortgelassen. Einsetzen in die dritte Gleichung gibt

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0y}^2}y^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0y}}y = y\left(-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0y}^2}y + \frac{v_{0z}}{v_{0y}}\right)}.$$

! **(4.5.22)** Und das beschreibt tatsächlich **eine in Richtung der negativen z-Achse geöffnete Parabel.** (Form $y = -az^2 + b$) Bitte halten Sie *Bahn**kurve*** und *Bahnform* auseinander. Letztere haben wir soeben bestimmt. Der zweite Ausdruck gibt uns die Lage der Nullstellen der Parabel. Man kann sich die Bahnform als eine Art dauerbelichtetes Foto der Bahnbewegung vorstellen, auf der nicht mehr zu erkennen ist, **wann** sich der bewegte Massenpunkt an den einzelnen geometrischen Punkten der Parabel befunden hat. Will man diese Information durch eine Skizze mit übermitteln, muss man zusätzlich noch (einige) Zeitwerte zu ausgewählten Punkten mit angeben.
(4.5.23) Fassen wir zusammen, was wir über die Geometrie der Flugparabel herausgefunden haben:

(1)	Die Flugbahn verläuft in der durch $\vec{g}$ und $\vec{v}_0$ aufgespannten Ebene durch den Punkt $\vec{r}_0$.
(2)	Haben $\vec{g}$ und $\vec{v}_0$ dieselbe Richtung, dann verläuft die Bewegung auf der von $\vec{v}_0$ erzeugten Geraden durch $\vec{r}_0$.
(3)	Die Öffnung der Parabel hat die Richtung von $\vec{g}$. (Die Lage des Scheitels ist noch nicht bestimmt.)
(4)	In Richtung senkrecht zu $\vec{g}$ verläuft die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

☐ Geben Sie die Koordinatenfunktionen der in (4.5.13) bestimmten Flugparabel in ein Computeralgebraprogramm ein und variieren Sie nacheinander jeweils einen einzelnen Parameter, um einen Eindruck über den Einfluss des Parameters auf die Bahnform zu erhalten. Zur Variation bieten sich g,v_0 und α an.
(4.5.24) Wie bestimmt man die Lage des Scheitels der Parabel? Hierzu geht man günstig von der Tupelform der Gleichung für die momentane Geschwindigkeit aus: $t \mapsto v^K(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Der Scheitel gehört zu einem Zeitpunkt t_S. (Bezeichnungseinführung.) In z-Richtung kehrt sich die Bewegung am Scheitel um und das heißt, dass die z-Komponente der Geschwindigkeit Null wird. Oder $\boxed{v_z(t_s) = 0}$. (Die Projektion der Geschwindigkeit in die x-y-Ebene behält auch im Scheitel ihren konstanten Wert! Also **nicht**: "Im Scheitel ist die Geschwindigkeit Null". Das ist Unfug.).

Mit Hilfe der Hauptformel aus (4.5.8) können wir die Bedingung $v_z(t_s) = 0$ ausschreiben. t_s erhält dabei die Rolle einer Unbestimmten!

$$v_{0z} - g(t_s - t_0) = 0.$$

Also $\underline{\underline{t_S - t_0 = \frac{v_{0z}}{g}}}$. Damit haben wir die Scheitelpunktszeit t_s bestimmt! Diese Zeit setzen wir in $\vec{r}^K(t)$ ein, bilden also $\vec{r}^K(t_s)$. Und das ist der gesuchte Ortsvektor $\vec{x}_S$ des Scheitelpunktes.

(4.5.25) Man findet:

$$\boxed{\vec{x}_S^K = \vec{r}^K(t_S) = \vec{r}_0^K + \tfrac{v_{0z}}{g}\vec{v}_0^K - \tfrac{1}{2}\tfrac{v_{0z}^2}{g}(0,0,1).}$$

Oder stärker ausgeschrieben mit der üblichen Bezeichnungseinführung:

$$\begin{aligned} \vec{x}_S^K &= (0, y_0, z_0) + \frac{v_{0z}}{g}(0, v_{0y}, v_{0z}) - \frac{1}{2}\frac{v_{0z}^2}{g}(0,0,1) \\ &= (0, y_0 + \frac{v_{0y}v_{0z}}{g}, z_0 - \frac{1}{2}\frac{v_{0z}^2}{g}) = (0, y_S, z_S) \end{aligned}$$

□ Für die y-Komponente des Scheitels gilt $y_S = y_0 + \frac{v_{0y}v_{0z}}{g}$. Was beinhaltet das physikalisch für $v_{0y} = 0$ bzw. für $v_{0z} = 0$? Was geschieht mit dem Scheitel, wenn man g verkleinert?

(4.5.26) Die Hilfsgröße T=t-t$_0$. Beim Rechnen mit Flugparabeln ist es nützlich, $T=T(t)=t-t_0$ als Hilfsgröße einzuführen und mit Hilfe der Bedingungen zunächst die T-Werte zu bestimmen. (Vgl. (1.8.12)). Daraus lassen sich dann (bei Bedarf) auch unmittelbar die t-Werte über $t=T+t_0$ berechnen. Zum Einsetzen benötigt man meist die T-Werte, denn mit dieser Hilfsgröße schreibt sich die Flugparabelformel wie folgt:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 T + \frac{1}{2}\vec{g}T^2.$$

Im Argument von $\vec{r}$ steht immer noch t!. Der Term $\vec{r}(T)$ ist Unfug, höchstens $\vec{r}(\vec{T} + t_0)$.

! Die Einführung von T spart viel Arbeit. Insbesondere sollte man ohne besonderen Grund **nie** das Quadrat $(t - t_0)^2$ ausmultiplizieren! Man stößt nicht selten auf die Meinung, man komme doch mit der Formel für $t_0 = 0$ aus und wolle sich nur diese merken. Dann würde auch die T-Einführung entfallen. Auch hier zahlt man für einen minimalen Lustgewinn zur Befriedigung geistiger Trägheit später rechnerisch meist hohe Strafen. T ist eine Art systembezogener Einheit für die Zeit. Man arbeitet mit einer Uhr, deren Nullpunkt mit dem Zeitpunkt übereinstimmt, für den man Information über die Flugparabel besitzt. Vgl. Kap. 2.3.3

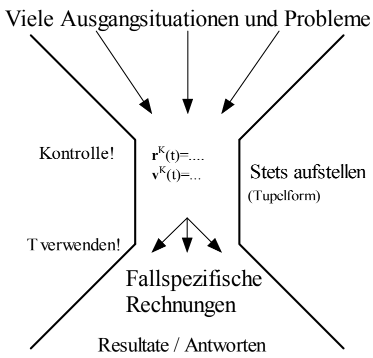
4.5f: Zusammenfassung
Wie geht man bei der Behandlung von Flugparabelaufgaben vor?

(4.5.27) In einem **ersten Schritt** realisiert man für die gegebene Problemsituation das Schema zu Festlegung einer Flugparabel durch: (t_0 wählen, $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ und $\vec{g}$ bestimmen). Am Ende sollte die zugehörige Flugparabel samt der Formel für die momentane Geschwindigkeit dastehen. Und zwar in geometrischer und in Tupelform. Dieser Teil kann (in der Darstellung) meist sehr kurz gehalten werden.

! Kontrollieren Sie möglichst an dieser zentralen Stelle die **Korrektheit Ihres Resultates!**

(4.528) Anschließend werden die speziellen Bedingungen der Aufgabe etwa als Bedingungen für die Koordinatenfunktionen formuliert und rechnerisch gelöst. Üblicherweise wird eine Bedingung zum Ort oder zur Geschwindigkeit umgewandelt in eine Bedingung für den Zeitpunkt, in dem eben dieser Ort angenommen wird. Der Ort wird dann durch Einsetzen gewonnen. Es folgen wie üblich Kontrolle und Interpretation.

Schematisch sieht das insgesamt wie folgt aus:



(4.5.29) Ein einfaches **Beispiel**: Eine Flugparabel gehe zur Zeit t=-5 durch den Ursprung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (1, 10, 20)$. Weiter sei $\vec{g} = (0, 0, -10)$. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und alle Punkte der Flugparabel mit z=-10.

> Wir haben T=t+5. Die Flugparabelformel gibt: $\vec{r}(t) = (0, 10T, 20T - 5T^2)$ und $\vec{v}(T) = (0, 10, 20 - 10T)$. *(Ende erster Teil! Sie sind im Trichterhals)*
>
> Das gibt eine Scheitelzeit von $T_S = 2$ und $t_S = -3$. Also $\vec{x}_S = \vec{r}(-3) = (0, 20, 20)$ für den Scheitelpunkt. Die Höhe z=-10 verlangt $20T - 5T^2 = -10$. Also $T_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$. Das gibt $\vec{r}(-3 \pm \sqrt{6}) = (0, 20 \pm 10\sqrt{6}, -10)$ für die Punkte mit $z = -10$. *(Die Fragen sind beantwortet!)*

(4.5.30) Mit der Formel für die Flugparabel hat man die gesamte Information über die Bewegung. Insbesondere kann man auch irgendeinen Zeitpunkt angeben und den zugehörigen Ort und die zugehörige momentane Geschwindigkeit berechnen. Nehmen wir im Beispiel t=0. Also T=5. Es folgt $\vec{r}(0) = (0, 50, -25)$ und $\vec{v}(0) = (0, 10, -30)$. Das ist ein ungeheurer Zugewinn an Information. Mit Hilfe der 10 Zahlangaben zu den Eingabedaten kann man unendlich viele Orte und Geschwindigkeiten bestimmen.
$\Downarrow$ Im Zusammenhang mit der Schnittmengenbstimmung werden wir weniger elementare Aufgaben zur Flugparabel behandeln. (Etwa (4.6.14) oder (4.6.23)). Die elementaren sollten Sie jedoch bereits jetzt beherrschen.

4.5g: **Zusammenfassung des Vorgehens im Text**, durch dessen Bearbeitung der Leser die Flugparabel verstehen und beherrschen soll

(4.5.31) Die allgemeine Formel für die Flugparabel und die zugehörige momentane Geschwindigkeit wurden eingeführt

- Der Übergang zu den Koordinatenvektoren war trivial.
- Die wichtige (inhaltliche) Interpretation der in den Formeln enthaltenen Parameter $t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0$ und $\vec{g}$ wurden besprochen. Hinzu kommt die rechnerische wichtige Hilfsgröße $T=t-t_0$.
- Der Begriff der Koordinatenfunktionen und ihre geometrische Interpretation als Projektionen wurden eingeführt.
- Die geometrische Gestalt der Flugparabel wurde analysiert.
- Es wurde beschrieben, wie einfache Problemsituationen zur Flugparabel zu behandeln sind.
- Einleitend wurden Bedingungen für die Gültigkeit der Flugparabelformel wurden angegeben.

4.5h: **Das Konkretisierungsproblem bei der Flugparabel**

(4.5.32) In der allgemeinen Flugparabelformel haben die Größen $\vec{g}, \vec{v}_0, \vec{r}_0$ und t_0 die Rolle von äußeren Parametern, so dass die Formel in gewisser Weise **alle** Flugparabeln erfaßt. Hat man jetzt eine Situation im Auge, in der eine ganz bestimmte Flugparabel auftritt, die durch konkrete Werte dieser Parameter festgelegt ist, sagen wir $\vec{g}^K = (0,0,-g)$ und $\vec{r}_0^K = (0,0,5)$ und $\vec{v}_0^K = (0,3,12)$ für $\mathrm{t}_0 = -2$, dann enthält die Aufgabe in der Regel die Frage: "Wie lautet die zugehörige Flugparabel?". Erwartet wird -wie in (4.5.27) gefordert - eine situtionsspezifische Konkretisierung der äußeren Parameter. Also eine Antwort der folgenden Art:

$$\vec{r}^K(t) = (0,0,5) + (0,3,2)T + \frac{1}{2}(0,0,-g)T^2 = (0,3T,5+2T-\frac{g}{2}T^2).$$

(4.5.32) Stattdessen findet man als Antwort immer wieder einfach die allgemeine Formel für die Flugparabel. Dabei wird das Einsetzen einfach *gedacht,* wie nachfolgende Antworten zeigen. Oder aber: Die äußeren Parameter werden stillschweigend zu Hilfsgrößen gemacht. Es wird nicht beachtet, dass die Formel an die spezifische Situation anzupassen ist, dass jetzt keine Aufgabe für **alle** Flugparabeln vorliegt, sondern eine für **gewisse**. Und für die möchte man eine möglichst gut passende Arbeitsformel zum Start. Das ergänzt etwas (1.2.2) und (1.4.10).

Kap.4.6: **Schnittmengenbestimmung**

*Bisher haben wir nur **beschrieben**. Haben geometrische Objekte vektoriell, das heißt durch geeignete Interpretation der Zentralformel dargestellt. Jetzt soll auch **gerechnet** werden. Hierzu entwickeln wir ein breit einsetzbares Rechenschema zur Bestimmung von Schnittmengen.*

(4.6.1) Wir besprechen ein erstes größeres Anwendungsgebiet des Vektorformalismus. D.h. wir lösen einen Typ geometrischer Probleme quantitativ mit Hilfe der Methoden der Vektorrechung.

Das Problem: Gegeben zwei geometrische Figuren mit festgelegter Lage im Raum. Gesucht ist die **Schnittmenge**, also die Menge aller Punkte, die zu beiden Figuren gehört. Zwei Ebenen, die nicht parallel sind, schneiden sich in einer Geraden. Liegt eine Flugparabel relativ zu einer Ebene günstig, so schneiden sich beide Figuren in zwei Punkten usw.

(4.6.2) Beachten Sie: Das ist ein Typ von Aufgaben, bei dem man meist vorab einiges an Information über die Lösung geometrisch herausarbeiten kann. Prüft man am Ende die Stimmigkeit des Rechenresultastes, sollte man dieses Vorwissen einbringen.

□ Beim Schnitt einer Geraden mit einer Ebene sind drei (qualitativ verschiedene) Fälle möglich. Welche sind das?

(4.6.3) Zur Problemlösung geht man wie folgt vor: Für jede der beteiligten Figuren verschafft man sich eine Parametrisierung. **Gesucht ist eine Parametrisierung der Schnittfigur**. Diese verschafft man sich auf rechnerischem Wege. (Gefragt ist immer nach der Schnittfigur, nicht etwa nach "dem Schnittpunkt". Letzeres ist ein Sonderfall mit einelementiger Figur.)

□ Wie hängt die Zahl der *inneren Freiheitsgrade einer Figur* mit der Zahl der freien Parameter einer Parametrisierung dieser Figur zusammen. (Vgl. (2.2.7-8). Gehen Sie einige Beispiele durch).

⇓ Wir rechnen zunächst zwei einfache Beispiele, geben dann das allgemeine Schema und behandeln schließlich ein anspruchsvolleres Beispiel. Bitte rechnen Sie die beiden Beispiele unbedingt selbsttätig nach!

(4.6.4) 1.Problem: **Gegeben eine Ebene E. Gesucht sind die Schnitte mit den Koordinatenebenen und den Koordinatenachsen**. E legen wir durch folgende Parametrisierung fest: $\boxed{\vec{x}_E(a,b) = \vec{x}_0 + a\vec{e} + b\vec{f}}$ mit $\vec{x}_0^K = (1,2,3)$ und $\vec{e}^K = (2,1,0)$ und $\vec{f}^K = (0,1,2)$. Wir suchen den Schnitt mit der x-y-Ebene und den mit der z-Achse.

Wie geht man vor? Zunächst bringen wir $\vec{x}_E^K(a,b)$ in Tupelform (ohne Zwischenrechnung aus den Angaben):

$$\vec{x}_E^K(a,b) = (1+2a, 2+a+b, 3+2b)$$

Was interessiert uns? Der Schnitt mit der x-y-Ebene. Für diese Punkte muß die z-Komponente von $\vec{x}_E^K(a,b)$ Null sein. Die Tupelform zeigt sofort, was das bedeutet: 3+2b=0. Das ist nur für $b = -\frac{3}{2}$ möglich. a darf weiter beliebig (frei) sein. Das setzen wir ein und finden:

$$\vec{x}_E^K(a,-\frac{3}{2}) = (1+2a, \frac{1}{2}+a, 0) = (1, \frac{1}{2}, 0) + a(2,1,0).$$

Die Tupelform wurde in die geometrische umgewandelt. Wir sehen: Es kommt die Parametrisierung einer Geraden in der x-y-Ebene heraus, eben die gesuchte Schnittgerade! Beide Bedingungen sind erfüllt: Es handelt sich einmal um spezielle Punkte der Ebene E. Und deren z-Komponente ist Null. Schließlich zeigt die Herleitung, dass dies alle Punkte mit den geforderten Eigenschaften sind.

(4.6.5) Wie steht es mit dem Schnitt von E mit der z-Achse?

Jetzt müssen x- und y-Komponente Null sein. Das gibt zwei Gleichungen (=Bedingungen an die Parameter): 1+2a=0 und 2+a+b=0. Daraus folgt $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{3}{2}$. Einsetzen gibt:

$$\vec{x}_E^K(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}) = (0,0,0).$$

Erneut sind alle Bedingungen erfüllt. Weitere Lösungen sind nicht möglich. Beobachtung: Die Ebene geht durch den Ursprung, was man der Parametrisierung nicht unmittelbar ansieht!

☐ Fertigen Sie eine Skizze der Konfiguration.

(4.6.6) 2. Problem: **Der Schnitt der Ebene E des ersten Problems mit der Ebene F ist gesucht**, wobei $\boxed{\vec{x}_F^K(u,v) = (3+u, 2+v, 1+v)}$ ist. Wie gehen wir vor?

> Angenommen S mit Ortsvektor $\vec{x}_S$ gehört zum Schnitt. Dann gehört S zu E und folglich muß es ein Parameterpaar (a_S, b_S) geben, für das $\vec{x}_S = \vec{x}_E(a_S, b_S)$ gilt. S gehört aber auch zu F, also muß es (u_S, v_S) geben mit $\vec{x}_S = \vec{x}_F(u_S, v_S)$. Wie üblich haben wir für die gesuchten, noch unbekannten Parameterwerte zunächst Bezeichnungen eingeführt. Aus beiden Gleichungen folgt die *Schnittbedingung* $\vec{x}_E(a_S, b_S) = \vec{x}_F(u_S, v_S)$ oder in Koordinaten $\vec{x}_E^K(a_S, b_S) = \vec{x}_F^K(u_S, v_S)$. Das bringen wir in Tupelform. **Gleichheit ist nur möglich, wenn alle drei Komponenten übereinstimmen**. Und das gibt ein System von 3 Gleichungen für unsere 4 unbekannten Parameter:

$$\begin{aligned} 1 + 2a_S &= 3 + u_S \\ 2 + a_S + b_S &= 2 + v_S \\ 3 + 2b_S &= 1 + v_S \end{aligned}$$

Da alle beteiligten Größen jetzt den Index S tragen, lassen wir dies S (von jetzt ab, auch in entsprechenden Aufgaben) wieder fort, um Schreibarbeit zu sparen. Eine Verwechslung ist nicht möglich, man muß sich nur merken, dass es sich um die Schnittparameter handelt. An dieser Stelle findet auch ein **Rollenwechsel** für die Parameter statt! Sie werden von freien Parametern zu Unbestimmten!

Die Lösung (des Gleichungssystems) liest man in unserem Fall leicht ab, wenn man b frei wählt und mit der dritten Bedingung beginnt. Nachfolgend steht rechts die Lösung. In der Mitte sind die Bestimmungsgleichungen nur *in Form gebracht.* Bei Schnittaufgaben ist es sinnvoll die Parameter der einen Figur auf einer Seite, die der anderen Figur auf der anderen Seite zu belassen.

$1 + 2a = 3 + u$	$2a + 0b = 2 + 1u + 0v$	$v = 2 + 2b$, b frei,
$2 + a + b = 2 + v$	$1a + 1b = 0 + 0u + 1v$	$a = 2 + b$
$3 + 2b = 1 + v$	$0a + 2b = -2 + 0u + 1v$	$v = 2 + 2b$

(4.6.7) Die (allgemeine) Technik zur Lösung derartiger Gleichungssysteme behandeln wir im nachfolgenden Kapitel genauer. Beim Gleichungs**lösen** handelt es sich im Rahmen der Schnittbestimmung um eine modular einsetzbare und isolierbare Teilaufgabe, die beispielsweise auch von Computeralgebrasystemen geleistet werden kann.

(4.6.8) Wir setzen die erhaltenen Werte (in die oben gegebenen Parametrisierungen) ein, wobei b die Rolle eines freien Parameters hat. Ergebnis:

$$\begin{aligned} \vec{x}_E^K(2+b, b) &= (5+2b, 4+2b, 3+2b) = (5,4,3) + b(2,2,2) \\ \vec{x}_F^K(2+2b, 2+2b) &= (5+2b, 4+2b, 3+2b) = (5,4,3) + b(2,2,2) \end{aligned}$$

! In beiden Fällen ergibt sich eine Parametrisierung ein und derselben Geraden, eben der gesuchten Schnittgeraden. Damit besitzen wir eine Parametrisierung der Schnittgeraden, sind also nach dem allgemeinen Konzept fertig. Die Gleichheit der beiden Ergebnisse kann zugleich noch als Kontrolle für die Korrektheit der Rechnungen angesehen werden.

(4.6.9) Aus den beiden Beispielen abstrahieren wir das **allgemeine Lösungsschema für die**

Schnittmengenbestimmung , an das man sich in der Regel halten sollte.

$\Rightarrow$	(1)	Die geometrischen Figuren seien als vektorielle Parametrisierungen gegeben.
!	(1a)	Achten Sie darauf, daß die Parameter unterschiedlich benannt werden!
$\Rightarrow$	(2)	Führen Sie geeignet Koordinaten ein, sofern nicht bereits vorhanden. Eventuell geometr. Koordinaten.
$\downarrow$	(3)	Schreiben Sie alle Parametrisierungen in Tupelform.(Freie Parameter.)
$\downarrow$	(4)	Formulieren Sie die Schnittbedingungen als **Gleichheit zwischen den Vektoren**. Rollenwechsel: Parameter sind jetzt Unbestimmte!
	(4a)	oder als spezielle Gleichungen für die Komponenten.
$\downarrow$	(5)	Es entsteht ein Gleichungsystem für die Parameter. Das System ist linear, falls nur Punkte, Geraden und Ebenen vorkommen.
$\downarrow$	(6)	Das System ist zu lösen. Erneut Rollenwechsel. Ein Teil der Parameter wird frei, der Rest konstant oder abhängige Variable.
!	(7)	Die erhaltenen Lösungen sind in die Parametrisierungen einzusetzen. **Das gibt die Vektoren mit den gesuchten Schnitteigenschaften.**
!	(8)	Endform: Die Resultate kontrollieren und interpretieren.**Was war geometrisch zu erwarten?**

Zu (4a): Den Schnitt mit einer Koordinatenebene sollte man nicht dadurch lösen, dass man zunächst diese Ebene parametrisiert! Besser ist es, die entsprechende Koordinaten Null zu setzen.

(4.6.10) Liegt ein Punkt (im Raum) in einer Ebene? Das ist als Schnitt des Punktes (0 freie Parameter!) mit der Ebene anzusehen. Hier wird es in Schritt (6) vielfach keine Lösung geben. D.h. dann, dass der Punkt nicht in der Ebene liegt.

(4.6.11) Angenommen zwei Figuren sollen geschnitten werden. Für das in (6) entstehende Gleichungssystem gilt: Im Raum hat es immer 3 Gleichungen, in der Ebene 2. Die Zahl der Unbestimmten wird durch die Zahl der beteiligten Parameter festgelegt. 2 für jede Ebene, 1 für jede Gerade und 0 für jeden Punkt.

(4.6.12) Das gesamte Schema ist problemlos auf höhere Dimensionen verallgemeinerbar. Nur die Zahl der Gleichungen in Schritt (6) ändert sich. Sie ist immer gleich der Dimension.

(4.6.13) Sucht man den gemeinsamen Schnitt von **drei** Gebilden, ist es günstig, zunächst zwei zu wählen, deren Schnitt zu bestimmen und anschließend den Schnitt mit der dritten Figur zu schneiden!

□ Vergleichen Sie die einzelnen Schritte der Rechnung in (4.6.6) mit den Schritten des Schemas.

□ Was ist als Schnitt zweier Ebenen in 4 Dimensionen zu erwarten? (Fallunterscheidungen?) Sie können das vor jeder konkreten Rechnung allgemein diskutieren. Rechnen Sie eventuell einige konkrete Beispiele. Denken Sie daran: Nur die Zahl der Komponenten ändert sich!

(4.6.14) Bisher hatten die Parameterwerte der Schnittpunkte keine geometrisch-inhaltliche Bedeutung. Sie waren nur willkürliche Bezeichnungshilfen. Bei Schnitten mit Flugparabeln ist das etwas anderes. Der Parameterwert gibt Zeitwerte und die haben physikalische Bedeutung. Ein zugehöriges Beispiel: **Es soll der Schnitt einer Flugparabel mit einer horizontalen Ebene bestimmt werden.**

Zunächst die Quantifizierung der Beschreibung: Wir legen die Koordinaten so, dass die Flugbahn zur Zeit t=0 durch den Ursprung verläuft ($\vec{r}_0 = \vec{0}$). Die y-z-Ebene sei die Bahnebene. Die Horiziontalebene sei durch die Gleichung z=H festgelegt. (H ist daher äußerer Parameter!) Es gilt $\vec{v}_0 = (0, v\cos\alpha, v\sin\alpha)$ und $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Den Index K lassen wir fort. Das gibt die Flugparabelgleichung (Schritt (3) des Schemas):

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = t(0, v\cos\alpha, v\sin\alpha) + \frac{1}{2}(0,0,-g)t^2 = (0, tv\cos\alpha, tv\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2) \\ \vec{v}(t) = (0, v\cos\alpha, v\sin\alpha - gt) \end{array}}$$

Schritt (4a) des Schemas verlangt z=H. Das ergibt eine quadratische Gleichung für t_S, den **Zeitpunkt des Schnittpunktdurchganges**! (Komplexe Lösungen der quadratischen Gleichung bedeuten, dass die Ebene zu hoch, oberhalb des Scheitels liegt. Usw.) Wir finden:

$$\boxed{t_A v\sin\alpha - \frac{1}{2}gt_A^2 = H \qquad \mathrm{t}_A^2 - 2t_A\frac{v\sin\alpha}{g} + \frac{2H}{g} = 0 \qquad \mathrm{t}_{A12} = \frac{v\sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2} - \frac{2H}{g}}}$$

Dabei gehört die (eventuelle) kleinere Zeit -negatives Zeichen- zum Schnitt vor dem Scheitelpunktsdurchgang und die größere zu dem danach. $\vec{r}(t_A)$ gibt den Ort des Durchganges durch die Ebene. Wir bestimmen diesen Ort weiter unten.

(4.6.15) Wo liegt der Scheitel? Im Scheitel ist die z-Komponente der Geschwindigkeit Null. Der Zeitpunkt des Scheiteldurchganges sei t_S. Die Koordinaten des Scheitels bezeichnen wir wie folgt: $\vec{r}(t_S) = (0, y_S, H_S)$. Insbesondere ist H_S die Scheitelhöhe. Es folgt sofort:

$$\boxed{\mathrm{t}_S = \frac{v}{g}\sin\alpha \qquad \mathrm{y}_S = \frac{v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \qquad \mathrm{H}_S = \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha}$$

(4.6.16) Es liegt nahe, y_S und H_S als problembezogene Längeneinheiten einzuführen. y_S für die y-Achse und H_S für die z-Achse. (Sie hängen natürlich hier von der Koordinatenwahl ab! Vgl. (2.3.14))

(4.6.17) Damit sind wir in der Lage, die Auftreffgrößen auf die Horizontalebene z=H zu bestimmen. Einsetzen gibt $\vec{r}(t_{A_{12}}) = (0, w_{12}, H)$. Dabei ist w die horizontale *Flugweite* (vom Ursprung zum jeweiligen Auftreffpunkt. (Machen Sie für die Bezeichnungen spätestens jetzt eine zusammenfassende Skizze!) Man findet mit gezieltem Ausklammern (vgl.(1.2.11)):

$$\boxed{t_{A_{12}} = t_S\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{H}{H_S}}\right) \qquad w_{12} = y_S\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{H}{H_S}}\right)}$$

Das gesamte Problem hängt in den gewählten Längeneinheiten nur noch von dem einen Parameter $\frac{H}{H_S}$ ab. Die Fallunterscheidungen werden durchH<H_S, H=H_S und H>H_S festgelegt.

! Damit ist das Problem vollständig gelöst.

☐ Was folgt für die beiden Sonderfälle H=0 und H=H_S? Stimmt das Ergebnis mit der Erwartung überein? Wann wird die Ebene nicht getroffen? Wie hängen Scheitelpunktsgrößen und Schnittgrößen zum Fall H=0 zusammen?

☐ Welche Bedeutung hat die Größe $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$? (Halten Sie auseinander: *Bedeutung* und *Wert* der Größe!)

☐ Für welche Abschußwinkel α (im Ursprung) wird im Falle H=0 die Flugweite maximal? (Das ist leicht zu sehen)

☐ Für welchen Abschußwinkel wird die Flugweite w_2 bei allgemeinem H maximal. (Das erfordert eine gößere Rechnung, ist aber lösbar. (Unter welchem Winkel erreicht daher ein Kugelstoßer - ohne Luftreibung - eine maximale Weite? Typische Zahlwerte verwenden!) Der Fall H=0 ist leicht direkt zu rechnen und kann als Kontrolle dienen.

4.6a: **Geometrische Koordinaten**

(4.6.18) Soll man das Schnittmengenschema immer genau in der beschriebenen Art verwenden? Die Antwort ist **Nein.** In gewissen Fällen ist es günstig, den Schritt (2), die Einführung von Koordinaten, zu verallgemeinern. Bisher haben wir immer ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt und dann den Übergang zum $\mathbb{R}^3_K$ vollzogen. Man kann jedoch allgemeiner unsere Zentralformel verwenden, um andere, eventuell besser geeignete Koordinaten einzuführen. Es seien $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ drei unabhängige Vektoren, so dass in der Gleichung $\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ der Schluß von der Summe auf die Summanden möglich ist. Ein solches System wird in der Mathematik eine *Basis* genannt. Geometrisch werden damit *schiefwinklige Koordinaten* zugelassen. Weiter seien F und G zwei Figuren mit Ortsvektoren $\vec{x}_F$ und $\vec{x}_G$, deren Schnittpunkte bestimmt werden sollen. (Die Parameter in den Von-Klammern schreiben wir im Augenblick nicht mit!) Wir haben die beiden Vektoren etwa über eine Parametrisierung vorgegeben und stellen sie jetzt mit Hilfe der gewählten Basis dar. Also $\vec{x}_F = x_F\vec{a} + y_F\vec{b} + z_F\vec{c}$ und $\vec{x}_G = x_G\vec{a} + y_G\vec{b} + z_G\vec{c}$. Die Schnittbedingung ist $\vec{x}_F = \vec{x}_G$. **Ist der Schluß von der Summe auf den Summanden zulässig, können wir Koeffizientenvergleich vornehmen.** D.h., es muß gelten $x_F = x_G$, $y_F = y_G$ und $\mathrm{z}_F = z_G$. Das sind erneut drei Zahlgleichungen

zwischen den beteiligten Parametrisierungsgrößen und wir sind bei Schritt (5) des Schemas angelangt! Nur dass die Gleichungen des Gleichungssystems jetzt u.U. viel einfacher sind.
(4.6.19) In der Ebene gilt das analog, nur dass in diesem Fall eine Basis (die Koeffizientenvergleich erlaubt) immer aus 2 Vektoren besteht und man somit nur zwei Bedingungsgleichungen erhält.
(4.6.20) Wir illustrieren das Vorgehen an einem Beispiel, das man keinesfalls kartesisch rechnen sollte. **Zu zeigen: Die drei Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich immer in einem Punkt.**
(4.6.21) Das allgemeine Dreieck läßt sich vektoriell durch zwei Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beschreiben. Die dritte Seite wird dann durch den Vektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ gegeben. Die beiden Vektoren sollen nicht dieselbe Richtung haben, so dass in $\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b}$ der Schluß von der Summe auf die Summanden möglich ist.
Zunächst parametrisieren wir die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks. Eine (selbst zu erstellende) Skizze zeigt sofort (mit selbsterklärenden Bezeichnungen):

$\vec{s}_c(\gamma) = \vec{0} + \frac{1}{2}\gamma(\vec{a} + \vec{b})$	$\vec{s}_c(0) = \vec{0}$	$\vec{s}_c(1) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$
$\vec{s}_a(\alpha) = \vec{b} + \frac{1}{2}\alpha(\vec{a} - 2\vec{b})$	$\vec{s}_a(0) = \vec{b}$	$\vec{s}_a(1) = \frac{1}{2}\vec{a}$
$\vec{s}_b(\beta) = \vec{a} + \frac{1}{2}\beta(\vec{b} - 2\vec{a})$	$\vec{s}_b(0) = \vec{a}$	$\vec{s}_b(1) = \frac{1}{2}\vec{b}$

Das ist die geometrische Form der Parametrisierungen der drei Seitenhalbierenden. Als Nächstes bringen wir die Gleichungen in die Form, die der Zentralformel entspricht (oder auch der Tupelform). Die Umrechnung benötigt nur die allgemeinen Regeln für Vektorräume:

$$\begin{aligned} \vec{s}_c(\gamma) &= \tfrac{1}{2}\gamma\vec{a} + \tfrac{1}{2}\gamma\vec{b} \\ \vec{s}_a(\alpha) &= \tfrac{1}{2}\alpha\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} \\ \vec{s}_b(\beta) &= (1-\beta)\vec{a} + \tfrac{1}{2}\beta\vec{b} \end{aligned}$$

Jetzt schneiden wir zunächst $\vec{s}_c$ mit $\vec{s}_a$. Vgl. (4.6.13). Koeffizientenvergleich gibt $\frac{1}{2}\gamma_S = \frac{1}{2}\alpha_S$ und $\frac{1}{2}\gamma_S = (1 - \alpha_S)$. Das hat die eindeutige Lösung $\alpha_S = \gamma_S = \frac{2}{3}$. (Punkte (5) und (6) des Schemas!) Einsetzen gibt:

$$\boxed{\vec{s}_c(\tfrac{2}{3}) = \vec{s}_a(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}).}$$

Geht die dritte Seitenhalbierende auch durch diesen Punkt? Man rät $\gamma_S = \frac{2}{3}$ und findet $\vec{s}_c(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. **Die drei Seitenhalbierenden haben tatsächlich einen gemeinsamen Schnittpunkt** und das ist gerade der von uns früher bestimmte Schwerpunkt (für drei gleiche Massen in den Eckpunkten).
Die Argumentation geht so nicht durch, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dieselbe Richtung haben, also nicht unabhängig sind.

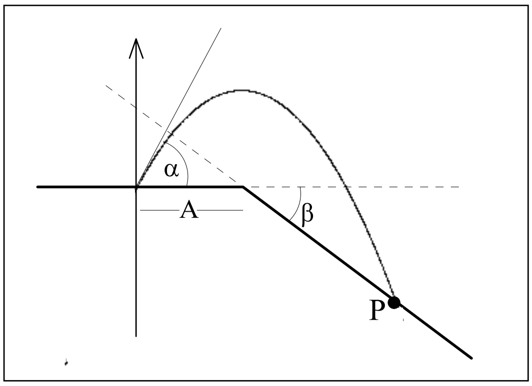
> **(4.6.22)** Das entscheidende Problem im Schema (4.6.9) ist, nach (5) zu gelangen, also ein System von Bedingungsgleichungen für Parameter zu finden, die die Schnittpunkte festlegen. Aus einer Vektorgleichung $\vec{x}_F = \vec{x}_G$ ist ein **Gleichungssystem** für die Zahlgrößen "Parameter" zu gewinnen. Im $\mathbb{R}^3_K$ geschieht das durch Gleichsetzen der Komponenten. Auf dem allgemeineren Weg durch Koeffizientenvergleich in der Zentralformel.

Man sollte daher in Schritt (2) des Schemas die Frage einfügen: *Kartesisch oder geometrisch* ?
□ Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene. Wir wissen, wie man die Koordinaten eines Punktes geometrisch erhält. Nun gehen wir zu schiefwinkligen Koordinaten über. Dann gibt es **zwei** naheliegende Verallgemeinerungen, zwei unterschiedliche (operative) Konstruktionen zur Koordinatenbildung, die im kartesischen Fall überienstimmen. Welche sind das, welche davon entspricht der Rechnung der Zentralformel?

4.6b: **Ein weiteres Flugparabelproblem**

Wir sind jetzt in der Lage, anspruchsvollere Probleme zu behandeln. Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht, dass die eigentliche Arbeit durchaus erst nach Ausführung des Schnittmengenschemas und erst recht nach der Festlegung der Parametrisierungen beginnen kann.

(4.6.23) Eine Flugparabel startet im Ursprung und trifft einen schrägen Hang in einem Punkte P. Uns interessiert die Flugweite w. Die Skizze gibt die Bezeichnungen und die genauere Geometrie. Besonders zu beachten ist, dass der Hang nicht durch den Ursprung gehen muß, sondern die Horizontalebene im Abstand A trifft. Vor dem Hang befindet sich noch eine horizontale Rampe.



Beachten Sie, dass $\beta > 0$ nach unten geneigten Hang bedeuten soll. Die Flugbahn verläuft in der y-z-Ebene. Damit erhält der Ortsvektor von P die Form: $\vec{x}_P = (0, y_P, z_P)$. Uns interessiert die Größe y_P. Das ist die Flugweite w.

Eine naheliegende **Rollenzuweisung** sieht so aus: y_P ist klar abhängige Variable. Der Abschußwinkel α wird unabhängige Variable. Und der Rest - Anfangsgeschwindigkeit v, Neigungswinkel β und Abstand A sowie g - wird äußerer Parameter. Wir arbeiten mit dieser Zuweisung, strukturieren insbesondere die Endformel danach.

(4.6.24) Jetzt der Durchgang durch das Schema. Flugparabel und Hangebene haben folgende Parametrisierungen :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \vec{r}^K(t) = v(0,\cos\alpha,\sin\alpha)t + \frac{1}{2}(0,0,-g)t^2 & = (0, vt\cos\alpha, vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \\ \vec{x}_E(a,b) = (0,A,0) + a(0,\cos\beta,-\sin\beta) + b(1,0,0) & = (b, A + a\cos\beta, -a\sin\beta) \end{array}}$$

Die Schnittbedingung gibt $b_S = 0$ sowie zwei Gleichungen für die Unbestimmten a_S und t_S.

$$\begin{aligned} A + a_S\cos\beta &= vt_S\cos\alpha \\ -a_S\sin\beta &= vt_S\sin\alpha - \frac{1}{2}gt_S^2 \end{aligned}$$

Die Unbekannte a_S wird eliminiert. (Die erste Gleichung mit $\sin\beta$, die zweite mit $\cos\beta$ multiplizieren, dann addieren.) Das ergibt ist eine quadratische Gleichung für t_S, die mit der p-q-Formel gelöst wird:

$$\boxed{t_{S12} = \frac{v}{g}(\sin\alpha + \tan\beta\cos\alpha) \pm \sqrt{\frac{v^2}{g}(\sin\alpha + \tan\beta\cos\alpha)^2 - \frac{2A}{g}\tan\beta}}$$

Wir benötigen $y_P = A + a_S\cos\beta = vt_s\cos\alpha$. (a_S benötigen wir nicht.) Dabei gehört das positive Zeichen in t_S zu dem uns interessierenden späteren Schnittpunkt. Einsetzen gibt, wobei wir gleich $\frac{v^2}{g}\cos\alpha$ gezielt ausklammern:

$$\boxed{y_{P12} = \frac{v^2}{g}\cos\alpha\left((\sin\alpha + P\cos\alpha) \pm \sqrt{(\sin\alpha + P\cos\alpha)^2 - \frac{2AgP}{v^2}}\right) \quad \text{mit P=}\tan\beta.}$$

Damit sind wir im Prinzip fertig. Aber es ist empfehlenswert, die Formel mit Hilfe von einheitenfreien Größen überschaubarer zu machen. Für $\beta = 0$ entsteht das übliche horizontale Flugweitenproblem mit einer Flugweite von $W = 2\frac{v^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha$, wie man der Formel entnimmt. Wir führen Q=$\frac{v^2}{gA}$ als neue einheitenfreie Hilfsgröße ein. Damit folgt

$$\boxed{y_{P12}(\alpha) = A\cdot Q\cos\alpha\left((\sin\alpha + P\cos\alpha) \pm \sqrt{(\sin\alpha + P\cos\alpha)^2 - 2\frac{P}{Q}}\right) \quad \begin{array}{c}\text{mit P=}\tan\beta \\ \text{und Q=}\frac{v^2}{gA}\end{array}}.$$

Das klärt die Abhängigkeit vom Abschußwinkel α. Mißt man die Weite in Einheiten der Rampenlänge A, dann enthält diese Formel nur noch zwei Parameter P und Q.
(4.6.25) Da der Hang (bei $\beta > 0$) nur für $z \le 0$ existert, müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen. Nochmals: y_{P1} soll die zum negativen Zeichen gehörige erste Weite sein. Wir finden drei Möglichkeiten:

1. $y_{P1} < A$ und $y_{P2} \ge A$. Der physikalisch erwünschte Fall. Das Geschoß trifft den Hang von oben wie gewünscht.
2. $y_{P1} < A$ und $y_{P2} < A$. Ein zu kurzer Schuß. Der Einsschlag erfolgt nicht am Hang, sondern auf der Horizontalrampe.
3. $y_{P1} > A$ und $y_{P2} \ge A$. Schuß in den Boden. Der Hang wird von unten getroffen!
4. y_{P12} komplex. Die Abschußgeschwindigkeit ist zu gering. Das Geschoß erreicht die Ebene nicht.

Man kann dies noch in Bedingungen für die Parameter umsetzen, was wir hier jedoch nicht mehr tun.
☐ Schreiben Sie ein Computerprogramm, das Ihnen die Weite y_{P2} im physikalisch zulässigen Bereich als Funktion des Abschußwinkels α zeichnet (für gegebene P- und Q-Werte und $\beta > 0$).

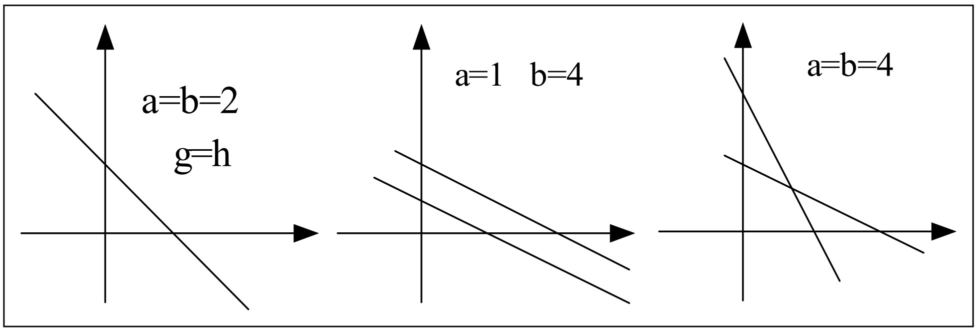
4.6c: **Fallunterscheidungen und äußere Parameter**

Äußere Parameter erfassen in der Regel unendlich viele Fälle. Manchmal kann man nicht alle diese Fälle auf "einen Schlag" behandeln. Dann muß man Fallunterscheidungen bei der Lösung oder in der Lösungsformel vornehmen.

(4.6.27) Äußere Parameter sind vielfach mit Fallunterscheidungen verbunden. Im Rechenweg treten dann Verzweigungen auf, die meist auch zu Verzweigungen der Endformel führen. **Zu jedem zulässigen Wert des äußeren Parameters muß dann mindestens ein Fall der Endformel gehören.** Wir besprechen jetzt ein Beispiel einer Schnittaufgabe, bei dem dieser Sachverhalt - seine Ursachen und Auswirkungen besonders gut durchschaubar ist.
☐ Beachten Sie die begriffliche Unterscheidung von *Verzweigung des Rechenweges* und *Verzweigung der Lösungsformel.*
(4.6.27) Wir wählen zwei Geraden in der Ebene, die beide durch eine Geradengleichung festgelegt sind. Jede der Geraden erhält einen äußeren Parameter. Den Schnitt erhält man durch Gleichsetzen.
Die beiden Geradengleichungen geben wir in drei Formen. Links in der üblichen allgemeinen Form, in der Mitte in Normalform und in der Achsenabschnittsform. Vgl. (1.6.11). Rechts dann noch je eine Vektorparametrisierung.

Allgemein	Normal	Achsenabschn.	Vektorparam.
$ax + 2y = a$	$y = -\frac{a}{2}x + \frac{a}{2}$	$\frac{x}{1} + \frac{y}{(\frac{a}{2})} = 1$	$\vec{x}_g(\alpha) = \alpha(1, -\frac{a}{2}) + (0, \frac{a}{2})$
$2x + by = b$	$y = -\frac{2}{b}x + 1$	$\frac{x}{(\frac{b}{2})} + \frac{y}{1} = 1$	$\vec{x}_h(\beta) = \beta(1, -\frac{2}{b}) + (0, 1)$

Über die Normalform erkennen wir, wann die beiden Geraden parallel sind. Es muß $\frac{a}{2} = \frac{2}{b}$ also ab=4 gelten. Die beiden Geraden sind gleich, wenn zusätzlich a=2 und damit auch b=2 gilt. Damit haben wir drei Fälle ganz unterschiedlichen Schnitttverhaltens. 1) a=b=2. Dann ist der Schnitt die gesamte Gerade. 2) ab=4, aber a$\neq$ 2. Dann sind die beiden Geraden parallel, aber verschieden. Der Schnitt ist leer, es gibt keinen Schnittpunkt. 3) ab$\neq$ 4. Dann hat man genau einen Schnittpunkt, dessen Lage man günstig mit Hilfe der Achsenabschnittsform abschätzt. Vgl die Skizze.



(4.6.28) Die geometrische Konfiguration verdeutlicht in diesem Fall sehr genau die drei möglichen Fälle. Da a und b äußere Parameter sein sollen, muß die Lösung alle drei Möglichkeiten erfassen.

☐ Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm, das die beiden Geraden zeichnet, bei dem Sie mit der Maus die beiden Achsenabschnitte der Geraden einstellen können und das ihnen den Schnitt anzeigt. Wie wird man hier die Fallunterscheidung einbauen?

(4.6.29) Und jetzt die Rechnung. Wir starten mit dem System in der allgemeinen Form, also Schritt (6) des Schemas aus (4.6.9). Zunächst eliminieren wir die Unbestimmte y.

Einstieg $\Longrightarrow$	$\boxed{\begin{array}{c} ax+2y=a \\ 2x+by=b \end{array}}$	$\begin{array}{c} \cdot b \\ \cdot(-2) \end{array}$	
	$(ab-4)x = ab-2b$		
$ab \neq 4 \swarrow$	Fallentersch.	$\searrow ab = 4$	
$\boxed{\boxed{\text{x}=\frac{b(a-2)}{ab-4}}}$		$\boxed{0x = b(a-2)}$	
$\downarrow$Einsetzen	a$\neq$ 2 $\swarrow$	Fallunttersch.	$\searrow a = b = 2$
$\boxed{\boxed{\text{y}=\frac{a(b-2)}{ab-4}}}$	$\boxed{\boxed{\textbf{unlösbar}}}$		$\boxed{\text{x+y=1}}$
	(b=2 geht nicht)		$\boxed{\boxed{\text{x frei, y=1-x}}}$

Nach der zweiten Zeile ist eine Fallunterscheidung (”Verzweigung”) erforderlich. **Man möchte nach x auflösen, dazu müßte man durch (ab-4) teilen.** Das ist aber nur möglich, wenn, $ab \neq 4$ gilt. Links wird dieser Fall weiter verfolgt. Ist dagegen ab=4, dann lautet die zu erfüllende Gleichung $0x = b(a-2)$. Das ist rechts hingeschrieben. Diese Gleichung verlangt erneut eine Fallunterscheidung. Ist b(a-2) auch Null, dann lautet die Gleichung 0x=0. Sie wird durch jeden Wert von x erfüllt, d.h. x darf **die Rolle eines freien Parameters annehmen.** Ist dagegen $b(a-2) \neq 0$, dann ist die Bedingung (an x) durch kein x erfüllbar, d.h. die Gleichung ist unlösbar.

☐ Vollziehen Sie die Rechnung und die zugehörige Argumentation eigenständig nach.

> ⇑**(4.6.30)** Wir sehen, wie die Verzweigung der Rechnung genau die vorab überlegten drei Fälle produziert! Auch das Entstehen solcher Verzweigungen ist typisch: Sie entstehen dadurch, dass man durch eine Hilfsgröße teilen möchte, die für bestimmte Werte der äußeren Parameter Null wird. Diese Fälle sind dann gesondert zu behandeln.

4.6d: **Die Kegelschnitte**

(4.6.31) Ein klassisches, bereits in der Antike behandeltes Problem ist das der Kegelschnitte. Eine Ebene ist mit der Oberfläche eines ins Unendliche gehenden Doppelkegels zu schneiden. In geeignet gewählten Koordinaten können wir den Doppelkegel problemlos parametrisieren. (Für eine koordinatenfreie geometrische Darstellung benötigen wir das in Kap. 6.1 zu besprechende Skalarprodukt.)

(4.6.31) Wir setzen

$$(u,v) \mapsto \vec{x}_D(u,v) = (u, v, \alpha\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \text{mit } \varepsilon = \pm 1.$$

Die Kegelachse ist die z-Achse und die Größe der Kegelöffnung wird durch α bestimmt. Die Kegelspitze liegt im Ursprung. Der Doppelkegel hat eine Reihe ausgezeichneter Richtungen: Die der Polachse (hier die z-Achse), die Richtungen senkrecht dazu und die vom Ursprung fortzeigenden Kantenrichtungen des Mantels.

Damit ist jetzt eine Ebene zu schneiden. Von Ausnahmefällen abgesehen erhält man drei Typen von Schnittfiguren: 1) Kreise und Ellipsen, 2) Parabeln und 3) Hyperbeln. Man hat es also erneut mit einem Problem mit Fallunterscheidungen bei der Lösung zu tun.

Das Schnittproblem läßt sich abgesehen vom Rechenaufwand problemlos mit unseren Methoden behandeln. Die entstehenden Gleichungen sind allerdings nicht linear. Die Schnittmengen erhält man in Form von Parametrisierungen.

□ Wählen Sie für den Kegel $\alpha = 1$. Überlegen sie sich die Gleichungen von drei einfachen Ebenen, für die der Schnitt Figuren der angegebene Typen produziert und rechnen Sie einige dieser Schnittaufgaben durch. Denken Sie daran, die oben genannten "besonderen Richtungen" des Kegels als Richtungsvektoren der Ebenen zu verwenden.

Kap.4.7: **Tontaubenprobleme**

Zum Abschluß dieses Kapitels rechnen wir weitere Beispiele und zeigen, wie sich das ursprüngliche Schnittmengenbestimmungsschema auf benachbarte Bereiche ausdehnen läßt, indem man es verständig abändert. Rechnerisch sind diese Beispiele deutlich anspruchsvoller.

4.7a: **Tontaubenprobleme**

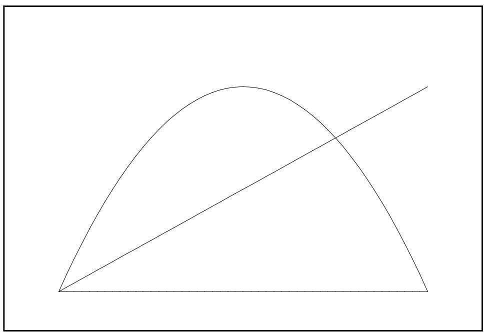
(4.7.1) Bei geometrischen Schnittbestimmungen hatten die Parameter der Schnittmenge keine inhaltliche Bedeutung. Es handelte sich um reine quantifizierende Bezeichnungen. Beim Schnitt einer Flugparabel mit eine geometrischen Figur war das anders: Man erhielt die Schnittpunkts**zeit** und die ist durchaus physikalisch bedeutsam. Die Schnittpunktsparameter der Figur blieben immer noch ohne Bedeutung und in der Regel rechnet man sie überhaupt nicht aus. Die Zeitwerte genügen zur Bestimmung der benötigten Größen. Was ist aber, wenn man zwei Flugbahnen schneidet? Wir nennen das ein *Tontaubenproblem.* Dann gibt es neben den rein geometrischen Schnittpunkten der beiden Bahnen noch eventuelle *Treffpunkte*, also Schnittpunkte, an denen sich die beiden Körper zu ein und demselben Zeitpunkt treffen oder begegnen.
(4.7.2) Wie lassen sich Treffpunktsprobleme behandeln. Uns stehen **zwei Strategien** zur Verfügung:

- Wir rechnen wie bisher mit unterschiedlich bezeichneten Zeitparametern, sagen wir u und t. ((2a) des Schemas (4.6.9)!) D.h. wir bestimmen alle Schnittpunkte Und am Ende der Rechnung verlangen wir zusätzlich $u_S = t_S$, sondern so die Treffpunkte aus den Schnittpunkten aus. (Das ist eine zusätzliche Bedingungsgleichung.)
- Wir verwenden von Anfang an für beide Bahnen dieselbe Zeitbezeichnung t. Das ändert hauptsächlich die Zahl der Unbestimmten in den Bedingungsgleichungen. Dann erhalten wir von vornherein nur die Treffpunkte.

!⇓ Beide Strategien lassen sich anwenden. Wir geben zunächst ein Beispiel für eine Rechnung der ersten Art und dann eines für eine Rechnung der zweiten Art.

4.7b: **Tontaube und Schütze im Ursprung**

(4.7.3) Wir betrachten das folgende Problem: Im Ursprung befindet sich ein Schütze und ein Tontaubenstart. Die Tontaube ist ein Massenpunkt, der sich gemäß einer Flugparabel bewegen soll. Das Geschoß dagegen soll geradlinig gleichförmig fliegen. Die Flugbahn der Taube soll eine feste Parabel, die des Geschosses eine feste Gerade sein. Ein eventueller Treffer findet stets im Schnitt der beiden Kurven statt. Das Problem kann als ebenes Problem interpretiert werden.



(4.7.4) Zu diesem Szenenbild, dieser Ausgangssituation, können wir mehrere Aufgaben formulieren, die sich durch **unterschiedliche Rollenzuweisungen** an die beteiligten Größen unterscheiden. Der Formalismus läßt sich an die jeweilige Fragestellung anpassen und löst diese. Die Aufgabe bildet ein ausgesprochen illustratives Beispiel des Rollenkonzeptes. Die Probleme:

1. Bestimme den geometrischen Schnittpunkt von Gerade und Parabel. (Der Schütze hat ein Gewehr mit Dauerfeuer!)
2. Tontaube und Geschoß haben vorgegebene Startgeschwindigkeiten w und v. Mit welcher Zeitverschiebung muss das Geschoß starten, damit es die Tontaube trifft? Wie groß ist der Vorhaltewinkel. (Das ist die übliche Situation)?
3. Wie 2), aber feste Abschußzeit und dazu gesuchter Vorhaltewinkel.
4. Geschoß und Tontaube starten gleichzeitig. Die Geschwindigkeit w der Tontaube ist vorgegeben. Welche Geschwindigkeit v muss der Schütze seinem Geschoß geben, damit dieses bei fester Abschussrichtung trifft?

(4.7.5) Wir beginnen wie üblich mit der **Bezeichnungswahl**:

$\vec{w}^K = w(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ vektorielle Anfangsgeschwindigkeit der Taube
$\vec{v}^K = v(\cos(\beta), \sin(\beta))$ vektorielle Geschwindigkeit des Geschosses.
$\vec{g}^K = (0, 0, -g)$

S bezeichne den Schnittpunkt. Startzeit der Taube sei $t_0 = 0$. (Ergänzen Sie selbst die Skizze!)
Das bedeutet für die **Bahnkurven (**mit unterschiedlich **bezeichneten** Zeitparametern**)** :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = \vec{w}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \text{ also } \vec{r}^K(t) = (wt\cos(\alpha), wt\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2) \\ \vec{s}(u) = \vec{v}u \quad \text{und} \quad \vec{s}^K(u) = (vu\cos(\beta), vu\sin(\beta)) \end{array}}$$

Jetzt können wir das **Schnittbestimmungsschema** ablaufen lassen.

Die beiden Parameter sind wie bisher unterschiedlich bezeichnet. Über $\vec{r}^K(t_S) = \vec{s}^K(u_S)$ erhalten wir in der üblichen Weise den Schnittpunkt. Das entstehende 2×2-System lautet:

$$\boxed{\begin{array}{c} wt_S\cos(\alpha) = vu_S\cos(\beta) \\ wt_S\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt_S^2 = vu_S\sin(\beta) \end{array}}$$

Die erste Gleichung gibt

$$\boxed{u_S = \frac{w}{v}t_S\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}.}$$

Einsetzen in die 2. Gleichung gibt eine quadratische Gleichung für die Schnittzeit t_S mit der trivialen Lösung t_1=0 und der zweiten Lösung

$$\boxed{t_S = \frac{2w}{g\cos(\beta)}(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)) = \frac{2w\sin(\alpha-\beta)}{g\cos(\beta)}}$$

Für unsere Fragestellung kommt nur $t_S > 0$ in Frage und das bedeutet $\alpha > \beta$. Oder: Der Abschußwinkel α der Taube muss größer sein als der des Geschosses! Das wird durch die Formel für t_S sichergestellt. Durch Rückeinsetzen erhalten wir den Ortsvektor des Schnittpunktes. Etwa

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{x}_S = \vec{s}(u_S) = vu_S(\cos(\beta), \sin(\beta)) = wt_S\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}(\cos(\beta), \sin(\beta)) \\ = \frac{2w^2}{g}\sin(\alpha-\beta)\frac{\cos(\alpha)}{\cos^2(\beta)}(\cos(\beta), \sin(\beta)) \end{array}}$$

Beachten Sie: Die Richtung des Schnittvektors wird durch die Richtung der Geraden bestimmt, wie es sein muss. Beachten Sie auch, dass in der Gleichung für u_S inzwischen ein Rollenwechsel stattgefunden hat. Zunächst war t_S noch unbestimmt. Aber jetzt ist t_S berechnet und wird damit in der Formel für u_S zur Hilfsgröße! Alle drei Formeln für u_S, t_S und $\vec{x}_S$ sind durch die Eingabeparameter α, β, v, w und g bestimmt. Dabei taucht die Geschoßgeschwindigkeit v nur in der Formel für u_S auf, was sofort zu verstehen ist.

⇑ **Damit ist das geometrische Schnittproblem vollständig gelöst.** Und (unsportliches) Dauerfeuer des Schützen ergibt an der angegebenen Stelle einen Treffer. u_S wurde bis hierher als Hilfsgröße ohne inhaltliche Bedeutung behandelt.

(4.7.6) $\mathbf{u}_S$ ist aber auch die Zeit, die das Geschoß mit der Geschwindigkeit w braucht, um vom Ursprung zum Schnittpunkt S zu gelangen. Startet das Geschoß nicht bei t=0, sondern bei $t=t_0$, so erreicht das

Geschoß S zur Zeit $t_0 + u_S$. Soll die Taube dann auch gerade in S sein, muss $t_0 + u_S = t_S$ gelten. Denn die Taube ist ja zur Zeit t_S dort. Dies können wir als Bedingung für die **Zeitverschiebung** t_0 ansehen. Also $t_0 = t_S - u_S$. An dieser Stelle sehen wir die Nützlichkeit der ersten Strategie!
Einsetzen gibt mit obigem t_S

$$\boxed{t_0 = t_s \left\{1 - \frac{w\cos(\alpha)}{v\cos(\beta)}\right\}.}$$

□ Jetzt ist die Lösung des 3. Problems leicht. Ein einfacher Rollenwechsel ist erforderlich. Wie lautet die Lösung?

⇑ Damit ist das Problem der Abschußzeit gelöst. Für $w\cos(\alpha) = v\cos(\beta)$ starten beide Körper gleichzeitig. Ist $wcos(\alpha) > v\cos(\beta)$, muss der Schütze schon vor dem Start der Taube abdrücken. Seine Geschoßgeschwindigkeit ist zu gering.
(4.7.7) Wie steht es mit der **veränderlichen (einstellbaren) Abschußgeschwindigkeit**? Es muss $u_S = t_S$ gelten. D.h. interpretiert man beide Parameter als Zeit, dann müssen beide Zeiten gleich sein. v - die Geschoßgeschwindigkeit - ist jetzt unbestimmt. Geht man mit dieser Bedingung und Rollenzuweisung in die Gleichung für u_S ein, so folgt:

$$\boxed{v = w\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}}$$

Mit dem so gewählten v trifft der Schütze erneut bei gleichzeitigem Abschuß und Vorhaltewinkel β!

4.7c: **Tontaube im Scheitel ihrer Bahn**

⇓ Wir modifizieren unser Problem jetzt etwas, so dass wir es immer noch rechnen können: **Der Schütze sieht die Tontaube im Scheitel ihrer Bahn und schießt in diesem Augenblick. Er steht nicht mehr selbst in der Ebene der Flugbahn. Wie muss er vorhalten?**
(4.7.8) Um eine einfach rechenbare Konfiguration zu erhalten, wählen wir folgende Bahnkurven für Taube und Geschoß:

$\vec{r}(t) = (0,0,H) + (0,w,0)t + \frac{1}{2}(0,0,-g)t^2$		Taube
$\vec{s}(t) = (A,0,0) + v(n_x,n_y,n_z)t$ mit $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$		Geschoß

□ Verstehen und beschreiben Sie die hierdurch erfaßte Konfiguration. Welche spezielle Annahme über die Lage der Bahn wurde gemacht? Welche Größen sind unbestimmt, welche äußere Parameter?
(4.7.9) Beide Bahnen verwenden als Parameter t, so dass wir nur eventuelle Treffpunkte erhalten. Das ist die entscheidende Abweichung vom bisherigen Schema. Siehe (1a) in (4.6.9).
(4.7.10) Aus der Schnittbedingung folgt

$A + vn_x t_S = 0$	$vn_x = -\frac{A}{t_S}$
$vn_y t_S = wt_s$	$vn_y = w$
$vn_z t_S = H - \frac{1}{2}gt_S^2$	$vn_z = \frac{1}{t_S}(H - \frac{1}{2}gt_s^2)$

Quadrieren und Addieren der rechten Spalte gibt:

$$v^2 = \frac{A^2}{t_S^2} + w^2 + \frac{1}{t_S^2}(H - \frac{1}{2}gt_S^2)^2.$$

Der unbekannte Richtungsvektor $\vec{n}$ ist herausgefallen. Nur noch t_S ist unbestimmt. Umformen liefert eine biquadratische Gleichung:

$$\frac{1}{4}g^2t^4 + (w^2 - v^2 - gH)t^2 + (A^2 + H^2) = 0$$

Wir setzen $D^2 = A^2 + H^2$. (Bedeutung?). Es folgt:

$$t_{S12}^2 = \frac{2}{g^2}\left((gH + v^2 - w^2) \pm \sqrt{(gH + v^2 - w^2)^2 - g^2D^2}\right)$$

t^2 darf nicht negativ oder komplex werden. Dafür muss zunächst einmal $(gH + v^2 - w^2)^2 \geq g^2D^2$ gelten. Gilt diese Ungleichung nicht, ist das Geschoß wegen zu geringer Geschwindigkeit v nicht in der Lage, die

Taube einzuholen. Gilt die Ungleichung, sind beide t^2-Werte tatsächlich nicht negativ. (Beachten Sie: Es gilt ja $\sqrt{a^2-b^2} \leq a$ für a$\geq b \geq 0$.)
Erneutes Wurzelziehen gibt zwei Vorzeichen. Nach Aufgabenstellung ist nur eine positive Zeit zulässig, so dass zwei Lösungen verbleiben:

$$t_{S12} = \frac{\sqrt{2}}{g}\sqrt{(gH+v^2-w^2) \pm \sqrt{(gH+v^2-w^2)^2 - g^2D^2}}.$$

Das positive Zeichen gehört zum *flachen* und das negative zum *steilen* (da scheitelnäheren) Treffer.

☐ Kontrollieren sie die Einheiten in der Formel für t_S.
Wo findet das Treffen statt? Mit Hilfe von t_S erhalten wir die Abschußrichtung $\vec{n}$. Und v$\vec{n}t_S$ gibt den jeweiligen Treffpunkt. Ausgehend von t_S kann man bei Bedarf weitere interessierenden Größen bestimmen.

☐ Schreiben Sie (mit gezieltem Ausklammern) die Formel für t_S in der Form

$$t_{S12} = \sqrt{\frac{2H}{g}}\sqrt{.....}$$

Welche Einheit und welche physikalische Bedeutung hat der Vorfaktor $\sqrt{\frac{2H}{g}}$? Was für Parameter entstehen in der zweiten Wurzel? Warum diese Schreibweise? Vgl. Kap. 1.2.3.

☐ Für A=0 spielt sich alles wieder in einer Ebene ab. Vergleichen Sie das Resultat mit den Resultaten aus 4.7.2. Welcher Unterschied bleibt? Schreiben Sie für diesen Fall ein kleines Computerprogramm, das den Bahnverlauf zeigt.