****

Vorkurs Mathematik

F. Krause

Kapitel 3

Der mathematische Weg zu den Vektoren

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Kap.3.1: **Terme**

(3.1.1) Letztlich geht es uns darum, mit vektoriellen Größen zu rechnen: Damit Formeln aufzustellen, Umformungen von Gleichungen vorzunehmen, physikalische Gesetze zu formulieren usw. Denn derartiges Rechnen ist der Weg, mit dem man im Bereich der Zahlen erfolgreich Sachverhalte beschreibt und Probleme löst.
(3.1.2) Was sind Formeln? Typischerweise werden zwei Terme (oder Rechenausdrücke) gleichgesetzt. Denken Sie etwa an das Brechungsgesetz. Was aber sind Terme? Dieser delikaten Frage weichen wir aus, indem wir uns überlegen, was sie leisten, wozu man sie braucht. (Übrigens eine vielfach nützliche Strategie der Verständnisbildung mit tieferer Bedeutung: Legt nicht die Gesamtheit der Leistungen fest, was etwas "ist"?)
(3.1.3) Was sind also die Leistungen, für die man Terme benötigt und verwendet? Wir geben eine Zutatenformel:

Ein *Term* ergibt nach **Interpretation seiner Buchstaben** durch die **Auswertung,** die er festlegt, einen **Wert.**

Also: Der Term enthält Buchstaben oder analoge Symbole, denen per Interpretation gewisse Bedeutungen zugeordnet sind wie *ganze Zahl* oder *negative Zahl* oder *Vektor* usw. Liegen diese Interpretationen fest, bestimmt der Term eine Auswertung, also einen **Rechenweg**, wie man aus Eingabegrößen ein Ergebnis, eine Ausgabegröße ausrechnet. Und dieses Ergebnis ist der **Wert.**
Nehmen wir den Term $(a+b)^2$. Wir interpretieren a und b als ganze Zahlen, was zulässig ist. Dagegen ist *a Zahl und b Vektor* nicht zulässig. Dann legt der Term einen Rechenweg fest: Zuerst ist $a+b$ zu bilden, dann ist das Ergebnis zu quadrieren und das gibt den Wert. Interpretiert man speziell a als 3 und b als -1, dann ist zunächst $(1+(-3)) = 2$ zu bilden und das gibt durch Quadrieren den Wert 4.
Es ist wichtig, sich anzugewöhnen, Terme so zu lesen, dass man den dargestellten Rechenweg versteht, sie nicht einfach als *von links nach rechts hingeschriebene Zeichenfolge* zu sehen..
(3.1.4) Aber man darf Buchstaben auch selbst wieder als Terme interpretieren, wenn man ihnen die Rolle freier Variabler gibt. Sagen wir $a = cos(x)$ und b=sin(x). Dann liefert die Interpretation den neuen Term $(cos(x) + sin(x))^2$.

□ Einige Übungen dazu: a) Welch Unterschied im Rechenweg besteht zwischen den folgenden Termen. Formulieren Sie die Antwort verbal.

$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}+1$	$\sqrt{\frac{1}{x+1}}$

b) Dasselbe für

$(x+y)+z$	$x+(y+z)$	$x \cdot y + z$	$x \cdot (y+z)$

c) Es sei $y_1 = \frac{3+2x}{4-5x}$. Setzen Sie in den Term rechts für jedes x den gesamten Term y_1 ein. Wie sieht der entstehende Term y_2 aus? Vereinfachen Sie y_2 noch.
(3.1.5) So nützlich und effizient sich die soeben beschriebene Konstruktion auch erweist, enthält der Formalismus doch eine Verwchslungsgefahr. Nehmen wir konkret den Term $2+3$. Ist das eine Bezeichnung für die Zahl 5, also $2+3=5$ oder soll das Verfahren angegeben werden, die Addition, mit der aus den Eingaben 2 und 3 der Wert 5 produziert wird? **Im Rahmen einer Argumentation ist es nützlich, (bei Bedarf) zwischen beidem unterscheiden zu können**. Die übliche Termschreibweise macht diese Unterscheidung nicht. Man könnte das wieder mit dem Rollenkonzept lösen und die Rollen *Ergebnis* und *Rechenweg* einführen. Hier hat sich jedoch eine andere bessere Methode durchgesetzt.

Kap.3.1a: **Zuordnungen und Verlaufsdiagramme**

(3.1.6) Mit Hilfe der Pfeilschreibweise lassen sich die Zusammenhänge klären, die Bedeutungen bei Bedarf trennen. Wir schreiben $(x, y) \mapsto x+y$ oder $(x, y) \mapsto (x+y)^2$. Führen also zunächst die jeweils zu interpretierenden Buchstaben oder Symbole auf, schreiben einen Zuordnungspfeil (gelesen *wird zugeordnet*) und dann erst den Term. Dieses neue Symbol als Ganzes bezeichnet den Sachverhalt, dass bestimmten

Eingabegrößen eine Ausgabegröße zugeordnet wird, wobei es auf den Rechenweg **nicht** ankommt, **nur auf das Ergebnis**. Somit bezeichnet der rechts stehende Term im Zweifelsfall den *Wert,* der sich als Resultat der Auswertung ergibt. Beliebt sind in diesem Zusammenhang Schreibweisen der folgenden Art:

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1} - 1.$$

Dabei ist f(x) eine Bezeichnung für die Zahl, die von der Zuordnung geliefert wird und der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist ein möglicher Rechenweg, der zu diesem Resultat führt. Man darf ihn problemlos durch einen gleichwertigen ersetzen. Das bedeutet, dass etwa die folgenden Zuordnungen als **gleich angesehen werden,** trotz der unterschiedlichen Rechenwege :

$$x \mapsto (1+x^2)^2 \quad \text{und} \quad x \mapsto 1 + x^4 + 2x^2 \quad \text{und} \quad x \mapsto x^2(x^2+2)+1$$

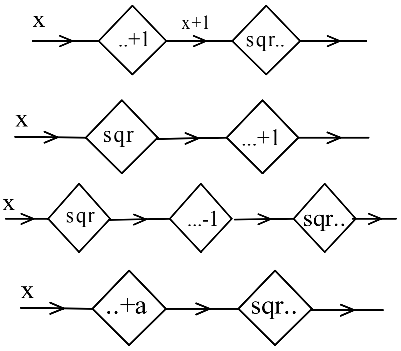
Isoliert man den Term dagegen für den Gebrauch in einer Formel (also kein $\mapsto$), **dann ist das Konstruktionsverfahren mitgemeint**: Aus bestimmten Eingabegrößen wird auf einem festgelegten angegebenen Rechenweg eine Ausgabegröße produziert. Einen solchen Rechenweg beschreiben wir günstig durch ein *Verlaufsdiagramm* nach Art eines Schaltdiagrammes. Links geben wir die Eingabegrößen an, ihr Wert läuft entlang der Leitungsbahnen, trifft auf *Transformationsstationen,* die den Eingangswert in bestimmter Weise transformieren, verändern und schließlich kommt rechts der zugehörige Ausgabewert heraus.
(3.1.7) Einige Beispiele, wobei sich die Symbolik weitgehend selbst erklärt. Speziell steht dabei sqr(x) für $\sqrt{x}$ ("sqareroot"):

$x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$

$x \mapsto g(x) = \sqrt{x}+1$

$x \mapsto h(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$

$x \mapsto k(x) = \sqrt{x+a}$



(3.1.8) Das Diagramm beschreibt jeweils, was ein Eingabewert auf seinem Weg zum Ausgabewert "erlebt". Es ist eine Art Beschreibung seines Schicksalsweges. Oder auch: Will man den Ausgabewert mit Hilfe eines Taschenrechners bestimmen, so wird man genau die im Diagramm gegebenen Rechenoperationen in der dargestellten Reihenfolge ausführen, um zum Endresultat zu gelangen.
(3.1.9) Im letzen Beispiel der Figur hat der Buchstabe a offenbar die Rolle eines äußeren Parameters. Jede Wahl von a liefert einen Term mit spezifizierter Variabler "derselben Art". Und daraus entsteht dann die Zuordnung.
(3.1.10) Nochmals zur Symbolik: Sie soll nicht vorab starr festgelegt sein, sondern flexibel so gewählt werden, dass sie die zugehörigen Sachverhalte verständlich macht, sie möglichst gut wiedergibt. Wir werden entsprechend in Übungen immer wieder dazu auffordern, Verlaufsdiagramme selbst zu skizzieren.
(3.1.11) Bei den quadratischen Gleichungen sind wir in (1.5.2-4) bereits der Unterscheidung von *Term* und *Zuordnung* bzw. Weg und Ergebnis begegnet.

☐ Skizzieren Sie ein Verlaufsdiagramm für $x \mapsto \sqrt{1+x} - x$ und für $x \mapsto x^3 - \sqrt{x^2+x}$ Welches Problem taucht auf, wie wird man es zeichnerisch lösen?

☐ h(x,y)=$(x+y)^2$ und k(a,b)=$a^2 + b^2$. In beiden Fällen hat mn zwei Eingabegrößen. Wie wird man das als Verlaufsdiagramm darstellen?

☐ Assoziativgesetz und Distributivgesetz lassen sich als Gleichheit zweier Verlaufsdiagramme veranschaulichen. Wie sehen die Diagramme aus?

> **Fassen wir zusammen**: Die Verlaufsdiagramme beschreiben die Rechenwege, auf denen Terme die zugehörigen Eingabegrößen in die Ausgabegröße umwandeln. Die Schaltung fügt dabei gewisse jeweils vorgegebene Elementaroperationen zusammen. Das Diagramm gibt wieder, wie das jeweils geschieht. Bei der Zuordnung interessiert nur das Ergebnis.

Term und Verlaufsdiagramm allein geben den Weg, die Zuordnung interessiert sich nur für den Wert, das Ergebnis.

Kap.3.2: **Verknüpfungen**

Kap.3.2a: **Algebraische Verknüpfungen**

(3.2.1) Wie werden Terme aufgebaut, woraus entstehen sie? Ein besonders wichtiger Bestandteil der Terme sind (neben den Buchstaben) die *Verknüpfungen* oder *Kompositionen*.
(3.2.2) Um zu verstehen was mit einer *algebraischen Verknüpfung* gemeint ist, stellen wir uns die Frage, was beispielsweise die "Addition reeller Zahlen" ist.

? Wie würden Sie einem intelligenten Wesen, das verständig und einsichtig ist, aber das Zahlrechnen nicht kennt, erklären, was *addieren* oder *multiplizieren* ist. Und das soll nicht über Vorführen und Auswendiglernen von Beispielen wie 1+3=4 geschehen, mit der Hoffnung, dass der Lernende dann irgendwann auch die nicht vorgeführte Beispiele von alleine beherrscht.
Oder auch: Wie muss eine Maschine aussehen, die die Addition beherrschen soll? Welche Art von Leistungen muss sie erbringen?

⇓ **(3.2.3)** Wir gehen die Antwort aus zwei Richtungen an: Zunächst machen wir eine sehr allgemeine Formfestlegung, die gleichsam eine große Zahl von Kandidaten bestimmt. In einem zweiten Schritt versuchen wir, **zusätzliche Eigenschaften** innerhalb dieses Kandidatenbereichs bestimmter Form anzugeben, die gerade die Addition aussondern.
(3.2.4) Zunächst also die Formbestimmung:

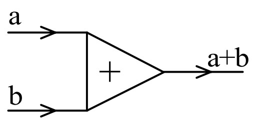
- Die *Addition reeller Zahlen* (und analog die Multiplikation, Subtraktion usw.) ist ein bestimmtes Verfahren, das in eindeutiger Weise aus **zwei** eingegebenen Zahlen mit festgelegter Reihenfolge **eine** neue Zahl macht. *Eindeutig* besagt: Gibt man dieselben Zahlen erneut ein, so soll immer wieder dieselbe Ausgangszahl herauskommen.
  Wie dies *Verfahren* aussieht, und durch welchen Mechanismus die Ausgabezahl aus den Eingabezahlen entsteht, ist für unsere mathematischen Überlegungen völlig unwichtig. Ein derartiges Verfahren nennen wir eine (*algebraische) Verknüpfung oder algebraische . Komposition*

Oder auch: Die Verknüpfung hängt nicht vom Verfahren selbst, nur von dessen Ergebnis ab.
(3.2.5) Wir formalisieren das Gesagte mit Hilfe der oben eingeführten Pfeilschreibweise, die ja gerade das Ergebnis, nicht aber den dahin führenden Weg abstrahiert:

$$\boxed{(\alpha,\beta) \overset{+}{\mapsto} \alpha+\beta}$$

(α,β)	Bezeichnung für das geordnete Paar der Eingabedaten.
$\mapsto$	Der Zuordnungspfeil, gelesen "wird zugeordnet". Das darüber gesetzte "+" ist eine Namensbezeichnung.
$\alpha+\beta$	**Bezeichnung** für den Ausgabewert, die sich ergebend Zahl.

Konkret: $(2,3) \mapsto 2+3=5$.
(3.2.6) Damit haben wir folgende (allgemeine) Kandidateneinschränkung: Die Addition ist eine Verknüpfung, die aus zwei Zahlen in eindeutiger Weise eine weitere Zahl macht. In den Verlaufsdiagrammen entspricht jede Addition einer elementaren Knotenstelle, in der zwei einlaufende Werte in einen auslaufenden umgewandelt werden. Das *Innenleben* der Knoten gehört nicht mehr zum Verlaufsdiagramm, hier interessieren nur die jeweils produzierten Werte.



(3.2.7) Im zweiten Schritt (zum Festlegen der Addition) muss man versuchen, dem intelligenten Wesen die spezifischen Eigenschaften der Zuordnung $\overset{+}{\mapsto}$ zu erklären, also Eigenschaften angeben, die diese spezielle Zuordnung von allen anderen unterscheiden. Wir werden darauf in (3.2.10) zurückkommen.

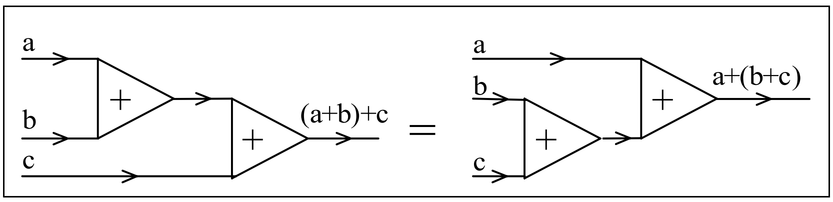
(3.2.8) Die Divsion $(\alpha, \beta) \stackrel{\cdot}{\mapsto} \frac{\alpha}{\beta}$ ist eine andere Verknüpfung, die zeigt, dass es allgemein tatsächlich auf die Reihenfolge der Eingabedaten ankommt. Überdies zeigt das Beispiel, dass man auch immer angeben muss, **welche** Eingabedaten zulässig sind. Bei der Division ist $\beta = 0$ sicher unzulässig.

Kap.3.2.b: Rechenregeln für die Verknüpfungen der reellen Zahlen

(3.2.9) Wir greifen die Frage aus (3.3.7) auf. Im Prinzip kann man unüberschaubar viele Verknüpfungen bilden. Damit erhebt sich das Problem, wieso die üblichen - Addition, Multiplikation, Subtraktion usw. - ausgezeichnet sind. Sie müssen irgendwie *besser* sein als die weiteren, anonym bleibenden, aber denkbaren Verknüpfungen.
Die Antwort ist: Sie und nur sie genügen bestimmten Regeln, die gerade die **Rechenregeln der reellen Zahlen** sind. Und diese Regeln sind besonders gut geeignet zur Formulierung von Gesetzen, mit denen man die Natur beschreiben kann. Insbesondere heißt das, dass sich die Gültigkeit dieser Regeln meist als viel wichtiger erweist, als die Art der Verwirklichung der Verknüpfungen.
(3.2.10) Wir geben die Regeln in Form von Grundregeln an, nicht in der Form der daraus hergeleiteten Gebrauchsregeln (Vgl. Kap.1). Wir wollen zunächst die Regeln behandeln, die für die **Addition** der reellen Zahlen gelten. Sie reichen noch nicht aus, um die reellen Zahlen selbst zu begründen. Aber sie bestimmen alle Rechnungen mit reellen Zahlen, **in denen nur die Addition auftritt**. Im oben einführend genannten "Klärungsgespräch" würden wir dem intelligenten Gesprächspartner gerade diese Regeln nennen. Offen bliebe dann immer noch das Problem, was *reelle Zahlen* eigentlich sind.
(3.2.11) Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir wie üblich mit $\mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Gesetze. (Üben Sie sich darin, die Bezeichnungen als sinnvolle Erinnerungstütze für den Inhalt zu erkennen und zu behalten, als Hilfe zur Rekonstruktion der Gesetze.)

(+,1)	Kommutativgesetz	Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
(+,2)	Assoziativgesetz	Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt $(\alpha+(\beta+\gamma) = ((\alpha+\beta)+\gamma)$
(+,3)	Existenz eines neutralen Elementes (der Null).	Es gibt eine Zahl 0 in $\mathbb{R}$, mit der Eigenschaft $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
(+,4)	Existenz des (zu einem Element) inversen Elementes.	Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine zweite Zahl, die mit (-α) bezeichnet wird und die die Eigenschaft hat: $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$. Kurz: $\alpha - \alpha = 0$.

Nochmals: Die Bedeutung dieser Regeln besteht darin, dass sich aus ihnen die übrigen Rechenregeln (der Addition) herleiten lassen **und** dass sie für andere Rechengrößen entweder auch gelten oder aber zumindest als Ausgangspunkt für ein System modifizierter Regeln dienen. Verständiges Einprägen der vier Regeln ist daher sehr wichtig.
(3.2.12) Das Assoziativgesetz beinhaltet die Gleichheit zweier Terme, also zweier Rechenwege. Als Verlaufsdiagramme:



☐ Wenn a,b und c alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 durchlaufen, wieviel Zahlgleichungen werden dann durch diese Diagrammgleichung bereits erfaßt?

☐ Weshalb muss das vierte Gesetz (in (3.2.12)) **nach** dem dritten kommen? Was besagen die Gesetze in der eingeführten Automateninterpretation? Überlegen Sie sich Experimente, die man mit dem Automaten machen kann mit vorhersagbaren Resultaten.

☐ Ersetzen Sie in den 4 Regeln sämtliche "+" durch ein Multiplikationszeichen "·". Was ist dann in 3) anstelle der Zahl Null als "neutrales Element" zu wählen? Wie sieht jetzt 4) aus? Wieso gilt 4) dann nicht mehr? Wie kann und sollte man 4) abändern, damit wieder eine (**von der Multiplikation**) erfüllte Grundbedingung herauskommt?

(3.2.13) Welche Grundregeln haben wir für das Rechnen mit reellen Zahlen insgesamt? Die 4 oben formulierten Regeln für die Addition, die in der letzten Frage erarbeiteten (abgeänderten) Regeln für die Multiplikation. Es fehlen Regeln, die festlegen, wie Multiplikation und Addition im Verbund wirken. Hierzu eignet sich ein Distributivgesetz. Eines davon genügt, da das zweite sofort über das Kommutativgesetz für die Multiplikation folgt. Zur Erinnerung:

$$\boxed{\text{Für alle a,b und x aus } \mathbb{R} \text{ gilt } \ (a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x}$$

Beachten Sie die Verwendung der Klammerersparnisregel "Punktrechnung vor Strichrechnung". Eigentlich wäre korrespondierend zum Verlaufsdiagramm $(a\cdot x)+(b\cdot x)$ zu schreiben. Nicht gemeint ist mit der üblichen Schreibweise a$\cdot((x+b)\cdot x)$ oder (a$\cdot(x+b))\cdot x$.

⇓ **(3.2.14) Unser Ziel sind Formeln und Rechenverfahren für vektorielle Größen**. Da sich die Rechenregeln für Zahlen vielfach bewährt haben, wird man versuchen, alle Regeln für Zahlen auf die Vektoren zu übertragen. Am Ende müßte man dann die Formeln und Terme nur vektoriell interpretieren. Für die Addition läßt sich dies Programm tatsächlich ausführen, wie wir im nachfolgenden Teilkapitel sehen werden. Für die Multiplikation dagegen scheitert es, so dass man einen Satz geeignet geänderter Regeln benötigt. Diese werden dann gerade die vektortypischen Eigenschaften erfassen, also das was das Rechnen mit Zahlen vom Rechnen mit Zahltupeln unterscheidet.

⇓ Kurz: **Wir müssen herausarbeiten, was beim Rechnen mit Vektoren gleich bleibt und was sich ändert und wie es das tut.**

Kap.3.3: **Das Rechnen mit Vektoren**

Kap.3.3a: **Die Addition von Vektoren**

(3.3.1) Wir wollen also für die Mengen $\mathbb{R}^n$ ebenso wie für die übrigen eingeführten Mengen vektorieller Größen, also V^3, V_0^3, $\mathbb{R}_K^3$ - **nicht** aber für E^3 - je eine Addition einführen, die alle den oben in (3.2.12) gegebenen Grundregeln genügen sollen.
(3.3.2) Zunächst brauchen wir nach unserem Konzept eine Verknüpfung, die jeweils aus zwei Vektoren (einer bestimmten Art) einen weiteren Vektor derselben Art macht. Kandidaten hierfür sind naheliegend. Wir bezeichnen diese Verknüpfung als *Vektoraddition* und verwenden zunächst das Symbol $\boxplus$ zur kennzeichnenden Unterscheidung von der Zahladdition.
(3.3.3) Wir beginnen mit $\mathbb{R}^n$. Hier gibt es einen naheliegenden Kandidaten. Dazu überlegen wir wie folgt:

(1)	$\Rightarrow$	Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus $\mathbb{R}^n$ seien gegeben.
(2)		Wir benötigen einen neuen Vektor aus $\mathbb{R}^n$, den
	T	wir mit $\vec{x} \boxplus \vec{y}$ bezeichnen wollen.
(3)		Die beiden Eingabevektoren sind als Elemente von $\mathbb{R}^n$ n-tupel.
		D.h. es gilt mit der üblichen Bezeichnungswahl für die Komponenten:
		$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.
(4)		Dann definert man in naheliegender Weise
	!	$\boxed{\vec{x} \boxplus \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).}$
		Links steht die Bezeichnung, rechts das Berechnungsverfahren.
(5)	T	Verbale Charakterisierung: Komponentenweise Addition.

Beachten Sie: Auf der rechten Seite der im vierten Schritt gegebenen Gleichung tritt das Plus der **reellen** Addition auf. Besitzt man die Zahladdition, dann beherrscht man die rechte Seite und damit ist die Gleichung sinnvoll. Denn links steht eine abkürzende Bezeichnung der rechten Seite.
Der fünfte Schritt gibt eine verbale Charakterisierung, mit der man sich die Verknüpfung auch gut merken kann und sollte:

Die Vektoraddition $\boxplus$ in $\mathbb{R}^n$ erfolgt durch komponentenweise Addition!

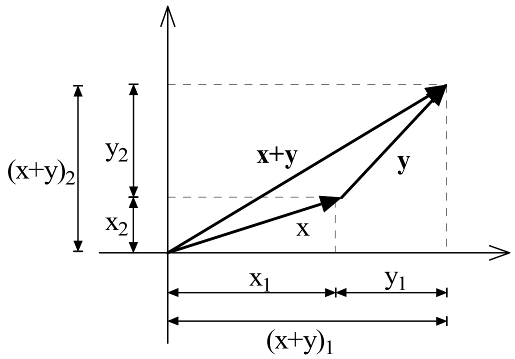
(3.3.4) Einige Konkretisierungen, die zugleich unterschiedliche auftretende Schreibweisen zeigen:

$\vec{x} = (1,2,3)$ $\vec{y} = (2,-2,0)$		$(\vec{x}, \vec{y}) = ((1,2,3),(2,-2,0)) \stackrel{\boxplus}{\longmapsto} (3,0,3)$
$\vec{0} = (0,0,0,0)$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$		$(\vec{0}, \vec{a}) \stackrel{\boxplus}{\longmapsto} \vec{0} \boxplus \vec{a} = \vec{a}$
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ $\vec{b} = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$		$(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\boxplus}{\longmapsto} \vec{a} \boxplus \vec{b} = \vec{0}$
Für n=1:		$(3) \boxplus (7) = (10)$.

$\Uparrow$ **(3.3.5)** Damit ist in $\mathbb{R}^n$ eine Verknüpfung erklärt. Beachten sie aber Folgendes: Man darf (1,2) und (2,1) addieren. $(1,2) \boxplus (2,1) = (3,3)$. Und ebenso $(1,2,0) \boxplus (2,1,0) = (3,3,0)$. Nicht zulässig ist dagegen die Addition von $(1,2)$ und $(1,2,0)$. Beide Objekte stammen aus **unterschiedenen Vektorräumen**. Eine Verknüpfung ist nicht eingeführt. Entgegen einer immer wieder auftauchenden Meinung, ist *Null* nicht dasselbe wie *Nichts.* Man darf zusätzliche Komponenten keineswegs einfach hinzufügen, auch wenn sie den Wert Null haben.
(3.3.6) Jetzt gehen wir zum Vektorraum $\mathbb{R}_K^3$ über. Dazu denken wir uns ein festes Koordinatensystem K vorgegeben und interpretieren alle Zahltripel als zugehörige Koordinatenvektoren. Unsere Verknüpfung $\boxplus$ wirkt auch in dieser Menge. Zeichnen wir die geometrischen Pfeile, die zu drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{x} \boxplus \vec{y}$

gehören, dann sehen wir, dass die komponentenweise Addition gerade die übliche Parallelogrammkonstruktion, das *Parallelogramm der Kräfte* beinhaltet.

Komponentenweise Addition bedeutet geometrisch: Bildung der Parallelogrammdiagonalen.



$\Uparrow$ **(3.3.7)** Somit ist die Vektoraddition auch für den $\mathbb{R}^3_K$ erklärt, **wobei wir die Konstruktion zusätzlich geometrisch interpretieren können.**
(3.3.8) Es bleiben die beiden Räume V^3 und V^3_0. Hier verwenden wir die soeben gefundene geometrische Interpretation als **Definition**. D.h. sind zwei Vektoren in Form geometrischer Pfeile gegeben, dann bestimmen wir mit Hilfe der Parallelogrammkonstruktion einen dritten Pfeil und dieser Pfeil soll unsere Vektorsumme sein. Genauer:

T	**Die Parallelogrammkonstruktion:**
(1)	Es seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei geometrische Pfeile mit gemeinsamem Ursprung.
(2)	Verschiebe den (zweiten) Pfeil $\vec{y}$ parallel in Richtung von $\vec{x}$ bis in den Endpunkt von $\vec{y}$.
(3)	Verbinde den Anfangspunkt von $\vec{x}$ mit dem Endpunkt des verschobenen $\vec{y}$.
(4)	Das ergibt den geometrischen Pfeil $\vec{x} \boxplus \vec{y}$.

☐ Führen Sie die Konstruktion in der anderen Reihenfolge durch, also mit $\vec{y}$ als erstem und $\vec{x}$ als zweitem Vektor. Begründen Sie das Attribut "Parallelogramm".

Ist $\vec{x}$ freier Vektor aus V^3 und $\vec{y}$ gebundener Vektor aus V^3_0, so interpretiert man $\vec{x}$ teilweise als Element von V^3_0 und kann dann $\vec{x} + \vec{y}$ bilden.

$\Uparrow$!! Damit haben wir in all unseren Räumen eine Verknüpfung erklärt, die aus zwei vorgebenen zugehörigen Vektoren einen neuen Vektor desselben Typs macht.

?! **(3.3.9) Wie steht es mit den Rechenregeln**, die wir für die Addition der Zahlen aufgestellt haben? Man überzeugt sich leicht, dass sie erfüllt sind und zwar sowohl für die komponentenweise Addition als auch für die geometrische Parallelogrammkonstruktion.
(3.3.10) Als Beispiel der Überprüfung einer Rechenregel betrachten wir zunächst das Kommutativgesetz für die Addition in $\mathbb{R}^n$. D.h. wir müssen zeigen, dass für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{x} \boxplus \vec{y} = \vec{y} \boxplus \vec{x}$. Hierzu rechnen wir beide Seiten aus:

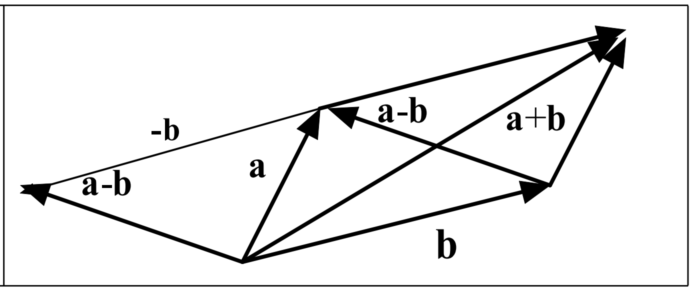
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x} \boxplus \vec{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ \vec{y} \boxplus \vec{x} &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n) \end{aligned}}$$

Auf den rechten Seiten taucht nur die reelle Addition + auf. Und die **ist** kommutativ. D.h. es gilt $x_1 + y_1 = y_1 + x_1$ usw. Daher sind die rechten Seiten gleich und damit auch die linken. Oder auch: Das Kommutativgesetz für $\boxplus$ in $\mathbb{R}^n$ gilt, **weil es über die Definition auf auf das Kommutativgesetz in $\mathbb{R}$ zurückgeführt wird.**

☐ Formulieren Sie das Assoziativgestz für $\boxplus$ in $\mathbb{R}^n$ und beweisen Sie es analog.
(3.3.11) Als nächstes ist die *Existenz der Null* zu prüfen. D.h., man benötigt ein Element $\vec{0}$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\vec{x}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt $\vec{x} \boxplus \vec{0} = \vec{0} \boxplus \vec{x} = \vec{x}$. Offensichtlich leistet das n-tupel $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$ das Gewünschte. Wir nennen dies Tupel den *Nullvektor.* Eneut kann man sagen: Die gewünschte Gleichung gilt, weil die Komponenten $0 \in \mathbb{R}$ die entsprechende Eigenschaft erfüllen.
☐ Wie steht es jetzt mit der Existenz der inversen Elemente? Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Wie ist $-\vec{a}$ zu wählen?

☐ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien geometrische Pfeile. Skizzieren Sie das davon erzeugte Parallelogramm. Dann ergibt $\vec{a} \boxplus \vec{b}$ eine der beiden Parallogrammdiagonalen. Welche geometrische Interpretation hat $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} \boxplus (-\vec{b})$? (Das Resultat **merken**!)

Zwei Methoden zur Bestimmung von $\vec{a} - \vec{b}$. Es gilt $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Die andere Konstruktion über die zweite Parallelogrammdiagonale ist meist vorzuziehen.



⇑ **Zusammengefaßt können wir sagen:** $\boxplus$ in $\mathbb{R}^n$ erfüllt die erwünschten Rechenregeln. Dies liegt daran (Begründung!), dass alle Eigenschaften über die komponentenweise Addition auf die entsprechenden Eigenschaften der reellen Zahlen zurückgeführt werden. Und für die Zahlen gelten die angegebenen Eigenschaften.

☐ Jetzt sei $\boxplus$ die in V^3 bzw. V^3_0 eingeführte geometrische Addition. Überzeugen Sie sich, dass auch hierfür die analog formulierten Rechenregeln gelten.

☐ Die Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses (relativ zum Ufer) werde durch $\vec{V} \in V^3$ beschrieben. Im Fluss bewegt sich ein Boot mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zum umgebenden Wasser. Welche Interpretation hat der geometrische Pfeil $\vec{V} + \vec{w}$?

(3.3.12) Vom Nutzen eines Systems von Grundregeln. Angenommen wir haben im Bereich der reellen Zahlen eine Rechengesetz allein mit Hilfe der Grundregeln bewiesen. Dann gilt dieser Beweis auch für unsere Vektoren, wir müssen nur alle Buchstaben als Vektoren (desselben Raumes) interpretieren und alle + durch ein $\boxplus$ ersetzen. Und haben wir irgendeine andere Menge von Größen mit einer Verknüpfung, die erneut unsere Grundregeln erfüllt, dann gilt auch für dieses System das (nur umformulierte und uminterpretierte) Rechengesetz. Ein erneuter Beweis ist nicht erforderlich.

☐ So gilt beispielsweise $(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a} = \vec{b}$. Wieso ist das eine nützliche Hilfe bei der geometrischen Konstruktion von $\vec{b} - \vec{a}$?

(3.3.13) Beispiel: Das Assoziativgesetz in $\mathbb{R}$ hat die Konsequenz, dass man für drei Zahlen a,b und c die Summe einfach a+b+c schreiben darf. Denn jede der beiden zulässigen Beklammerungen (bei fester Reihenfolge) ergibt dasselbe Resultat. Betrachten wir jetzt vier Summanden a,b,c,d. Für sie gibt es genau 5 mögliche **zulässige Beklammerungen** (bei fester Reihenfolge), wie man sich überlegt:

$s_1 = (a+b)+(c+d)$	$s_2 = ((a+b)+c)+d$	$s_3 = (a+(b+c))+d$
	$s_4 = a+((b+c)+d)$	$s_5 = a+(b+(c+d))$

⊤ *Zulässige Beklammerung* besagt, dass man das Ergebnis allein durch (mehrfaches) Anwenden der gegebenen Verknüpfung auf die Eingabegrößen bilden kann.

☐ Beschreiben sie das Assoziativgesetz vom Automatenstandpunkt, dass also zwei verschiedene Schaltungen dieselbe Gesamtzuordnung erzeugen. Veranschaulichen Sie sich auch die Terme $s_1, ...s_5$ als Schaltungen. Vgl. (3.2.12).

Mit Hilfe des Assoziativgesetzes weist man jetzt leicht nach, dass alle 5 Beklammerungen dasselbe Resultates ergeben, so dass man s=a+b+c+d schreiben darf.

Wieso ist beispielsweise $s_1 = s_2$? Zunächst ist a+b erneut ein Element aus $\mathbb{R}$. Nennen wir es A. Dann gilt $s_1 = A + (c+d) = (A+c)+d$. Dabei haben wir das vorausgesetzte Assozitivgesetz für drei Zahlen aus $\mathbb{R}$ benutzt. Einsetzen gibt $(A+c)+d = ((a+b)+c)+d = s_2$ wie gewünscht. Durch die beschriebene Uminterpretation ($\boxplus$ für + und alle Buchstaben Vektoren desselben Typs) erhält man sofort einen analogen Beweis für Vektoren. D.h. auch dort darf man $\vec{a} \boxplus \vec{b} \boxplus \vec{c}$ und $\vec{a} \boxplus \vec{b} \boxplus \vec{c} \boxplus \vec{d}$ schreiben. Jede zulässige Beklammerung ergibt dasselbe Resultat.

☐ Versuchen Sie herauszubekommen, wieviel zulässige Beklammerungen (bei fester Reihenfolge) für $a_1 + a_2 + ...a_n$ möglich sind. Können Sie das zumindest für kleine n, etwa bis n=7 bestimmen?

! **(3.3.14)** Mit etwas ausgefeilteren mathematischen Beweismethoden zeigt man, dass auch alle zulässigen Beklammerungen von n Summanden denselben Wert ergeben.

(3.3.15) Konkretes Beispiel für den **Nutzen der Grundregeln:** Hat man irgendeine Menge mit einer Verknüpfung,die eventuell sehr kompliziert ist, von der man aber weiß, dass sie das Assoziativgesetz erfüllt, dann kann man den Beweis direkt übertragen. Insbesondere gilt der Beweis für alle unsere vektoriellen Mengen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^3_K$, V^3 und V^3_0 mit der jeweiligen Addition $\boxplus$. Und das heißt: **Bei Summen mit beliebig vielen Termen darf man die Klammern fortlassen, weil alle zulässigen Beklammerungen dasselbe Resultat ergeben.**

⇑!! **(3.3.16)** Praktisch bedeutet das bisherige Ergebnis: **Was allein die Addition betrifft, so dürfen wir mit Vektoren genauso rechnen wie mit rellen Zahlen**. Alle Rechnungen lassen sich ja allein über die Grundregeln gerechtfertigt.

Kap.3.3b: **Multiplikation der Vektoren mit einem Skalar**

(3.3.17) Nach diesem erfreulich einfachen und erfolgreichen Einstieg in die Vektorrechnung liegt es nahe, zu fragen: **Kann man die Vektorrechnung nicht so entwickeln, dass man mit Vektoren immer genauso wie mit Zahlen rechnen kann?** Das wäre ideal, da man dann überhaupt keine neuen Regeln und Rechentechniken benötigen würde. Leider ist die Antwort negativ, abgesehen von einem ganz speziellen Fall, auf den wir zurückkommen werden: Die komplexen Zahlen.

⇓ Unter diesen Umständen wird man versuchen, Rechenregeln zu finden, die einerseits möglichst analog zum Zahlrechnen sind und die andererseits die neuartigen mathematischen Eigenschaften vektorieller Größen möglichst gut wiedergeben.

(3.3.18) Welche rechnerischen Eigenschaften haben die reellen Zahlen außer der Addition? Nun es gibt eine zweite ausgezeichnete Verknüpfung, die Multiplikation. Hierzu gibt es gerade kein allgemeines vektorielles Analogon. Man scheitert an der Einführung der zugehörigen Umkehroperation, der Division. Vgl. die Frage in (3.2.12).

(3.3.19) Was gibt es stattdessen als typisch vektorielle Konstruktion? Wir orientieren uns an den geometrischen Pfeilen des V^3_0. Für diese hat man offensichtlich neben der Addition noch die folgende Konstruktion:

Gibt man eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Pfeil $\vec{a} \in V_0^3$ vor, so kann man daraus einen neuen Pfeil derselben Richtung, aber λ-fachen Länge bilden. Ist $\lambda < 0$, so ist die Pfeilrichtung umzudrehen. Für $\lambda = 0$ entsteht der Nullpfeil.
Als Bezeichnung für den neuen Pfeil wählen wir (vorläufig) $\lambda \odot \vec{a}$.

Wir formulieren diese Konstruktion als Zuordnung bzw. Automat, um so die allgemeine Form zu ersehen:

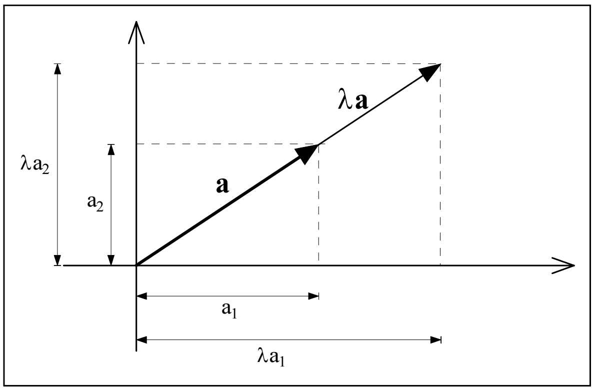
$$\boxed{(\lambda,\vec{a}) \overset{\odot}{\longmapsto} \lambda \odot \vec{a}}$$

Der zugehörige Automat hat wieder zwei Eingabeschlitze jetzt aber unterschiedlicher Art. Der erste nimmt nur Zahlen auf und der zweite nur Vektoren des betrachteten Typs. Das Ergebnis ist ein Vektor desselben Typs.

T **(3.3.20)** Eine Verknüpfung dieser Art nennt man eine *äußere Verknüpfung.* Im Unterschied zur *inneren Verknüpfung,* bei der alle drei beteiligten Objekte von demselben Typ sind.

T **(3.3.21)** Die eingeführte äußere Verknüpfung (einer Zahl mit einem Vektor) wird *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar* genannt. Hüten Sie sich davor, dies mit *Skalarprodukt* zu verwechseln. Das ist eine ganz andere Verknüpfung, die wir später in Kap. 6.1 besprechen werden.

(3.3.22) Nach dieser Formfestlegung ist es leicht, die entsprechende Konstruktion für den $\mathbb{R}^3_K$ und analog den $\mathbb{R}^n$ zu finden. Zunächst betrachten wir beide Pfeile $\vec{a}$ und $\lambda \odot \vec{a}$ im festen Koordinatensystem K. Dann seien $\vec{a}^K$ und $(\lambda \odot \vec{a})^K$ die zugehörigen Koordinatenvektoren. Etwa $\vec{a}^K = (a_1, a_2, a_3)$. Mit Hilfe elementarer geometrischer Konstruktionen folgt sofort: $(\lambda \odot \vec{a})^K = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Jede Koordinate ist einfach mit dem Faktor λ zu multiplizieren.



T Diese Regel läßt sich unmittelbar auf den $\mathbb{R}^n$ ausdehnen:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} = (a_1, a_2, ...a_n)$.
Dann wird das Produkt von λ mit $\vec{a}$ wie folgt definiert:
$\boxed{\lambda \odot \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).}$

Verbal läßt sich das als *komponenteweise Multiplikation mit* λ charakterisieren. Beachten Sie: Erneut treten auf der rechten Seite nur Zahlverknüpfungen auf, im jetzigen Fall Produkte aus reellen Zahlen.
(3.3.23) Beispiele:

$(2, (1, 2, 3)) \mapsto (2, 4, 6)$	$0 \odot (u, v, x, y) = (0, 0, 0, 0)$
$((-1), (1, 1 + a, x^2 - 3)) \mapsto (-1, -1 - a, 3 - x^2)$	$((1 + a), (x, 0, 0, 4) \mapsto ((1 + a)x, 0, 4(1 + a))$

(3.3.24) Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Man übernimmt die geometrische Interpretation und sagt allgemein, dass für $\lambda \neq 0$ die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\lambda \odot \vec{x}$ *dieselbe Richtung* hätten. Etwas vorsichtig muss man mit der Formulierung im Falle $\lambda < 0$ sein. Nach dem soeben eingeführten mathematisch zweckmäßigem Sprachgebrauch haben beide Vektoren auch dann "dieselbe Richtung". Manchmal sagt man in diesem Fall jedoch auch, sie hätten *entgegengesetzte Richtung*. Das soll im mathematischen Sprachgebrauch also immer *gleiche Richtung mit negativem Skalenfaktor* λ bedeuten. Konkret: "$\vec{x}$ und $-\vec{x}$ haben dieselbe Richtung" ist richtig und üblich.
(3.3.25) Beachten Sie auch, dass die Umkehrung gilt: Hat man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (ungleich Null), die dieselbe Richtung aufweisen, dann gibt es immer eine Zahl $\alpha \neq 0$, so dass $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ gilt. Dieser Sachverhalt wird in mathematischen Argumentationen gerne benutzt.

Kap.3.3c: **Vektorrechnung**

⇑ **(3.3.26)** Fassen wir den bisherigen Stand der Dinge zusammen:

♦ Für alle unsere Mengen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^3_K$, V^3_0 und V^3 haben wir zwei Verknüpfungen eingeführt. Eine *Vektoraddition* $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \boxplus \vec{y}$ und eine *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar* $(\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda \odot \vec{x}$.

♦ Im Falle des $\mathbb{R}^n$und des $\mathbb{R}^3_K$ werden beide Verknüpfungen durch das Stichwort *komponentenweise* charakterisiert.

♦ Im Falle von V^3_0 und V^3 sind die Verknüpfungen geometrisch (*Parallelogrammregel, Längenänderung)* motiviert und definiert.

♦ Die Vektoraddition erfüllt dieselben Rechenregeln wie die Addition reeller Zahlen.

⇓ Zwei Fragen stellen sich an dieser Stelle: *Welche Rechenregeln gehören zu* $\odot$? Und: *Haben die beiden Verknüpfungen in* $\mathbb{R}^3_K$ *auch eine geometrische Bedeutung*?

(3.3.27) Wir wenden uns zunächst der zweiten Frage zu: Angenommen man hat zwei Vektoren $\vec{a}^K$ und $\vec{b}^K$ aus $\mathbb{R}^3_K$. Das sind einerseits Zahltripel, die man komponentenweise zu einem neuen Tripel $\vec{a}^K \boxplus \vec{b}^K$ addiert. Aber man kann auch zu den beiden zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ übergehen. Diese geometrischen Pfeile kann man geometrisch zu dem neuen Pfeil $\vec{a} \boxplus \vec{b}$ addieren. Und zu diesem Pfeil können wir wieder den zugehörigen Koordinatenvektor bilden. Nach unseren Regeln ist dieser Koordinatenvektor mit $(\vec{a} \boxplus \vec{b})^K$ zu bezeichnen. Macht man eine Skizze, so sieht man unmittelbar elementargeometrisch, **dass beide Vektoren gleich sind.** D.h. man hat die Rechenregel:

$$\boxed{(\vec{a} \boxplus \vec{b})^K = \vec{a}^K \boxplus \vec{b}^K.}$$

☐ Verdeutlichen Sie sich genau die Bedeutung beider Seiten. Eigentlich müßte man auch noch die beiden $\boxplus -$ *Zeichen* unterscheiden. (Wieso?)

Ebenso gilt (als Konsequenz der Strahlensätze)

$$\boxed{(\lambda \odot \vec{a})^K = \lambda \odot \vec{a}^K.}$$

☐ Verdeutlichen Sie sich auch die Bedeutung dieser Gleichung.

⇑! **(3.3.28)** D.h. **im** $\mathbb{R}^3_K$ **stimmen die geometrischen und rechnerisch komponentenweisen Verknüpfungen überein.**

(3.3.29) Jetzt behandeln wir die zweite offene Frage. **Welche Rechenregeln muss oder sollte die äußere Verknüpfung** $\odot$ **erfüllen?** Es liegt nahe, diese Regeln in zwei Gruppen zu unterteilen. Einmal Regeln, in denen nur $\odot$ auftritt (so wie wir oben Regeln hatten, in denen nur $\boxplus$ auftrat) und Regeln, in denen beide Verknüpfungen vorkommen.

(3.3.30) Für die erste Gruppe erweisen sich die folgenden beiden (sehr einfachen) Regeln als ausreichend.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{x}$ soll gelten:	$(\alpha \cdot \beta)\vec{x} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{x})$
	(*Fastassoziativität*)
Für jeden Vektor $\vec{x}$ soll gelten	$1 \odot \vec{x} = \vec{x}$
	(*Unitarität*)

(3.3.31) Zunächst überzeugt man sich leicht davon, dass diese Regeln für die von uns eingeführten Vernüpfungen erfüllt sind - für alle unsere Mengen! $\alpha \cdot \beta$ steht hier für die übliche Multiplikation reeller Zahlen. Etwa $6 = 3 \cdot 2$. Und damit $6 \odot (x, y, z) = (6x, 6y, 6z)$. Alternativ $2 \odot (x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Also

$$3 \odot (2 \odot (x, y, z)) = 3 \odot (2x, 2y, 2z) = (3 \cdot 2x.3 \cdot 2y, 3 \cdot 2z) = (6x, 6y, 6z).)$$

(3.3.31) Jetzt vergleichen wir die Regeln mit den für die Multiplikation in $\mathbb{R}$ erarbeiteten Regeln.

Das Kommutativgesetz: Im Vektorfall stellt sich die Frage nach der Gültigkeit des Gesetzes nicht. Denn bei einer äußeren Verrknüpfung kann man die Reihenfolge der Eingabegrößen nicht ändern: Der eine Schlitz nimmt immer den Skalar, die Zahl auf, der andere den Vektor. Man kommt jedoch aus Zweckmäßigkeitsgründen überein, das Kommutativgesetz per Schreibweise formal zu erzwingen. D.h. man erlaubt $\vec{x} \odot \alpha$ als zweite Schreibweise für $\alpha \odot \vec{x}$. Die Gleichung $\vec{x} \odot \alpha = \alpha \odot \vec{x}$ ist hier einfach als Definitionsgleichung einer neuen Schreibweise zu sehen. In der Physik schreibt man beispielsweise $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$.

☐ Zeigen Sie mit Hilfe der Grundregeln, dass die verschiedenen möglichen Interpretationen des Termes $\alpha\vec{g}\beta$, etwa $\alpha \odot (\vec{g} \odot \beta)$ oder $(\alpha \odot \vec{g}) \odot \beta$ oder $(\alpha\beta) \odot \vec{g}$ alle zu demselben Resultat führen!

☐ Welcher **Unterschied** besteht zwischen Assoziativgesetz und Fastassoziativgesetz? Welche Konsequenz hat das? Welcher Unterschied besteht für die beiden letzten Grundregeln (der reellen Multiplikation) als Folge des Tatbestandes, dass eine äußere Verknüpfung vorliegt? Vgl. die Frage aus (3.2.12).

(3.3.32) Wie sieht schließlich die zweite Gruppe von Rechenregeln aus, in denen beide Verknüpfungen gemeinsam auftreten? Diese Regeln erhält man, indem man das Distributivgesetz vektoriell interpretiert. Auch für das Zahlrechnen sind es ja die Distributivgesetze, die die Addition und die Multiplikation koppeln, die festlegen, wie man mit beiden Verknüpfungen gemeinsam rechnet. Jetzt müssen wir nur darauf achten, dass im Vektorfall ein einfaches Produkt jeweils aus einem Zahlfaktor und einem Vektorfaktor besteht.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{x}$ soll gelten:	$(\alpha+\beta) \odot \vec{x} = \alpha \odot \vec{x} \boxplus \beta \odot \vec{x}$
Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ soll gelten:	$\alpha \odot (\vec{x} \boxplus \vec{y}) = \alpha \odot \vec{x} \boxplus \alpha \odot \vec{y}$
	Distributivgesetze

☐ Zeigen Sie, dass diese Gesetze in den von uns eingeführten Räumen gelten. Beachten Sie: Im 2. Gesetz müssen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ immer von demselben Vektortyp sein. Wieso taucht einmal in den Gesetzen das Zeichen + auf?

(3.3.33) Damit gelten auch alle Folgerungen, die sich mit Hilfe der Distributivgesetze ziehen lassen. Vgl. Kap. 1.2.1. Insbesondere kann man Summen der folgenden Art distributiv ausrechnen:

$$(a_1 + a_2 + a_3) \odot (\vec{x}_1 \boxplus \vec{x}_2 \boxplus \vec{x}_3 \boxplus \vec{x}_4) = ...$$

Die Rechnung erfolgt mit Hilfe der für Zahlen bewährten Regel *jeder mit jedem* .

(3.3.34) Über die eingeführten Regeln kann man die folgende **Verhaltenshilfe für das Rechnen mit Vektoren** abstrahieren**:**

	Verhaltenshilfe für das Rechnen mit Vektoren
♦♦	**Was die Addition und die Multiplikation von Vektoren mit Zahlen anbelangt, so kann man mit Vektoren genauso rechnen wie mit Zahlen, sofern man nur die folgenden Punkte beachtet:**
♦	**Jedes Produkt, das als Summand auftritt, muß genau einen Vektor als Faktor enthalten und das Ergebnis so einer Produktbildung ist ein Vektor.**
♦	**Durch Zahlfaktoren (ungleich Null) kann man teilen.**
♦	**Durch einen Vektor darf man nie teilen.**

Das ist ein nützliches Resultat, das man sich genau einprägen sollte. Denn mit Hilfe dieser Regeln beherrscht man sofort das elementare Rechnen mit Vektoren, sofern man das Rechnen mit reellen Zahlen beherrscht. Und zusätzlich ist man auch in der Lage, jeweils die Gültigkeit der Rechnung zu begründen.

(3.3.35) Ein Beispiel: Die nachfolgende Rechnung für $a, b \in \mathbb{R}$

$$3\,(2(a+3b)-4b)+6a = 6a+18b-12b+6a = 12a+6b = 6(2a+b)$$

hat ein vektorielles Analogon, wobei jetzt $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus einem unserer Räume zu nehmen sind, etwa aus dem $\mathbb{R}^n$:

$$3\left(2(\vec{a}+3\vec{b})-4\vec{b}\right)+6\vec{a} = 6\vec{a}+18\vec{b}-12\vec{b}+6\vec{a} = 12\vec{a}+6\vec{b} = 6(2\vec{a}+\vec{b}).$$

Sämtliche Rechenschritte lassen sich mit unseren Grundregeln rechtfertigen.

T **(3.3.36)** Dabei haben wir in der Rechnung stillschweigend die folgenden **üblichen Konventionen** eingeführt: Wir haben "+" anstellen von "$\boxplus$" geschrieben und das übliche (teilweise fortlassbare) "$\cdot$" anstelle von "$\odot$" benutzt. Hierdurch wird der Vergleich natürlich noch weiter erleichtert. Mit etwas Typbewußtsein ist immer sofort klar, ob die vektorielle oder die skalare Verknüpfung gemeint ist. **Von jetzt ab benutzen wir fast immer diese Konventionen!**

☐ Führen Sie die exakten Symbole in der Rechnung wieder ein und begründen Sie die einzelnen Rechenschritte. Der Term $-4\vec{b}$ etwa ist zweideutig. Welche zwei Interpretationsmöglichkeiten bestehen?

(3.3.37) Fehlendes Typbewußtsein führt vielfach zu schwerwiegenden und unnötigen Fehlern. Leider sind derartige Fehler erfahrungsgemäß nur schwer auszurotten. Die nachfolgende Übungsfrage versucht dem vorzubeugen. Schulen Sie Ihr Wahrnehmungsvermögen!

☐ Welche der folgenden Gleichungen ist unzulässig und wieso? Alle Größen mit Pfeil sind als Vektoren (desselben Raumes) zu interpretieren, alle ohne Pfeil als Zahlen.

$2\left(3\vec{x}+\vec{a}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right) = \vec{x}-7$		$3\vec{x}(7-\vec{b}) = \vec{a}$
$3(\vec{x}7-\vec{b}) = \vec{a}$		$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{\vec{a}}{x}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{a}{\vec{x}}$		$(2+a)(3-b)(\vec{x}-\vec{a}) = \frac{\vec{x}}{(2-a)}$

Bei den korrekten Gleichungen: Welche Umformungen und Vereinfachungen liegen nahe?
(3.3.38) Die Division beider Seiten einer Vektorgleichung durch eine Zahl (ungleich Null) ist nach (3.3.19) erlaubt, nicht dagegen die Division durch einen Vektor. Die Division durch eine Zahl a ist dabei als Multiplikation mit der Zahl $\frac{1}{a}$ zu interpretieren. Und dann greifen die Grundregeln der Fastassoziativität und Unitarität. Ein Beispiel für das Rechnen mnit Vektoren und für mathematisches Vorgehen:
Angenommen wir wissen $3\vec{x} = \vec{b}$. Multiplikation mit $\frac{1}{3}$ gibt $\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}\vec{b}$. Die linke Seite gibt aber $\frac{1}{3}(3x) = (\frac{1}{3}\cdot 3)\vec{x} = 1\vec{x} = \vec{x}$ nach unseren Regeln. D.h. wir erhalten die gleichwertige und erwartete Gleichung $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{b}$.

? **(3.3.38)** Was ist, wenn $\vec{b} = \vec{0}$ ist? Dann erwarten wir $\frac{1}{3}\vec{0} = \vec{0}$. **Oder als Frage abstrahiert**: Sei a$\in\mathbb{R}$ und $\vec{0}$ der Nullvektor eines unserer Räume. Gilt dann notwendig (und in Analogie zu den reellen Zahlen) $a\vec{0} = \vec{0}$?

⇓ Diese Frage gehen wir jetzt auf zwei Weisen an: **Zunächst** können wir für unsere Räume den Ausdruck $a\vec{0}$ im $\mathbb{R}^n$ durch komponentenweise Multiplikation und in den übrigen Räumen geometrisch ausrechnen. Das ergibt sofort die gewünschte Gleichheit. Etwa a(0,0,0)=(a0,a0,a0)=0. **Oder** wir versuchen die Gleichung nur mit Hilfe unserer Rechenregeln zu beweisen. Welchen Nutzen hätte das? Würde man neben unseren bisherigen, weitere - anders konstruierte - Vektorverknüpfungen einführen, dann müßte man die erste Rechnung erneuern und anpassen. Die zweite Rechnung dagegen könnte man übernehmen. Sie wäre für alle Systeme gültig, die die vektoriellen Grundregeln erfüllen! Tatsächlich tauchen zahlreiche weitere und wichtige Vektorsysteme auf, so dass eine Bemühung um den zweiten Weg wichtig ist.

> **Ausführung:** In $\mathbb{R}$ gilt 0+1=1. Wir multiplizieren mit dem Vektor $\vec{0}$. (Eigentlich heißt es: "...multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit...". Das kürzen wir ab, indem wir sagen "Wir multiplizieren die Gleichung mit...." Diese Konvention werden wir meist verwenden). Es folgt $(0+1)\vec{x} = 1\vec{x}$. Auf die linke Seite wenden wir das Distributivgesetz und die Unitarität an. Es folgt: $\boxed{0\vec{x} + \vec{x} = \vec{x}}$. Wir bezeichnen den uns interessierenden Vektor $0\vec{x}$ mit $\vec{y}$. Also $\vec{y} + \vec{x} = \vec{x}$. Nach der Regel über die Existenz des Inversen, gibt es zu $\vec{x}$ den Vektor $-\vec{x}$, der $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ erfüllt. Diesen Vektor addieren wir zu unserer hergeleiteten Gleichung $\vec{y}+\vec{x} = \vec{x}$ hinzu (Eigentlich: Zu beiden Seiten der Gleichung von rechts). Über das Assoziativgesetz für das vektorielle + (also eigentlich $\boxplus$) folgt für die linke Seite: $(\vec{y} + \vec{x}) + (-\vec{x}) = \vec{y} + (\vec{x} + (-\vec{x})) = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y}$. Und für die rechte Seite $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$. Zusammen also $\vec{y} = \boxed{0\vec{x} = \vec{0}}$ wie gewünscht.

! **(3.3.39)** Die zweite Rechnung ist natürlich aufwendiger als die erste. **Aber sie ist eben übertragbar auf alle weiteren Fälle,** in denen man nur sicherstellen muss, dass die Grundregeln der Vektorrechnung gelten.

☐ Die Gültigkeit von zwei weiteren Gleichungn erwartet man entsprechend: $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$ und $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ Beweisen Sie sie analog auf beiden Weisen.

⇑ **(3.3.40) Zusammenfassende Übersicht:**

- Wir haben den Begriff der algebraischen Verknüpfung eingeführt und uns überlegt, dass sich dieser gut mit Hilfe einer Automateninterpretation veranschaulichen läßt. Später haben wir zwischen inneren und äußeren Verknüpfungen unterschieden.
- Besonders ausgezeichnete Verknüpfungen erfüllen gewisse grundlegende Rechenregeln. Wir haben als zentrales Beispiel die Grundrechenregeln für die Addition von Zahlen formuliert.
- Wir haben für die Vektormengen $\mathbb{R}^n$ (n=1,2,3...), $\mathbb{R}^3_K$, V^3 und V^3_0 je eine zunächst mit $\boxplus$ bezeichnete Vektoraddition eingeführt. Diese erfüllen die (uminterpretierten) Rechenregeln der Zahladdition.
- Zusätzlich haben wir noch eine äußere Verknüpfung "Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl" eingeführt und die zugehörigen Grundregeln formuliert. Diese orientierten sich an den Regeln für die Zahlmultiplikation, enthalten jedoch auch charakteristische Unterschiede. Insbesondere ist ein Division durch einen Vektor nicht möglich.
- Wir haben in (3.3.34) zusammengestellt, wie das Rechnen mit Vektoren im Vergleich zum Zahlrechnen abläuft.

- Wir haben in (3.3.27) die beiden Regeln formuliert, die das komponentenweise Rechnen mit den geometrischen Vektorkonstruktionen verbindet.

Kap.3.3d: **Vektorräume**

(3.3.41) Die bisherigen Resultate legen das folgende Vorgehen nahe:

$\Rightarrow$	Man gibt **eine Menge** (bestimmter Objekte) vor, die wir mit V bezeichnen wollen.
$\Rightarrow$	Für die Elemente von V seien **zwei Zuordnungen** des Verknüpfungstyps gegeben:
	$(\vec{x},\vec{y}) \stackrel{\boxplus}{\longmapsto} \vec{x} \boxplus \vec{y}$ und $(\lambda,\vec{x}) \stackrel{\odot}{\longmapsto} \lambda \odot \vec{x}$ $(\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x},\vec{y} \in V)$
!!!	Die Konstruktion dieser Zuordnungen darf beliebig sein, außer, daß man verlangt, daß alle angeführten **Grundregeln der Vektorrechnung** erfüllt sind.
T T T	Ein derartiges System (Menge V, mit zwei Verknüpfungen, die die Grundregeln erfüllen) nennt man einen *Vektorraum.* Und die Elemente aus V nennt man *Vektoren.* (Die Zahlen λ, die in der äußeren Verknüpfung auftreten, nennt man auch *Skalare*). Grundregeln nennt man meist *Axiome.* In unserem Fall sagt man *die Vektorraumaxiome.*

(3.3.42) In der Mathematik zeigt man unter dem Stichwort *lineare Algebra,* dass man mit Hilfe der Vektorraumaxiome allein in der Lage ist, eine Vielzahl von Schlüssen zu beweisen. Man verwendet nur die Regeln, nicht die genauere inhaltliche Interpretation der beiden Verknüpfungen. (So wie wir oben gezeigt haben, dass in einem Vektorraum stets $a\vec{0} = \vec{0}$ gilt.) Sobald man ein Resultat auf diese Weise bewiesen hat, ist man sicher, dass es in allen Vektorräumen gilt. In den bekannten und auch in solchen, die man noch nicht kennt. Meist ist es relativ leicht, für geeignete konkrete Systeme zu zeigen, dass sie Vektorräume im beschriebenen Sinne sind. Dann darf man sofort alle Resultate der linearen Algebra verwenden.

T **(3.3.43) Zur Sprechweise**: Es kommt durchaus vor, dass gewisse Mengen vektorieller Größen keinen Vektorraum bilden. Das ist insbesondere für den Konfigurationsraum E^3 der Fall. Das bedeutet: Eine *vektorielle Größen* der Physik muss nicht immer ein *Vektor* (im Sinne der Mathematik) sein. Umgekehrt sind die Elemente des $\mathbb{R}^1$, also die 1-tupel (x) im mathematischen Sinne Vektoren, aber im physikalischen Sinne *skalare Größen.* Denn sie können durch eine einzige Zahlangabe festgelegt werden. Und noch schlimmer: In nicht wenigen physikalischen Texten wird unter *Vektor* noch etwas anderes verstanden. Zu den Axiomen des mathematischen Vektorraumes werden noch weitere unabhängige hinzugefügt, die ein zusätzliches Skalarprodukt einführen. Was das bedeutet, werden wir in Kap. 6.1 sehen.

(3.3.44) Die von uns eingeführten Mengen $\mathbb{R}^n$, V^3, V^3_0 und $\mathbb{R}^3_K$ mit den zugehörigen Verknüpfungen sind alles Vektorräume im beschriebenen Sinne. Mit ihren Elementen kann man vektoriell rechnen.

Kap.3.4: **Terme und Formeln mit Vektoren**

(3.4.1) Wir können zu unserem eigentlichen Ziel zurückkehren, Vektoren und Terme mit Hilfe von Vektoren zu bilden. Im ersten Teil hatten wir in Termen auftretende Buchstaben stets als Zahlen interpretiert und die Auswertung eines Termes ergab auch eine Zahl. Jetzt könne wir Buchstaben und Terme entweder als Zahl oder als Vektor interpretieren. Nehmen wir an, im Term sei ein Buchstabe als interessant und veränderlich spezifiziert. Dann ergibt das 4 mögliche Kombinationen, die alle in den Anwendungen, speziell der Physik, größte Bedeutung mit charakteristischer Bezeichnung erlangen:

Eingabetyp	Ausgabetyp	Zuordnung	Bezeichnung	Beispiel
Zahl x	Zahl y	x$\longmapsto y = f(x)$	reelle Funktion	y=xsin(2x^2)
Zahl t	Vektor $\vec{r}$	t$\longmapsto \vec{r} = \vec{r}(t)$	Bahnkurve	$\vec{r}(t) = \vec{g}t^2$
Vektor $\vec{x}$	Zahl s	$\vec{x} \longmapsto s(\vec{x})$	Skalarfeld	s(x,y,z)=x$^2 + y^2 + z^2$
Vektor $\vec{x}$	Vektor $\vec{F}$	$\vec{x} \longmapsto \vec{F}(\vec{x})$	Vektorfeld	$\vec{F}(x, y, z) = (y, x, xyz^2)$

In der Physik wird (wie soeben geschehen) meist bereits über die Bezeichnungsweise festglegt, um welchen Typ es sich jeweils handelt. Größen mit Pfeil sind Vektoren, wobei der Vektorraum dem Kontext zu entnehmen ist. Vektoren ohne Pfeil sind Zahlen. In der Mathematik geht man vielfach anders vor. Der Typ wird dann lokal für einen bestimmten Textbereich durch Angabe der zugehörigen Menge festgelegt. Etwa: "Sei $a \in \mathbb{R}$ und x$\in \mathbb{R}^n$....". Dann liegt der Typ von a und der von x wie angegeben fest, solange nicht etwas anderes gesagt wird. Von der Sache her leisten beide Methoden dasselbe. Wir verwenden hier in der Regel die physikalische Methode oder eine Kombination beider. Wenn wir etwa zwischen Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ unterscheiden wollen, verwenden wir die Mengenangabe. Sind in einem bestimmten Kontext alle Vektoren aus $\mathbb{R}^3_K$ für ein festes Koordinatensystem K, so werden wir bei den Vektoren meist den Index K fortlassen, wir schreiben dann $\vec{a}$ anstelle $\vec{a}^K$, verdeutlichen das aber vorsichtshalber durch die Formulierung "Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3_K$". Dem Typ der **Bahnkurve** werden wir speziell im Bereich der Flugparabeln und der Geradenbeschreibung begegnen. Den beiden **Feldtypen** werden wir beim Gradienten begegnen. Die **Beschreibung von Ebenen oder Flächen** im Raum erfolgt durch einen speziellen Typ von Vektorfeldern, wie wir sehen werden.