****

Vorkurs Mathematik

F. Krause

Kapitel 2

Quantifizierung: Von der Geometrie zu den Vektoren

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Copyright F.Krause

Kap.2.1: **Der Konfigurationsraum** E^3

(2.1.1) Wir betrachten den "Raum" - die Menge - aller geometrischen Punkte, also die Idealisierung unserer realen geometrisch physikalischen Umwelt. Wir bezeichnen die Menge all dieser Punkte mit E^3 - wobei E an *euklidisch* und 3 an *dreidimensional* erinnern soll. Punkte sind Idealisierungen, Extrapolationen unserer Erfahrungen. Physikalische Ereignisse finden an bestimmten Punkten statt. Figuren werden durch Angabe ihrer Punkte bestimmt. Usw. Gewisse zugehörige Aspekte dieser Erfahrungen erweisen sich als besonders wichtig und werden entsprechend ausgesondert und abstrahiert.

- Hierzu gehören zunächst einmal Existenz von **Figuren, Körpern, Gegenständen usw.** sowie der Umgang damit. In der Idealisierung des aus Punkten aufgebauten Raumes sind Figuren einfach **Teilmengen** (der Menge aller Punkte), was man in der üblichen Symbolik $F \subset E^3$ schreibt. F ist Teilmenge des E^3. Das Zeichen "$\subset$ " wird auch "enthalten" gelesen. Figuren sind vielfach nicht beliebige Teilmengen, sondern geeignet glatte. Strecken, Dreiecke, Kreisscheiben, Würfel und Kugeln sind einfache Beispiele von Figuren.
- Man kann in diesem Raum **Bewegungen** von Punkten und Körpern beobachten und verfolgen. Dies ist ein weiteres wichtiges Merkmal, das mathematisiert werden sollte. Wir werden später sehen, wie die Mathematisierung von Bewegungen durch die Vektorrechnung unter dem Stichwort **Bahnkurven** geleistet wird. Einfache, aber besonders wichtige Bewegungen sind Kreisbewegungen oder gleichförmige Bewegung entlang einer Geraden. Und natürlich ist "Ruhe" ein Spezialfall einer Bewegung.
- Schließlich kann man sich in der Rolle eines Experimentators (wieder in Gedanken) im gesamten Raum herumbewegen und an den verschiedene Orten jeweils **Messungen oder Beobachtungen eines bestimmten Typs** ausführen. Dies führt zum **Feldbegriff**, den wir ebenso formalisieren werden. Konkret könnte man die Temperatur, ein elektrisches Feld oder in einer Strömung die Geschwindigkeit messen.

- Zu all diesen Sachverhalten - Figuren, Bewegungen, Felder - besitzen wir ausgeprägte anschauliche Vorstellungen. Einen Raum, in dem diese drei Strukturen idealisiert sind, nennen wir *Konfigurationsraum.* Der Raum E^3 ist ein solcher, die Idealisierung unserer diesbezüglichen Erfahrungen.
(2.1.2) In der Physik benutzt man mit viel Erfolg die *Massenpunktidealisierung.* Ein Massenpunkt ist ein Körper einer bestimmten Masse, der vollständig in einem geometrischen Punkt konzentriert ist, dessen jeweilige Lage also durch Angabe eines einzigen Punktes aus E^3 festgelegt wird. Unterscheiden Sie daher begrifflich zwischen *Massenpunkt* und *Konfigurationsraumpunkt.*

☐ Die Massenpunktidealisierung wirft eine Reihe von gedanklichen Problemen auf, die sich allerdings mathematisch lösen lassen. Ein Beispiel - ohne dass wir hier auf die Lösung eingehen: "was läßt sich über die Dichte (Masse/Volumen) eines Massenpunkte sagen?

Kap.2.2: Die Notwendigkeit der Quantifizierung

(2.2.1) Eine Angabe wie *der Punkt P aus* E^3 hat einen großen praktischen Nachteil. Es ist schwer, einer zweiten Person genau mitzuteilen, um welche Punkt es sich dabei handelt. Unmittelbares Zeigen oder vorherige Verabredung eines gemeinsamen Namens (eines bestimmten Punktes) sollen nicht gelten. Vielmehr: Einer findet einen bestimmten ihn interessierenden Punkt und möchte **dessen Lage** einer anderen Person mitteilen. Zwei Personen beginnen je eine Seite eines Tunnels zu bohren und möchten sicher gehen, sich an einem ganz bestimmten Punkt T zu treffen. Unter diesen Umständen ist ein *Quantifizierung* - also eine Festlegung der Lage durch gewisse Zahlangaben - erforderlich, die es jedem erlaubt, der mit den Regeln und Hilfsmitteln vertraut ist, zum richtigen Punkt zu gelangen.
(2.2.2) Quantifizierung einer Größe heißt allgemein, ihre möglichen Realisierungen durch geeignete Zahlangaben derart festzulegen, dass eine eindeutige Identifizierung mit Hilfe dieser Zahlangaben möglich ist. Und das heißt genauer, es muss ein gemeinsames operatives **Konstruktionsverfahren** geben, das die Zahlangaben in den zugehörigen Größenwert, etwa eine eindeutig bestimmte Punktlage, umwandelt! Ein wichtiges Beispiel findet sich unter (2.4.5).
T **(2.2.3)** Im Zusammenhang mit dem Quantifizierungsproblem werden gewisse Begriffe eingeführt und gerne benutzt. Zunächst unterscheidet man zwischen *skalaren* und *vektoriellen Größen.* Eine skalare Größe ist eine, zu deren Quantifizierung **eine einzige** Zahlangabe ausreicht. Eine vektorielle ist eine, zu deren Quantifizierung **mehr als eine** Zahlangabe erforderlich ist. Ein Winkel wird durch eine einzige Zahlangabe quantifiziert, mithin liegt eine skalare Größ e vor. Eine Kraft wird durch eine Richtung und einen Betrag festgelegt. Der Betrag erfordert eine Zahlangabe und die Richtungsfestlegung sicher weitere, so dass eine vektorielle Größe vorliegt. Auch die *Lage eines Punktes* ist offensichtlich eine vektorielle Größe. Der *Druck* eine skalare. Wie steht es mit einer Geschwindigkeit? Hier ist die Formulierung ungenau. Ist der Geschwindigkeits**betrag** gemeint, die Zahl, die man auf dem Tachometer abliest, dann liegt eine skalare Größe vor, die skalare Geschwindigkeit. Ist aber die zugehörige Richtung mitgemeint, dann liegt eine vektorielle Größe vor und wir sollten besser von vektorieller Geschwindigkeit sprechen.

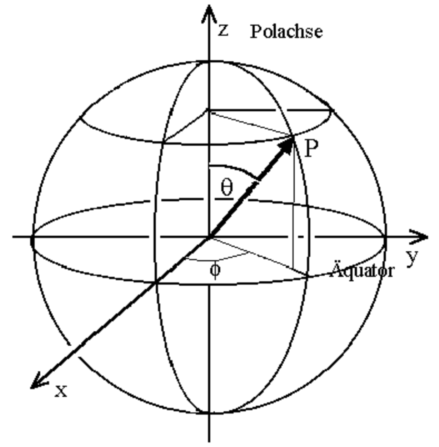
Kap. 2.2a: **Richtungen im Raum**

(2.2.4) Bereits mehrfach tauchte der Begriff der "Richtung (im Raume)" auf. Wieviele Zahlangaben werden zur Quantifizierung dieser Größe verlangt? Die Antwort wird durch ein einfaches operatives Modell gegeben, das wir jetzt beschreiben:

> Wir betrachten Richtungen, die von einem festen Punkt ausgehen. Jetzt legen wir eine Kugel mit Radius R um diesen Punkt. Dann durchstößt jede Richtung die Oberfläche an einem bestimmten Punkt und umgekehrt bestimmt jeder Punkt der Oberfläche eine Richtung. Eine Richtung ist auch so etwas wie eine vom Punkt ausgehende Halbgerade. Geht man entlang so einer Halbgeraden ein Stück weiter, so sagt man, man gehe in *dieselbe Richtung.*

Verschiebt man die Halbgerade parallel, so ändert sich die Richtung nicht. Man darf daher für das Modell irgendeinen festen Raumpunkt als Ausgangspunkt der Halbgeraden verwenden.
(2.2.5) Man kann die (räumlichen) Richtungen quantifizieren, indem man einfach die Punkte der Kugeloberfläche quantifiziert und das tut man mit Hilfe von zwei Zahlangaben: Etwa Längen- und Breitengrad. **Eine Richtung im Raum wird demnach durch zwei Zahlangaben festgelegt.** Eine einzige Zahlangabe reicht nicht, bei drei Angaben erweist sich eine als unnötig.

Jeder Punkt der Kugeloberfläche wird durch seine beiden Polarwinkel θ und φ relativ zum kartesischen Koordinatensystem festgelegt.
Die Polachse ist ausgezeichnete Systemachse. Dazu senkrecht die Äquatorebene mit der darin ausgezeichneten x- oder 1-Achse.



Eine "Richtung in einer Ebene" wird durch **eine** Zahlangabe festgelegt, etwa den mit einer festen Richtung gebildeten Winkel.

☐ Wie sieht das *gemeinsame Konstruktionsverfahren* aus, das gemäß (2.2.2) hinter der Richtungsquantifizierung durch die Polarwinkel steht?

Kap.2.2b: **Bogenmaß und Raumwinkel**

(2.2.6) Zwei Richtungen (in einer Ebene) bilden einen Winkel miteinander. Auch Winkel müssen quantifiziert werden. Die übliche Quantizierung besteht darin, dem Vollwinkel einen bestimmten Wert zu geben und die übrigen Winkel anteilig darauf zu beziehen. Der tradtionelle Vollwinkelwert ist 360. Eine Alternative ist 400, weil dann der wichtige rechte Winkel den runden Wert 100 erhält (*Neugrad*). Sachlich vorzuziehen ist der Wert $2\pi \approx 6.28$. Denn für diesen Wert erhält man eine **geometrische Interpretation** des Winkelwertes, wogegen die anderen Werte in geometrischer Hinsicht willkürlich sind. Wie sieht die erwähnte Interpretation aus?

> Wähle eine Ebene, in der beide Richtungen liegen. Verschiebe sie so, dass ein gemeinsamer Startpunkt entsteht. Lege einen Einheitskreis um diesen Startpunkt der Richtungen. Dann schneiden die beiden Richtungen einen Kreisbogen aus dem Einheitskreis heraus und dessen Länge wird als Größenmaß, als Quantifizierung des Winkels interpretiert. Man nennt dieses quantifizierende Maß für den Winkel das *Bogenmaß.* Ein rechter Winkel hat in dieser Quantifizierung die Größe $\pi/2$.

Man sollte sich den Gebrauch des Bogenmaßes angewöhnen, da andernfalls etwa im Bereich der trigonometrischen Funktionen unangenehme Komplikationen auftreten.

☐ Skizzieren Sie einen Winkel mit Bogenmaßwert 1 und einem mit Wert 2.

☐ Wie ist analog zum ebenen Winkel ein *Raumwinkel* zu definieren und welche geometrische Größenquantifizierung liegt hierfür nahe? ((2.2.6) durchgehen und Analogien bilden!)

Kap.2.2.c: **Freiheitsgrade**

(2.2.7) Nun kann man ein und dieselbe Größe natürlich auf unterschiedliche Weise durch Zahlangaben festlegen. Man findet unterschiedliche Konstruktionsverfahren für dieselbe Größe. (Für die Winkelgröße haben wir drei - Grad, Neugrad, Bogenmaß - genannt). Dann ändern sich die Zahlbeschreibungen, d.h. ein und derselbe qualitativ gegebene Größenwert wird durch andere Zahlwerte beschrieben. Aber fast immer zeigt sich, dass die **Anzahl** der zur Beschreibung (mindestens) erforderlichen Zahlen unabhängig von der Beschreibung gleich bleibt. Erfordert die eine Quantifizierung (mindestens) drei Zahlen, dann die andere auch, wobei wir von gewissen für unsere Belange pathologischen mathematischen Konstruktionen absehen. **Die Anzahl der (mindestens) erforderlichen Zahlen ist daher ein von der Wahl der Quantifizierung unabhängiges Merkmal der Größe.** Insbesondere bleibt eine skalare Größe in jeder Quantifizierung eine solche.

T Die Anzahl der für eine (glatte) Quantifizierung erforderlichen Zahlwerte wird *Zahl der Freiheitsgrade der Größe* genannt.

(2.2.8) Die Richtungsgröße (im Raum) hat 2 Freiheitsgrade, die Größe "Lage eines Raumpunktes" drei, der Druck einen usw. Diese Zahl der Freiheitsgrade erweist sich für viele Überlegungen als wichtiges Hilfsmittel. Auf die Namenswahl werden wir noch eingehen. In (2.1.1) haben wir den Begriff der "Figur" eingeführt. Dann haben die Punkte einer Strecke einen Freiheitsgrad, die einer Fläche, etwa der Kugeloberfläche, haben zwei. Und Punkte eines Körpers, etwa einer Vollkugel oder eines Würfels, haben drei Freiheitsgrade. Eben war die Figur gegeben und es ging um Punkte auf dieser Figur. Davon zu unterscheiden ist die Vorgabe einer Figur selbst, etwa einer Strecke. Die Strecke (als Objekt) hat 6 Freiheitsgrade, denn sie ist festgelegt, sobald man Anfangs- und Endpunkt festgelegt hat und das verlangt 6 Zahlangaben. Man hat also zu unterscheiden zwischen den "Freiheitsgraden der Punkte einer bestimmten Figur" und den "Freiheitsgraden (zur Festlegung) einer Figur eines bestimmten Typs" . Man kann das auch *innere und äußere Freiheitsgrade* nennen. Man hat begrifflich folgende zwei Größen zu unterscheiden: "Figur" und "Lage eines Punktes auf einer gegebenen Figur"

□ Wieviel Freiheitsgrade benötigt man zur Festlegung der Lage eines Dreiecks im Raum, einer Kugel im Raum sowie eines Würfels? Und wieviele Freiheitsgrade benötigt man zur Festlegung nur der geometrischen Figur, unabhängig von der Lage?

Kap.2.3: **Hilfsmittel bei der Quantifizierung**

Kap.2.3a: **Kartesische Koordinatensysteme**

(2.3.1) Koordinatensysteme bilden ein universelles Hilfsmittel für die Quantifizierung geometrischer Objekte. Sie legen Konstruktionen fest, mit deren Hilfe man fähig ist, Zahlangaben in eindeutige geometrische Punktlagen oder verwandte Größen umzuwandeln. Und umgekehrt kann man eine gegebene Lage in beschreibende Zahlangaben umwandeln. (Dies nimmt die abstrakte Dikussion aus (2.2.2) wieder auf!)

(2.3.2) Hauptsächlich werden wir kartesische (räumliche) Koordinatensysteme verwenden, deren Bau wir jetzt genauer beschreiben wollen. Ein Koordinatensystem ist selbst eine bestimmte geometrische Größe, also durch geeignete Zahlangaben festzulegen und es gehört ein Konstruktionsverfahren dazu, das die Zahlangaben in die Punkte überführt.

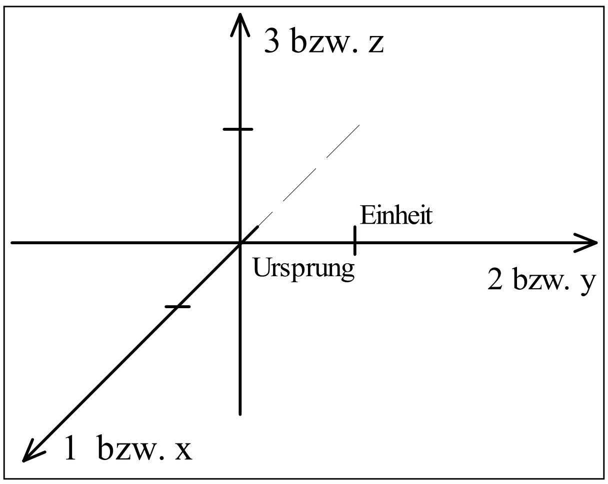
(2.3.4) Zunächst besprechen wir das Problem der Festlegung.

?	**Wie legt man ein (räumliches) kartesisches Koordinatensystem fest?**
♦	Man bestimmt oder wählt einen Punkt $0 \in E^3$, den *Ursprung.*
♦	Dann bestimmt man eine von 0 ausgehende Richtung, die der 1-Achse
♦	Zu dieser Richtung gibt es eine senkrechte Ebene,
	und in dieser legt man erneut eine Richtung fest, die der 2-Achse.
♦	Die 3-Achse liegt dann bis auf ein Vorzeichen fest.

Die Ursprungsfestlegung verlangt drei Zahlangaben, die erste Richtung weitere zwei und die dazu senkrechte noch eine Angabe. Zusammen gibt das $3+2+1=6$. Zahlangaben. Will man noch eine gemeinsame Einheit für die drei Achsen festlegen, so bedarf das einer weiteren Zahlangabe. Insgesamt hat unser Koordinatensystem dann 7 Freiheitsgrade.

(2.3.5) Der übliche Gang der Dinge, deren Reihenfolge, sieht so aus: Zunächst ist in einer Problemsitation eine bestimmte physikalisch-geometrische Konfiguration gegeben. Zu dieser wählt man ein besonders günstiges Koordinatensystem, um die zugehörigen Größen quantitativ zu beschreiben.
Vielfach wird stattdessen unreflektiert wie folgt vorgegangen: Man zeichnet die Systemkonfiguration geeignet auf das Papier. Dann legt man die Koordinaten so, dass sie parallel zu den Papierkanten verlaufen. Das kann relativ zu dem System eine sehr ungeschickte Wahl sein, die nirgends durch göttliches Gesetz so vorherbestimmt ist. Besser legt man folgende Vorstellung zu Grunde: Zuerst wird das Koordinatensystem geeignet zur Konfiguration gewählt. Dann denkt man sich beides **gemeinsam** so gedreht bis die Achsen parallel zu den Papierkanten verlaufen.

(2.3.6) Für die Koordinatensystem**zeichnung** verwenden wir die folgende (heute meist übliche) Konvention: Die 2- oder y-Achse und die 3- oder z-Achse liegen in der Papierebene. Und die 1- oder x-Achse zeigt senkrecht zur Papierebene auf den Betrachter zu. Die Figur zeigt die Details. Insbesondere zeigt dann vom Standpunkt des Betrachters aus die positive 2-Achse nach rechts und die positive 3-Achse nach oben. Weichen Sie nicht ohne gewichtigen Grund von diesen Konventionen ab! Im Zusammenhang mit dem Vektorprodukt kommen wir in (6.2.6) auf die Konventionen und ihre Begründung zurück. Dort werden wir sehen, weshalb man ein derartiges kartesisches Koordinatensystem ein "Rechtssystem" nennt.



☐ Durch Verdrehen wird aus einem Rechtssystem erneut ein Rechtssystem. Verdrehen Sie das skizzierte System so, dass die x-Achse des neuen Systems in Richtung der y-Achse des alten zeigt. Skizzieren Sie das verdrehte System. Es gibt zwei naheligende Möglichkeiten.

Kap.2.3b: **Die Tupelräume** $\mathbb{R}^n$

(2.3.7) Wie übermittelt man bei vektoriellen Größen die Zahlangaben? Offenbar kommt es in den meisten Fällen auch auf die **Reihenfolge** der Zahlen an. Mathematisch verwendet man zur Fixierung der Reihenfolge die Tupelschreibweise. Zwei Zahlen, etwa 5 und 3 faßt man zu einem geordneten Paar (5,3) zusammen. Und das ist von dem geordneten Paar (3,5) zu unterscheiden. Drei Zahlen, sagen wir 3,5 und 0 faßt man zu einem Tripel oder 3-tupel (3,5,0) zusammen. Und allgemeiner faßt man n Zahlen $a_1, a_2, ...a_n$ mit vorgegebener Reihenfolge zu einem n-tupel $(a_1, a_2, ...a_n)$ zusammen. Die einzelnen Zahlen nennt man die *Komponenten des Tupels.* Natürlich dürfen einzelne Komponenten auch übereinstimmen. So ist (1,1) ein mögliches 2-tupel und (0,0,1) ein mögliches 3-tupel. Bei der Mengenbildung ist es anders. Bei diesen kommt es nur auf die Elemente an, nicht auf deren Reihenfolge und auch nicht auf die Häufigkeit ihres Auftretens. Für Mengenbildung gilt daher {a,b}={b,a} und {a,a,b}={a,b}. Vgl. auch (1.6.3-5).

(2.3.8) Man kann natürlich auch Tupel aus anderen Objekten bilden. Sind P,Q und R drei Punkte des Konfigurationsraumes, also $P, Q, R \in E^3$, dann können wir das Punktetripel (P,Q,R) bilden.

T **(2.3.9)** Es erweist sich als zweckmäßig, die Menge aller Zahl-n-tupel einzuführen. Die übliche Bezeichnung hierfür ist $\mathbb{R}^n$. Dabei darf n irgendeinen der Werte 1,2,3,4,.... annehmen. (Beachten Sie, wir lassen auch n=1 zu. Solche 1-Tupel schreiben wir (3) oder (a).) Die Mengen $\mathbb{R}^n$erweisen sich als sehr wichtig. (Gelesen "R-n", nicht etwa "R hoch n").

(2.3.10) $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ bedeutet dann beispielsweise: $\vec{a}$ ist ein Tripel aus drei Zahlen. Also $\vec{a} = (..,..,..)$. Den drei durch die Leerstellen angedeuteten Komponenten sollte man einen Namen, eine Bezeichnung geben. Üblich ist $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. D.h. a_2 bezeichnet die zweite Komponente des mit $\vec{a}$ bezeichneten Tripels. In bestimmten Fällen sind auch andere Bezeichnungen üblich. Etwa $\vec{x} = (x, y, z)$. Ist dann konkret $\vec{x} = (1, -3, 7)$, so folgt $y = -3$. D.h. die zweite Komponente y von $\vec{x}$ hat den Zahlwert $y = -3$. Also nochmals: Bezeichnet $\vec{V}$ ein Element aus $\mathbb{R}^n$, dann hat man automatisch die Komponenten dieses Tupels (nicht immer auf dieselbe Weise) mitbezeichnet. Vgl. (1.8.10).

(2.3.11) So wie wir Teilmengen des E^3 gebildet haben, können wir auch Teilmengen der Räume $\mathbb{R}^n$ bilden. Etwa E$\subset \mathbb{R}^3$ mit $E = \{(x, y, 3)|x, y \in \mathbb{R}\ \}= \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}$ und z=3} gleich Menge aller Zahltripel, deren dritte Komponente den Wert 3 hat. Oder $D = \{(a, a)|a \in \mathbb{R}\}$ und $D \subset \mathbb{R}^2$.

Kap.2.3c: **Einheitenwahl**

(2.3.12) Zur Wahl eines Koordinatensystems oder allgemeiner irgendeiner Quantifizierung gehört in der Regel die Festlegung einer Einheit (für die drei Koordinatenachsen), welche die beteiligten Beobachter gemeinsam verwenden.

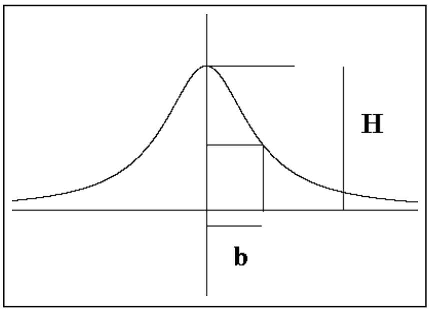
T **(2.3.13)** Bei der Einheitenwahl gibt es zwei Grenzfälle, die man auseinanderhalten sollte. Man kann *systembezogene (*natürliche) Einheiten verwenden oder aber *systemunabhängige* (auf ein Meßverfahren bezogene) Einheiten.

(2.3.14) Im ersten Fall bestimmt die Physik oder die Geometrie des Systems die Einheit, was in der Regel zu kleinen und unmittelbar aussagekräftigen Zahlwerten führt. Hat man einen Kreis als System, kann man dessen Radiuslänge als naheliegende natürliche Längeneinheit wählen. Andere Längen werden als Vielfache dieser Länge angegeben. Wechselt man das System, muss man meist zu einer anderen systembezogenen Einheit übergehen. *Das Jahr* ist eine typische systembezogene Zeiteinheit für bestimmte Ereignisfolgen auf der Erde. Für einen Hundertmeterlauf ist es ebensowenig systembezogen wie für die Ereignisse auf dem Mars. Das Bogenmaß ist eine natürliche Einheit für die Winkelgröße. Usw.

Manchmal bildet man auch Einheiten, die System und ein gewähltes (zugehöriges) Koordinatensystem einbeziehen. Im Fall einer Flugparabel kann man Scheitelpunktskoordinaten als natürliche Längeneinheiten wählen. Und die hängen von der Lage des Koordinatensystems ab. Vgl. die Figur in (4.5.11).

(2.3.15) Im zweiten an der experimentellen Physik orientierten Fall konstruiert man eine systemunabhängige Einheit eher über eine bestimmte **Meßmethode,** die auf viele Systeme anwendbar ist. Damit ist man in

der Lage, die Werte für unterschiedliche Systeme zu vergleichen auf Kosten häufig sehr sehr großer oder auch winziger Zahlwerte. Natürlich kann man die Werte jederzeit (von einer Einheit in eine andere) umrechnen. Die Wahl der Meßmethode ist meist so, dass eine möglichst große Meßgenauigkeit gesichert wird.
(2.3.16) Viele geometrische und physikalische Syteme besitzen naheliegende systembezogene Einheiten. Teilweise stehen gleich mehrere zur Wahl. (Im Kreis kann man statt des Radius auch den Durchmesser als Längeneinheit nehmen!) Dann ist es vielfach besonders für theoretische Betrachtungen sinnvoll, zu solchen natürlichen Einheiten überzugehen. Die zugehörigen Zahlwerte werden einfacher und überschaubarer. Ebenso werden Formeln und Gesetze für das betrachtete System einfacher, verständlicher, kurz: meist besser. Allgemeine physikalische Überlegungen arbeiten dagegen eher mit systemunabhängigen Einheiten.
(2.3.17) Rein technisch sind zwei Dinge zu beherrschen: Das Umrechnen von einer Einheit in eine andere und das Auffinden und Analysieren systembezogener Einheiten. Uns interessiert mehr der zweite Punkt.
(.2.3.18) Ein Beispiel geometrischer, systembezogener Einheiten: Wir betrachten einen Funktionsgraphen mit Glockenform. Dann ist die Höhe H der Glocke ein naheliegender Kandidat für eine natürliche Einheit der y-Achse. Als Einheit der x-Achse kann man die Länge b derjenigen Strecke wählen, auf der der maximale Funktionswert auf die Hälfte (oder einen in der Nähe von 0.5 liegenden anderweitig bestimmten Wert α) abfällt.



☐ Wähle H und b wie beschrieben als Einheiten. Was läßt sich dann über die Größe der Funktionswerte für x sagen und insbesondere die für x>1?

Kap.2.4: **Die Quantifizierung geometrischer Objekte des Konfigurationsraumes**

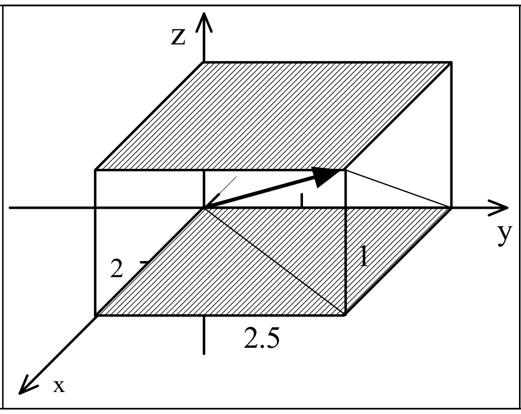
Kap.2.4a: **Geometrische Pfeile**

(2.4.1) Häufiger als Größen, die durch eine Richtungsangabe allein festgelegt werden, kommen solche vor, die eine Richtung und eine Länge (=Betrag) zur Festlegung verlangen. Man geht ein ganz bestimmtes Stück in eine feste Richtung. Nach unseren Vorüberlegungen sind drei Zahlangaben erforderlich, es liegt eine Größe mit drei Freiheitsgraden vor. Es bietet sich an, eine solche Größe durch einen (im Ursprung startenden) Pfeil darzustellen.

T	Ein *geometrischer Pfeil* ist eine Größe, die durch eine **Richtung im Konfigurationsraum** und **eine Länge** bestimmt ist.

(2.4.2) Beispiel: Eine in einem Punkt angreifende Kraft wird physikalisch mit Hilfe einer Federwaage wie folgt festgelegt: Man justiert die Federwaage so, dass ihre Wirkung die der Kraft aufhebt. Dann gibt die Stärke der Auslenkung den Betrag und die Richtung der Federwaage gibt die entgegengesetzte Richtung der Kraft.
Achtung: "entgegengesetzte Richtung".
(2.4.3) Viele physikalische Größen werden durch geometrische Pfeile repräsentiert, sind also geometrisch beschreibbar. Einige Beispiele: Vektorielle Geschwindigkeit, Kraft, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke, Drehbewegung usw.
(2.4.4) Jetzt unser Hauptproblem: **Wie quantifiziert man einen geometrischen Pfeil**? Dazu wählen wir ein festes kartesisches Koordinatensystem, das wir durch den Index K kennzeichnen wollen. Der geometrische Pfeil soll vom Ursprung aus starten. Wir projizieren den Endpunkt des Pfeiles in die drei Koordinatenebenen und von dort weiter auf die drei Koordinatenachsen. Wir ziehen Parallelen zu den drei Achsen. Das ergibt insgesamt ein achsenparalleles Quader, für das der Pfeil eine Raumdiagonale bildet. Der Pfeil legt dies Quader eindeutig fest. Auf den drei Achsen haben wir Einheiten so dass wir die drei Achsenabschnitte als Viefache dieser Einheiten quantifizieren können. Wenn wir den Pfeil mit $\vec{a}$ bezeichnen, dann soll a_1 das so entstehende Vielfache zur ersten Achse sein. a_2 und a_3 werden entsprechend gebildet. Wir fassen die drei Zahlen zum Tripel (a_1, a_2, a_3) zusammen, denn offensichtlich kommt es auf die Reihenfolge an.

Voller Quader:
Die Koordinatenkonstruktion eines geom. Pfeiles.
Koordinatenupel: (2,2.5,1)

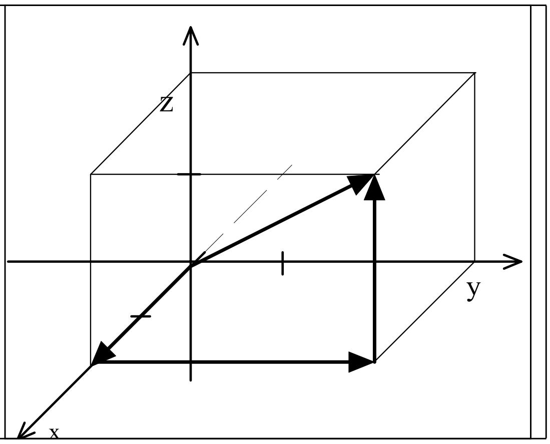


(2.4.5) Besitzen wir damit umgekehrt ein Konstruktionsverfahren für unseren Pfeil? Offensichtlich. Es läßt sich beispielsweise wie folgt formulieren:

Zum Koordinatensystem K gehöriges Kostruktionsverfahren:
Gegeben (a_1, a_2, a_3). Gehe a_1 Einheiten in Richtung der 1-Achse.
Gehe dann a_2 Einheiten parallel zur 2-Achse weiter.
Gehe dann a_3 Einheiten parallel zur 3-Achse weiter.
Dann ist man am Endpunkt des Pfeiles angelangt.

Verbindet man jetzt den Ursprung mit dem Endpunkt, hat man den geometrischen Pfeil rekonstruiert. Die Zahltripel bilden somit eine angemessene Quantifizierung unserer Pfeile. Zum Koordinatensystem gehört ein operatives Verfahren, um aus diesem Tripel den Pfeil zu konstruieren. Wir charakterisieren die Verfahren als "Konstruktion durch einen **achsenparallelen Weg**"

Konstruktion des Pfeiles als achsenparaller Weg vom Ursprung zum Endpunkt des Pfeiles.



T **(2.4.6)** Wir führen noch folgende **Bezeichnungen** ein: Die Menge aller von 0 ausgehenden geometrischen Pfeile bezeichnen wir mit V_0^3. V erinnert an Vektorraum, 3 an die zugehörigen drei Freiheitsgrade der Pfeile und 0 indiziert den gewählten Ursprung.

T **(2.4.7)** Weiter sei $\mathbb{R}_K^3$ die Menge aller Zahltripel, wobei jedes Element wie beschrieben als Weg im Koordinatensystem K zu interpretieren ist. Das ist der übliche Tripelraum $\mathbb{R}^3$ mit einer **zusätzlichen Interpretation**, der durch K gegebenen Quantifizierung der geometrischen Pfeile. Die Elemente dieses Raumes $\mathbb{R}_K^3$ nennen wir *Koordinatenvektoren.*

(2.4.7) Beispiel: Zu dem Koordinatensystem K gehören drei Ortsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ aus V_0^3, die den Ursprung mit den drei Einheitspunkten auf den Achsen verbinden. Diese drei Pfeile heißen *Koordinateneinheitsvektoren.* Ihre zugehörigen Koordinatenvektoren sind $\vec{e}_1^K = (1,0,0)$, $\vec{e}_2^K = (0,1,0)$ und $\vec{e}_3^K = (0,0,1)$. Der Koordinatenvektor $\vec{d}^K = (1,1,1) \in \mathbb{R}_K^3$ beschreibt die Raumdiagonale im Einheitswürfel, der durch die Koordinaten gegeben wird. Usw. Natürlich sind $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_1^K$ nicht "dasselbe", sie sind nur vielfach austauschbar.

Kap.2.4b: **Punkte**

(2.4.8) Wie quantifizieren wir Punkte aus E^3? Erneut soll das Koordinatensystem K gegeben sein. Nun verbinden wir den Ursprung von K mit dem Punkt P. Das ergibt einen geometrischen Pfeil.

T	Sei P$\in$ E^3 und K ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung 0. Den Verbindungspfeil von 0 mit P nennen wir den **Ortsvektor von P (zum Ursprung 0)**. Das ist ein Element aus V_0^3, das wir üblicherweise mit $\vec{x}_P$ bezeichnen.
T	Die Quantifizierung von $\vec{x}_P$ bezüglich des Koordinatensystems K bezeichnnen wir mit $\vec{x}_P^K = (x_P, y_P, z_P)$. Das ist der **Koordinatenvektor von P (bezüglich K)**.

Dabei soll $\vec{x}$ an den vektoriellen Charakter des Objektes erinnern und P an den zugehörigen Endpunkt. Nennung des gewählten Ursprunges ist meist nicht erforderlich. Der Koordinatenvektor $\vec{x}_P^K$ bildet eine vollständige Quantifizierung von P bzw. genauer *der Lage von P.* Vielfach sind Bezeichnungen des Typs $\overrightarrow{0P}$ für den Verbindungspfeil der Punkte 0 und P üblich. Diese Bezeichnungsweise werden wir nicht verwenden.
(2.4.9) Die Bedeutung des Ortsvektors $\vec{x}_P$ liegt darin, dass man für geometrische Pfeile bereits vektoriell rechnen kann, wie wir in Kap. 3 sehen werden. Für Punkte P aus E^3 dagegen gibt es keine algebraischen Rechenmöglichkeiten.

! **(2.4.10)** Damit haben wir für Punkte die folgende **Kette zunehmender Quantifizierung:**

P	$\rightleftarrows$	$\vec{x}_P$	$\rightleftarrows$	$\vec{x}_P^K$
E^3		V_0^3		$\mathbb{R}_K^3$
Punkt		Ortsvektor		Koordinatenvektor

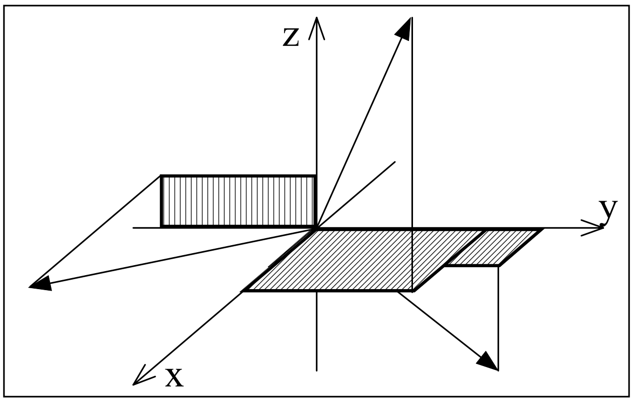
(2.4.11) Will man beim Einstieg in eine Problemsituation Orte sowie durch Pfeile beschreibbare Größen behandeln und formalisieren, dann steht man vor der Frage:

> Soll man das im Bereich von V_0^3 oder im Bereich $\mathbb{R}_K^3$ tun? Im ersten Fall muss man nur einen Ursprung festlegen, im zweiten ein gesamtes Koordinatensystem. Wenn es geht, sollte man in der Regel möglichst lange mit V_0^3 arbeiten, da dies einfacher und übersichtlicher ist. Wir werden sehen, dass wir in diesem Raum bereits Vektorrechnung betreiben können, was in E^3 leider nicht möglich ist.

(2.4.12) Für einen (erdachten) ebenen Lebensraum E^2 kann man problemlos ein analoges Begriffssystem mit V_0^2 und $\mathbb{R}_K^2$ einführen, das wir bei Bedarf auch ohne ausdrückliche Erklärung benutzen werden.

Kap.2.4c: Die zeichnerische Darstellung geometrischer Pfeile

(2.4.13) In den meisten Fällen ist eine Zeichnung ein wichtiges Hilfsmittel der Problembehandlung. Damit stellt sich die Frage: Wie zeichnet man (räumliche) geometrische Pfeile (und damit gleichwertig Punkte, Figuren usw.) so dass man der ebenen Darstellung die räumliche Lage der Pfeile entnehmen kann? Hierzu ist eine geeignete perspektivische Darstellung erforderlich. Man kann zu einem Pfeil den *vollen achsenparallelen Quader* zeichnen, dessen Raumdiagonale der Pfeil ist. Aber dieser Quader enthält meist zuviel Information. Zeichnet man den Quader für drei oder vier Pfeile in ein Bild, so verliert man sofort die Übersicht. Besser ist es, für die Pfeile eine *Minimalfigur* zu zeichnen, die nur so gestaltet sein muss, dass man aus ihr einen achsenparallelen Weg vom Ursprung zum Endpunkt des Pfeiles entnehmen kann. Damit liegt die räumliche Lage des Endpunktes fest. Die Figur erläutert das an einigen Besipielen.



- ☐ Überlegen Sie mit Hilfe des vollen Quaders, wieviele achsenparallele Wege vom Ursprung zum Endpunkt es gibt. Wie sind die Flächendiagonalen zu interpretieren?
- ☐ Sei $\vec{a}^K = (2, 2, 2)$. Zeichnen Sie den zugehörigen Pfeil. Wie wählt man **zeichnerisch** die Längeneinheit für die x-Koordinate? Für welche Wahl sieht die perspektivische Darstellung eines Würfels besonders *würfelig* aus?
- ☐ Wie erkennt man bei gegebenem Koordinatenvektor $\vec{x}^K$, dass der zugehörige Punkt hinter der Zeichenebene, unter der Horizontalebene bzw. im rechten Halbraum liegt?

(2.4.14.) Zeichnungen sollen unterstützende Hilfen bei der Problemlösung sein! Sie sollen Zusammenhänge und die inhaltliche Bedeutung eingeführter Bezeichnungen sichtbar machen. Was dem nicht dient, läßt man fort! Dazu gehört insbesondere das Anbringen eines *Fischgrätenmusters* auf den drei Koordinatenachsen, das teilweise zu einer sinnlosen minutenlangen Arbeitsbeschaffungsmaßnahme ausartet. (*"Mußten wir in der Schule immer machen, auch bei kariertem Papier."*) Meist reicht das Markieren der Einheiten mehr als aus.

Kap.2.4c: **Figuren**

(2.4.15) Wie beschreibt man jetzt Figuren, also Teilmengen von E^3? Durch Angabe all ihrer Punkte. Das ist in E^3 wieder schwierig. Also durch Angabe **all ihrer Ortsvektoren** in V_0^3 bzw all ihrer **Koordinatenvektoren** in $\mathbb{R}_K^3$. Letzteres ist für uns im Augenblick die einfachste Möglichkeit. Achtung: **Gemeint ist immer die Menge der Endpunkte,** nicht die Figur, die von den gesamten Pfeilen erzeugt wird.

(2.4.16) Die übliche Festlegung einer Figur erfolgt mit Hilfe der Mengensymbolik. Man schreibt etwa

$$Q = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_K, 0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 3, 0 \leq c \leq 1\}.$$

Das decodiert man wie folgt: T ist die Menge aller $\vec{a}$, wobei $\vec{a}$ ein Element des $\mathbb{R}^3_K$ sein soll. Jedes Element dieser Menge ist ein Tripel, dessen drei Komponenten wir hier (in dieser Definition) mit a,b und c bezeichnen. Diese Komponenten sollen alle angebenen Werte durchlaufen. Alle a zwischen 0 und 2 usw.

Hat man das verstanden, so sieht man, dass es sich bei Q um ein achsenparalleles Quader handelt. (2.3.11) gibt ein früheres Beispiel.
(2.4.17) Ein umgekehrtes Beispiel (von der Figur zur Beschreibung): Ein Kreiszylinder der Höhe H und mit Radius R soll beschrieben werden. Dazu legen wir K wie folgt: Der Ursprung kommt in den Mittelpunkt des Zylinderbodens. Die 3-Achse liegt in Richtung der Zylinderachse. Dann erhalten wir die folgende Beschreibung der Figur:

$$Z = \{\vec{z} \mid \vec{z} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3_K, 0 \leq z \leq H, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Ersetzen wir das letzte $\leq$ durch $=$, dann erhalten wir eine Quantifizierung der Punkte des Zylinder**mantels**.

$$M = \{\vec{z} \mid \vec{z} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3_K, 0 \leq z \leq H, x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Nochmals: **Nur die Endpunkte der Pfeile machen die Figur aus!**
(2.4.18) Größen wie a in Q oder x,y in der Menge Z haben die Rollen von freien Parametern. D.h. jede im Rahmen der Bedingungen zulässige Wertewahl ergibt ein Element der betrachteten Menge. Jedes Element der Menge muss dabei vorkommen. Aber es ist durchaus zulässig, dass ein und dasselbe Element mehrfach auftritt.
(2.4.19) Schließlich: **Enthalten zwei Mengen dieselben Elemente, dann sind sie gleich**. So können wir die Menge Z alternativ auch wie folgt festlegen:

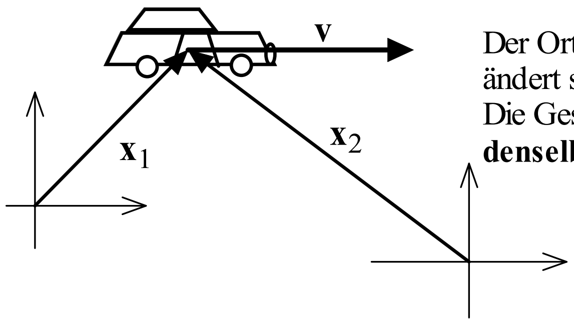
$$Z = \{(x, y, h)) \mid x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq h \leq H,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

(2.4.20) Beim Zeichnen von Figuren zeichnet man in der Regel nur die Endpunkte der zugehörigen Ortsvektoren. Teilweise zeichnet man einen oder zwei typische Ortsvektoren mit ein, besonders auch, um zugehörige Bezeichnungen mit sichtbar zu machen. (Vgl. etwa die Figuren in (3.3.11) und (4.5.3)

Kap.2.4d: **Freie und gebundene Vektoren**

(2.4.21) Viele Größen der Physik werden durch geometrische Pfeile beschrieben. Also durch Angabe einer Richtung und eines Betrages. Geschwindigkeit, Kraft, elektrische Feldstärke, Drehmoment usw. Dabei zeigt sich, dass es vielfach noch zwei Typen derartiger Pfeile oder Vektoren gibt, die man manchmal unterscheiden sollte. Wir illustrieren diesen Sachverhalt über ein Beispiel.
Wir betrachten einen Körper, vielleicht ein Auto, das eine Bewegung ausführt und wollen den Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreiben. Wir tun das durch Angabe von Ort und Geschwindigkeit, beides in Form geometrischer Pfeile. Sei $\vec{v}_A$ die Geschwindigkeit und $\vec{x}_A$ der Ortsvektor unseres Autos. Ein volles Koordinatensystem benötigen wir nicht, nur einen Ursprung. Jetzt stellen wir uns vor, der Autozustand würde noch von einer zweiten Person beobachtet und zwar **von einem anderen** (relativ zum

ersten ruhenden) **Ursprung aus**!



Wie sehen die Beschreibungsgrößen des zweiten Beobachters aus? Jede Skizze zeigt, dass der Ortsvektor sich ändert: Der Anfang des Pfeiles ist ja gerade mit dem Ursprung *verbunden.* Dagegen ändert sich der Geschwindigkeitsvektor nicht, wenn wir annehmen, dass die beiden Beobachter relativ zueinander ruhen: Richtung und Größe der Bewegung bleiben dieselben.

(2.4.21) Wir definieren:

T	Ein (eine Größe beschreibender) geometrischer Pfeil, der sich unter Ursprungswechsel nicht ändert, sondern einfach nur parallel verschoben wird, heißt *freier Vektor.* Die Menge aller freien Vektoren bezeichnen wir mit V^3.
T	Ändert sich der Vektor dagegen bei Ursprungswechsel wie ein in 0 beginnender Ortsvektor, sprechen wir von einem *gebundenen Vektor* . Die Menge der jeweils an $0 \in E^3$ gebundenen Vektoren bezeichnen wir weiter mit V_0^3.

Bei Bedarf kann man durch *Uminterpretation* die Menge wechseln: Ist $\vec{a} \in V^3$ ein freier Vektor und gibt man einen Ursprung 0 vor, dann kann man $\vec{a}$ immer auch als gebundenen Vektor in $\vec{a}_0 \in \mathrm{V}_0^3$ interpretieren. Derselbe Pfeil, aber mit anderer Bedeutung oder Interpretation. Diese mathematische Konstruktion wird beispielsweise im Zusammenhang mit den Flugparabeln benötigt.

(2.4.22) Wir betrachten einen starren Körper, bei dem an mehreren Punkten Kräfte angreifen. Als Beispiel nehmen wir eine idealisierte Balkenwaage. Hier greifen an drei Punkten Kräfte an. (Machen Sie eine Skizze!) Sei $\vec{F}$ die Kraft, die an einem bestimmten Punkt P angreift. Wie formalisiert man das? Wir müssen beide Größen, den Ort und die Kraft festlegen. Den Ort legen wir durch Angabe seines Ortsvektors $\vec{x}_P$ fest. Dann bilden wir das geordnete Paar $(\vec{x}_P, \vec{F})$ und das bestimmt uns mathematisch die gewünschte Konfiguration: Die in P angreifende Kraft $\vec{F}$.

□ $\vec{F}$ aus dem Beispiel ist als Kraft ein freier Vektor. Also darf man parallel verschieben. Andereseits darf man das nicht, denn dann greift die Kraft an einer anderen Stelle an. Wo liegt der Argumentationsfehler?

Kap.2.4d: **Konfigurationsräume für Mehrteilchensysteme**

(2.4.23) In der Physik tauchen Systeme auf, die nicht aus einem, sondern aus mehreren Massenpunkten zusammengesetzt sind. Moleküle sind hierfür gute Kandidaten. Will man den Lagezustand eines solchen Systems beschreiben, so benötigt man die Ortsvektoren aller Punkte. Nehmen wir an, wir hätten es mit 3 Punkten mit Ortsvektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z} \in V_0^3$ zu tun. Dann wird man die **gesamte Konfiguration** wieder zu einem Tupel zusammenfassen, zu einer Art *Gesamtvektor.* Es kommt auf die Reihenfolge an, also bilden wir $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Analog zur Bildung des $\mathbb{R}^3$ aus $\mathbb{R}$. Dieser Supervektor enthält nun die vollständige Lageinformation unseres Systems. Die Gesamtheit all dieser Ojekte bezeichnen wir mit $(V_0^3)^3$. Also $(V_0^3)^3 = \{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mid \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_0^3\}$.

(2.4.24) Wir werden sehen, dass es sich hierbei erneut um einen Vektorraum handelt, den wir leicht auch quantifizieren können. Dazu führen wir ein vollständiges Koordinatensystem K ein, so dass wir von den Orts- zu den Koordinatenvektoren übergehen können. Tun wir das und fassen wir alle Komponenten der

Reihenfolge nach zusammen, so erhalten wir ein Neuntupel $\vec{X}^K = (x_1, x_2, ..., z_3)$. Also $\vec{X}^K \in \mathbb{R}^9_K$, wobei Bezeichnung und Bedeutung sich von alleine erklären sollten. $\vec{X}$ hat also 9 Freiheitsgrade.

□ Machen Sie eine Skizze der durch $\vec{X}^K = (2, 0, 0, 0, 2, 3, 2, 0, 3)$ festgelegten geometrischen Dreipunktekonfiguration.

(2.4.25) Vielfach ist es nützlich, für jeden Punkt einzeln ein eigenes geeignetes Koordinaternsystem einzuführen. Dann kann man entsprechend zum Koordinatenvektor übergehen.

(2.4.26) Manchmal bestehen auch **Bindungen zwischen den Punkten**. Nehmen wir etwa an, dass die Punkte zu einem starren Dreieck verbunden sind. Dann wird die Zahl der Freiheitsgrade eingeschränkt. Wir quantifizieren die Lage des Dreiecks wie folgt: Zuerst geben wir die Lage für einen Dreiecksmittelpunkt an (3 Parameter). Dann legen wir die Richtung senkrecht zur Dreiecksfläche fest (2 weitere Parameter). Und schließlich können wir das Dreieck in seiner Ebene noch um den Mittelpunkt drehen (1 weiterer Parameter). Also hat das neue System nach Quantifizierung nur 6 statt 9 Freiheitsgrade.

□ Erstellen Sie eine kurze zusammenfassende Übersicht über den Inhalt dieses Kapitels. Worum geht es jeweils? Beherrschen Sie die Resultate? Können sie zu jedem dieser Resultate ein illustrierendes Beispiel angeben?