****

Vorkurs Mathematik

F. Krause

Kapitel 1
Formeln und Terme

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Inhaltsübersicht Kapitel 1

40 Seiten

Kap.1.1: **Allgemeine Einstiegshilfen**

1.1.1: **Fragen, beobachten und beschreiben**

Fragen *ist ein wichtiger Teil des Verstehens- und Lernprozesses. Häufig wird viel zu wenig gefragt und hinterfragt. Und es gibt unterschiedliche Arten von Fragen. Einmal solche, die lokal innerhalb eines Lernprozesses ablaufen, die nur einen "gerissenen Faden" neu knüpfen. Und auf der anderen Seite solche, die die Richtung des gesamten Denkens leiten und strukturieren. Beide sind wichtig. Wir wollen hier in diesem einleitenden Abschnitt auf den zweiten Typ eingehen, da sich imer wieder zeigt, dass ohne auf solchen Fragen aufbauendes Problembewußtsein nur ein unzulänglicher Lernerfolg entsteht.*

Eine tiefergehende meist zunächst mehr intuitiv gefühlte Frage verlangt weitere Arbeit. Man muss sie mit zugehörigen ***Beobachtungen*** *und Beispielen verbinden und präzisieren. Dabei stellt sich in der Regel die Notwendigkeit heraus, verwendete Begriffe zu präzisieren und in einem* ***mathematischen Begriffsystem*** *zu definieren.*

(1.1.1) In vielen Situationen stellt sich die Frage: $\boxed{\text{"Wie geht es weiter?"}}$ Mathematik und Physik liefern hierzu eine Vielzahl von Antworten und Resultaten. Allerdings ist die Frage, so wie sie eben gestellt wurde, noch zu ungenau, erfasst zu viele unterschiedliche Fälle. Wir spezialisieren Sie jetzt in einer Richtung, die sich in der Mathematik als besonders tragfähig erweist. Allerdings ist ihre Behandlung auch recht anspruchsvoll:

> Kann man bei einer (endlichen oder unendlichen) Folge von Schritten (bestimmter Art) den Wert des nächsten bzw. letzten Schrittes vorhersagen? Legen alle Schritte zusammen noch einen weiteren Wert fest? Etwa in Fällen, in denen es keinen "letzten Schritt" gibt.

(1.1.2) Wie wird man vorgehen, um diese Frage genauer zu verstehen und dann zu behandeln? Bei **Inspektion der Frage** stellt sich eine Anschlussfrage: Was ist wohl mit "Schritt" gemeint? Dazu gehört "Wert des Schrittes?". Man wird daher an so etwa wie einen Rechenschritt denken, bei dem jeweils ein bestimmter Wert berechnet werden kann. Und "Vorhersage" bedeutet, dass man u.U. nur die einzelnen Werte kennt, nicht aber die Vorschrift, die den gesuchten Wert liefert.

(1.1.3) Können Sie jetzt Beispiele aus dem Zahlbereich angeben, auf die die Fragestellung passt? Beispiele, die einem Information darüber liefern, was die allgemeine Frage genauer beinhaltet?

- Betrachten wir etwa die Zahlfolge 1,3,5,7,... Sofern "das so weitergeht" wäre der Wert des nächsten Schrittes 9. Man kann hier leicht eine rekursive Formel für die Wertebestimmung angeben: $\boxed{\mathrm{a}_n = a_{n-1} + 2}$. Oder eine explizite $\mathrm{a}_n = 2n+1$. Beachten Sie: n bezeichnet oder indiziert die einzelnen Schritte und a_n bezeichnet den Wert des n-ten Schrittes. Speziell ist $\mathrm{a}_1 = 1$. Das benötigt man im Fall der rekursiven Formel zusätzlich.
- Jetzt geben wir eine andere Zahlfolge gleich über eine explizite Formel: $\boxed{\mathrm{b}_n = \frac{1}{n}}$. Haben wir diese Formel, dann können wir den Wert für jeden Schritt bestimmen. Aber die Frage in (1.1.1) hatte ja noch einen zweiten Teil: Und in diesem Beispiel legen alle Schritte zusammen den Grenzwert 0 fest. Er kommt irgendwie "nach allen Schritten". Etwas anschaulicher: Stelle alle Zahlen als Dezimalbrüche dar. Dann ist ab n=100 die erste Nachkommastelle Null, ab 10^6 sind es die ersten 5 usw. Alle Nachkommastellen werden irgendwann Null. Das gibt die Vorhersage des Grenzwertes! Genauer: Verlange, dass K Nachkommastellen von b_n von einer Stelle N (n≥N) ab Null sind. Das ist offensichtlich der Fall für $\mathrm{N}=10^{K+1}$.
- $\boxed{\mathrm{c}_n = 1 + 2 + ... + i + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i}$ Das gibt die rekursive Formel $\mathrm{c}_n = c_{n-1} + n$. Mit etwas mathematischer Arbeit läßt sich auch eine explizite (vereinfachende) Formel für c_n finden, was wir aber nicht tun. **Gibt es einen Grenzwert?** Offenbar "$+\infty$", d.h. der Wert wächst über alle Grenzen.

- $\boxed{\mathrm{d}_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{i+1} i + ... + (-1)^{n+1} n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i.}$ Der Beginn einer zugehörigen Wertetabelle gibt eine Vermutung für eine explizite vereinfachende Formel

1	2	3	4	5	6	7
1	-1	2	-2	3	-3	4

Das gibt die Vermutung: $\mathrm{d}_{2n+1} = n$ und $\mathrm{d}_{2n} = -n$. Ein strenger Beweis ist leicht möglich. Also: Der Wert ist für alle Schritte angebbar, insbesondere auch der jeweils folgende. Aber hier ein bestimmter Grenzwert nach allen Schritten wird nicht festgelegt..

(1.1.4) **Damit hat man Beispiele dafür, was mit der Frage selbst gemeint ist und wie unterschiedlich die zugehörigen Antworten aussehen**. Man erhält die Information im Wesentlichen durch genaues Hinsehen, durch Beobachten.

(1.1.5) Jetzt sollten Sie verstanden haben, wieso in (1.1.1) die Frage nach dem "weiteren Wert bei fehlendem letzten Schritt" gestellt wurde. Versuchen Sie dazu eine andere Konkretisierung zu finden, die von der Aussage ausgeht: "Es gibt keine kleinste positive reelle Zahl".

(1.1.6) Aber die Antwort auf unsere Frage ist keineswegs immer so leicht zu finden. Das zeigen die nächsten Beispiele, die bereits andeuten, wieso der ganze mathematische Apparat erforderlich ist.

- $\mathrm{s}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i}$ und $\mathrm{t}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{i}$

$\mathrm{u}_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i^2}$

Wieder versuchen wir es mit dem Beginn der zugehörigen Wertetabellen und deren Inspektion:

1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$
1.0	1.5	1.8333	2.0833	2.2833	2.45	2.5929

1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{37}{60}$	$\frac{319}{420}$
1.0	0.5	0.83333	0.58333	0.78333	0.61667	0.75952

1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{49}{36}$	$\frac{205}{144}$	$\frac{5269}{3600}$	$\frac{5369}{3600}$	$\frac{266681}{176400}$
1.0	1.25	1.3611	1.4236	1.4636	1.4914	1.5118

Hier wird ein Teil der Antwort sehr schwer. Eine rekursive Formel ist jeweils leicht anzugeben, so dass man die Frage nach dem nächsten Wert beantworten kann. Die Auswertung der expliziten Formel wird für größere n allerdings bereits sehr mühsam. Aber wie steht es mit der Frage nach dem Grenzwert? Dem "nach allen von der Formel erfassten Schritten kommendem Wert?" Hier hilft uns die reine Inspektion nicht weiter.

(1.1.7) Stattdessen können wir einerseits unsere Rechen-, Wahrnehmungs- und Darstellungsfähigkeit mit Hilfe des Computers deutlich verbessern. Andererseits können wir das Problem gedanklich mathematisch analysieren und tatsächlich lösen.

(1.1.8) Wir wollen auf die weitere Behandlung der Beispiele hier nicht weiter eingehen. vielmehr sollte gezeigt werden, was für eine Arbeit zu leisten ist, um eine zunächst einfache Frage wie "Wie geht es weiter?" im Rahmen von Beispielen und genauerer Hinterfragung zu präzisieren. Am Ende sollte die Frage dann eine Form haben, die mathematisch-naturwissenschaftlicher Arbeit zugänglich ist. Im folgenden Teilkapitel werden wir darin einen Schritt weiter gehen und auch auf die Beispiele zurückkommen.

Diese einleitenden Betrachtungen haben wir vornehmlich eingefügt, weil wir von Studenten immer wieder zu hören bekamen: "Ich habe überhaupt nichts verstanden". Fragte man dann genauer nach, so zeigte sich, dass fast alles verstanden war - sagen wir 95% - und der Rest wurde vielfach klar, sobald die Frage einmal vernünftig formuliert war. Das erforderte zwar Anstrengung, aber fast jeder konnte soche Leistungen erbringen und am Ende stand das fehlende Verständnis. Nur war man es nicht gewohnt, solche Unklarheiten zu hinterfragen und genauer zu formulieren.

(1.1.9) Ergänzung: Die Einstiegsfrage "Wie geht es weiter?" hat insbesondere auch für die Physik eine wichtige, etwas andere Präzisierung. Es zeigt sich, dass sie dort unmittelbar zu den Differentialgleichungen führt und dass die allgemeine Gesetzmäßigkeiten der Natur meist diese Form von Differentialgleichungen haben.

1.1.2: **Allgemeine Regel und Anwendungsbeispiele**

Meist ist es so, dass man mit ***einer*** *allgemeinen Regel, einer physikalischen Gesetzmäßigkeit oder einem mathematischen Resultat eine* ***Vielzahl von Anwendungsbeispielen*** *erfasst. Und wenn man vor einem konkreten Problem steht, dann enthält es meist Neuartiges, wird aber üblicherweise durch sinnvolle Anwendung allgemeiner Resultate gelöst.*

Beispiele, die in einem Lernprozess eingefügt sind, haben typischerweise die Funktion, zugehörige allgemeine Resultate zu verdeutlichen*, sie dienen dazu, das abstraktere algemeinere Resultat zu verstehen und dauerhaft zu erfassen. Umgekehrt ist es fast nie. Im günstigen Fall ist das Beispiel selbst zusätzlich wichtig.*

> **Das bedeutet für den Lernvorgang, dass man sich bewußt um das Verständnis des Allgemeinen bemühen muss. D.h. am Ende eines Beispieles sollte man sich fragen: Was ist spezifisch für das Beispiel und welche allgemeinen Resultate verdeutlicht es, was versteht man jetzt besser? Es genügt nicht, sich auf das Beispiel zu konzentrieren.**
>
> **Oder auch: Zu üben ist sowohl der Weg vom Abstrakten zum Konkreten wie der vom konkreten Beispiel zum abstrakten Gesetz.**

(1.1.10) So dienten die Beispiele in (1.1.6) über Reihen dazu, die **allgemeine** Problematik unendlicher Summen zu verdeutlichen. Sie sollten das Bewußtsein schärfen für Fragen der folgenden Art:

> **Was kann bei unendlichen Summen alles geschehen?** Wie sollte man die Fragen zum Verhalten unendlicher Summen genauer formulieren? Wie werden korrekte und nützliche Antworten aussehen?

(1.1.11) Unsere Beispiele haben gezeigt: Unendliche Summen können einen Grenzwert haben, müssen es aber nicht. Für endliche Summen gibt es einen letzten Sumanden und damit einen letzten Wert. Und daraus folgt wieder die Frage: **Welche Rechenregeln für endliche Summen gelten auch für unendliche?** Bzw. unter welchen Umständen gelten sie?

(1.1.12) Kehren wir zu unseren Beispielen in (1.1.6) mit der Frage nach dem Grenzwert zurück. Hier sollte man weniger im Sinne der angesprochenen Polarität Beispiel - Regel nicht nach den drei konkreten Grenzwerten fragen, sondern nach zugehörigen allgemeinen Regeln suchen:

> Wie sollen oder können allgemeine Regeln aussehen, die die Grenzwertfrage für einzelne Fälle oder allgemein beantworten? Genauer: Welche Form sollten Regeln haben, die die gestellten Beispielfragen und unzählige weitere analoge - aber noch nicht gestellte - beantworten.

(1.1.13) Über diesen Fragenkomplex kann und sollte man durchaus länger nachdenken und zunächst selbst Antwortversuche diskutieren. Insbesondere dann, wenn man den daraus entstehenden Formalismus noch nicht kennt.

(1.1.14) Als Ergebnis werden weitere Präzisierungsfragen herauskommen und eine bestimmte Form der Aussagen und die Forderung nach deren mathematischem Beweis. Zunächst die Präzisierungsfragen:

> **Was ist eine Zahlfolge genauer und wann ist eine Zahl Grenzwert dieser Folge?** Damit die Regel ganz allgemein anwendbar ist, muss das eindeutig geklärt sein.

(1.1.14) Nun können wir zur Form der allgemeinen Regeln übergehen. Solche können (und sollten) wie folgt aussehen. Ideal wäre der folgende Sachverhalt:

- Sei (a_n) eine Zahlfolge. Diese erfülle die folgende Bedingung $\boxed{\text{ggg}}$. Dann hat die Zahlfolge einen Grenzwert.

- Sei (a_n) eine Zahlfolge. Diese habe einen Grenzwert. Dann ist die Bedingung $\boxed{\text{ggg}}$ erfüllt.

Man sagt kurz: "(a_n) hat genau dann einen Grenzwert, wenn $\boxed{\text{ggg}}$ erfüllt ist". Eine solche Bedingung gibt es, nur ist sie relativ schwer zu handhaben, hilft einem im Falle konkreter Beispiele wenig. Mit ihrer Hilfe leitet man dann jedoch weitere, besser handhabbare Regeln her, die meist so aussehen:

- Sei (a_n) eine Zahlfolge. Wenn diese die folgende Bedingung erfüllt $\boxed{\text{hhh}}$, dann hat die Zahlfolge einen Grenzwert.
- Sei (a_n) eine Zahlfolge, die eine Grenzwert besitzt. Dann läßt sich dessen Wert mit der Methode $\boxed{\text{mmm}}$ bestimmen (sofern diese anwendbar ist).

D.h. man trennt die Frage nach der **Existenz des Grenzwertes** von dessen **Wertbestimmung** ab. All dies erscheint einem vernünftig, sabald man es mit zugehörigen konkreten und verdeutlichenden Beispielen verknüpft.

(1.1.15) Das eigentliche Problem ist natürlich die inhaltliche Ausfüllung von $\boxed{\text{ggg}}$ und $\boxed{\text{hhh}}$ und $\boxed{\text{mmm}}$. Solche müssen gefunden und bewiesen werden. (Was **viel** Arbeit erfordert!) .

Und natürlich kann man auch Negativresultate finden. Etwa:

Sei (a_n) eine Zahlfolge. Wenn diese die folgende Bedingung erfüllt $\boxed{\text{zzz}}$, dann hat die Zahlfolge **keinen** Grenzwert.

(1.1.16) In unseren problematischen Beispielen hatten die Zahlfolgen immer eine besondere Form. Sie entstanden als Summen einer anderen Zahlfolge. Da sich dieser Fall ("unendliche Reihe") als besonders wichtig erweist, wird man Aussagen der folgenden Form suchen:

- Sei (a_n) eine Zahlfolge.für n$\in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wenn die Folge (a_n) die folgende Eigenschaft $\boxed{\text{yyy}}$ besitzt, dann hat (s_n) einen Grenzwert.

Wir geben jetzt ein Beispiel eines gültigen (also beweisbaren) Resultates dieser Art:

Es **sei** (a_n) eine Zahlfolge,	die folgende Bedingungen erfüllt:
	$a_n > 0$ für alle n
	$a_{n+1} < a_n$ für alle n
	(a_n) hat den Grenzwert 0.
Dann hat (s_n) mit $s_n = \sum(-1)^{i+1}a_i$	einen Grenzwert.

(1.1.17) Diese Regel läßt sich auf eines unserer Beispiele oben anwenden. Nämlich? Eine Kleinigkeit ist dabei noch zu beachten, die man aber leicht klärt.

(1.1.18) Man sollte daher versuchen, sich in ein mathematisches Gebiet (wie das hier angesprochene) so einzuarbeiten, das man Fragen der folgenden Art bewußt beantworten kann:

- Wie sieht die allgemeine Problemstellung aus? Wie wird diese durch zugehörige durchgesprochene Beispiele präzisiert?
- Wie sollten zufriedenstellende Antworten aussehen?
- Was wird tatsächlich geleistet? Und was bleibt offen?
- Wie werden die Resultate bewiesen
- Und wie wendet man sie an?

(1.1.19) Das bisherige Beispiel mit zum Grenzwertproblem ist sehr komplex und anspruchsvoll. Die angesprochene Technik. sich den allgemeinen Sachverhalt über Beispiele zugänglich zu machen, ist aber durchaus auch bei viel einfacheren Fragen nützlich und sinnvoll. Hierzu ein anderes Beispiel:

Die folgende **allgemeine Formel** soll verstanden (und dann bewiesen) werden:

$$\boxed{\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2p)} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \quad \text{für p=1,2,3,... und mit } n!=1\cdot 2\cdot \ldots\cdot n..}$$

Dazu schreiben wir sie für ein Beispiel mit kleinem p -sagen wir p=3 - aus:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2^6\left(1\cdot 2\cdot 3\right)^2}$$

und rechnen sofort wie folgt:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\overset{(1)}{=}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2}\overset{(2)}{=}\frac{6!}{2^6 3!}$$

(1) Mit fehlenden Faktoren erweitern
(2) Aus jedem Nennerfaktor eine 2 ausklammern

Und diese Termumformung ist offensichtlich analog für jedes p ausführbar. Damit ist die Formel verstanden.

(1.1.20) In jedem der Teilkapitel 1.2-6 tritt die Problematik *Regel-Beispiel* auf. Einerseits ist das gewählte Beispiel selbst für die mathematische Arbeit im Studium sehr wichtig. Andererseits bildet jedes dieser Teilkapitel ein illustrierendes vorbereitendes Beispiel für einen wichtigen allgemeinen Sachverhalt und das wird auch angesprochen.

Und in allen darauf folgenden Kapiteln sollten Sie sich einerseits bemühen, die hinter dem jeweiligen Thema stehenden allgemeinen Fragen zu erfassen und andererseits sich die resultierenden allgemeinen Resultate zu merken.

1.1.3: **Begriffssysteme und Definitionen**

Damit Anwendungen allgemeiner Regeln möglich und die entstehenden Resultate mit Sicherheit korrekt sind, müssen die (in den Regeln) benutzten Begriffe und deren Zusammenspiel eindeutig festgelegt sein. Daher entstehen in den wissenschaftlichen Tätigkeitsbereichen jeweils spezifische Begriffssysteme, die dann gleichsam das Schmieröl für konkrete Problemarbeit bilden. Das ergibt einen neuen Fragekomplex für die Lernprozesse: ***Welche spezifischen Begriffe werden benötigt, was ist zu unterscheiden und wie wird die jeweils festgelegt****?*

(1.1.21) In unserem Beispielbereich sind wir bereits auf die Begriffe "Zahlfolge" und "Grenzwert einer Zahlfolge" gestoßen. Beides ist festzulegen. Später zeigt sich dann, dass diese Festlegung wieder ein konkretisierendes Beispiel für einen viel allgemeineren Grenzwertbegriff bildet.

□ Versuchen Sie sich selbst an der Festlegung! Beachten Sie, dass bereits hier ein System vorliegt. Der zugehörige Grenzwert kommt nicht ohne den Zahlfolgenbegriff aus und dieser nicht ohne den Zahlbegriff. Und welche Form muss die Grenzwertdefinition haben? Das zumindest sollten Sie vorab angeben können und dies auch tun.

(1.2.22) Eine solche begriffliche Präzision bereitet zunächst vielfach Mühe, die sich aber erfahrungsgemäß lohnt. Auch wird gefragt, wieso das nötig sei, wo doch eigentlich immer klar sei, was gemeint wäre. Dazu einige Erläuterungen:

> Im alltäglichen Leben ist es durchaus üblich, unterschiedliche Dinge mit derselben Bezeichnung zu versehen. Man erwartet, dass aus der jeweiligen Situation heraus klar ist, was genauer gemeint ist. Diese für einfache und vertraute Situationen durchaus nützliche Sitte wird teilweise im schulischen Bereich übernommen und behindert dann das Verstehen und Erlernen komplexerer Sachverhalte und mathematischer Arbeit u.U. sehr. "Die Seite a des Dreiecks" - was ist damit gemeint? Die zugehörige geometrische Figur in Form einer Strecke? Aber es heißt dann auch: "Das Dreieck mit der Seite a=3cm". Hier ist jetzt die *Länge der Dreiecksseite* gemeint. Mathematisch bietet sich eine selbsterklärende Bezeichnung wie $\ell(a)$ an. "Konstruiere die Seite a". Dann geht es nicht um die Länge, sondern um die relative Lage der Seite im Dreieck [1]). Im Bereich der Physik ist vielfach die Lage (der Ort) der Dreiecksseite gemeint, die man beispielsweise durch den Ort der beiden Endpunkte festlegen kann. Der Ort der Endpunkte und auch der der dazwischen liegenden Seitenpunkte wird mit Hilfe der Vektorrechnung formalisert, die dann auch selbsterklärende Symbole wie $\vec{x}_a(\alpha)$ mitliefert [2]). In einer anderen Situation wieder kommt es nicht auf die gesamte Lage der Strecke an, sondern nur darauf, ob sie durch Parallelverschiebung in eine zweite gegebene Strecke b überführt werden kann. Man betrachtet dazu die "Klasse" aller zu b paralleler Strecken gleicher Länge. Und hierfür liefert die naive Mengensprache eine selbsterklärende Bezeichnung [3]):

$$K_b = \{a| \text{ a ist zu b parallele Strecke mit } \ell(a) = \ell(b)\}$$

Wir sehen: Zu dem umgangssprachlichen Begriff "die Seite a" gehört eine Reihe begrifflicher Präzisierungen, die alle in gewissen Beziehungen zueinander stehen, **ein Begriffssystem bilden.**

(1.2.23) Zu den "Zahlfolgen", aus deren Bereich unsere bisherigen Beispiele meist stammen, gehört auch ein umfangreiches Begriffssystem, das im übrigen weitgehend selbsterklärend ist. Einige Beispiele, deren Bedeutung man verstehen sollte, sobald man den Folgenbegriff selbst vertanden haT.

n-tes Folgenglied, Teilfolge, endlicher Abschnitt der Folge, Anfangsglieder der Folge..

Grenzwert der Folge, Grenzwert einer Teilfolge,Nullfolge,....

Und einige unterscheidende Eigenschaften von Folgen: monoton, positiv, alternierend, konvergent, ...

Das zugehörige Begriffssystem erweist sich übrigens als Ein Spezialfall des allgemeinen zu Abbildungen und Funktionen gehörigen Begriffsystems, das wir in Kap.7 des Kurses behandeln.

(1.2.24) Das Begriffssystem "Gerade in einer (festen) Ebene" wird in Kap. 1.6 besprochen. Die einleitenden Erläuterungen zeigen: Das Teilkapitel befasst sich einerseits mit einem sachlich wichtigen Beispiel, das andererseits Beispiel für die Methode quantitativer Beschreibung von Figuren ist. D.h. das Beispiel ist sehr verallgemeinerungsfähig.

Mit typischer Bezeichnungswahl.

- Die Gerade g (der Ebene E). g ist die Menge (Gesamtheit) all ihrer Punkte.
- Eine Strecke (auf der Geraden)
- Ein Punkt P der Ebene liegt auf der Geraden g
- Ein Punkt P liegt zwischen zwei Punkten Q und R der Geraden
- Die Richtung der Geraden g
- Koordinatendarstellung der Punkte der Geraden.
- Geradengleichung=Bestimmungsgleichung für die Koordinaten der Punkte der Geraden
- Unterschiedliche Formen von Geradengleichungen

(1.2.25) Ein wichtiges Begriffssystem gehört zu den Vektoren. Seine Einführung ist ein wichtiger Teil des Kurses. Es sollte als Resultat der Kapitel 2 und 3 verfügbar sein. In Kap.5 geht es dann um das zu Bestimmungsgleichungen gehörige Begriffssystem. Und -wie bereits gesagt - in Kap. 7 und 8 um das zu Funktionen gehörige.

1.1.4: **Verstehen, folgern und formulieren**

Vermutet man ein bestimmtes Resultat, dann kann man versuchen, es aus gesicherten allgemeinen Reultaten herzuleiten, es formal zu beweisen. Aber man kann auch darangehen, zu verstehen, wieso dieses Resultat folgt. Welche Vorbedingungen dafür besonders wichtig sind. Da diese Probleme sehr bald ausgesprochen komplex werden, benötigt man eine Vielzahl technischer Fähigkeiten, die zum Teil recht anspruchsvoll sind und erlernt werden müssen. Und am Ende kommt es darauf an, das Resultat samt seiner Herleitung so zu formulieren, dass andere es (möglichst leicht) verstehen und nachvollziehen können. Und zwar über den Text selbst, kontextfrei - ohne nachfragen zu müssen.

Zu diesem Bereich gehen wir auf einige Beweismethoden ein und diskutieren speziell die Herleitung, den rechnerischen Beweis neuer Formeln. Viele der dabei auftretenden Schritte werden in Kap. 1.2-4 genauer behandelt.

(1.2.26) Wir beginnen mit der Definition der zweier Mittelwerte, die zu einem allgemeine für die Statistik wichtigem Begriffsystem gehören.

Sei n natürliche Zahl >0 und $a_1, a_2, ..., a_n$ seien n nicht negative reelle Zahlen.

Dann ist $M_A(a_1, .., a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ das arithmetische Mittel der Zahlen und $M_G(a_1, .., a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$ das geometrische Mittel der n Zahlen.

Zunächst sind das zwei positive Zahlen, die beide irgendwie "in der Mitte des vorgegebenen Zahlenschwarmes" liegen. Jetzt eine Frage: Besteht zwischen diesen beiden Zahlen eine weitergehende, über diese Mitteneigenschaft hinausgehende Beziehung? Das ist zunächst keineswegs naheliegend. Genauer: Falls man einen der beiden Mittelwerte kennt, kann man dann etwas über den WErt des anderen aussagen? Ihn vielleicht sogar (ohne die Einzeldaten zu kennen) bestimmen?

(1.2.27) Tatsächlich besteht eine solche Beziehung in Form einer Ungleichung. Es gilt nämlich immer

$$\boxed{M_G(a_1,..,a_n) \leq M_A(a_1,..,a_n) \qquad \text{AGM-Ungleichung}}$$

(1.2.28) Jetzt - bei der Konfrontation mit einem solchen **allgemeinen Resultat** - wird etwas **eigenständige Arbeit** erwartet. Sie sollten zumindest ein Beispiel kurz rechnen. Sagen wir n=3 und $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 3$. Und Sie sollten die Formeln für n=1,2,3 aufschreiben, formulieren.

Für n=1,2,3 lautet die Ungleichung ausgeschrieben -wobei wir aus Gründen der Bequemlichkeit Bezeichnungen ohne Indices verwenden:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[1]{a} \leq \frac{1}{1}a \\ \sqrt[2]{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b) \\ \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a+b+c) \\ .... \\ \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ...a_n) \end{array}}$$

(1.2.29) Aber ist das wirklich **immer** korrekt? Für n=1 sicher. Für n>1 aber muss das bewiesen werden, um letzte Zweifel auszuräumen! Wie geht man an einen solchen Beweis heran? Das Beispiel hier soll wieder das Verständnis des allgemeinen Vorgehens fördern.

(1.2.30) Für n=2 findet man zunächst leicht einen Beweis.

Beweise dieses Typs sehen wie folgt aus: **Man startet mit einer gültigen Gleichung, hier Ungleichung. An dieser nimmt man sukzessive zulässige Termumformungen oder zulässige Gleichungsumformungen bzw. hier Ungleichungsumformungen vor. Steht dann am Ende die gesuchte Gleichung oder Ungleichung da, ist selbige bewiesen!**

Die Rechnung für n=2. Gültiger Start: Ein Quadrat reeller Zahlen ist immer ≥ 0.

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$	**Gültig.** Mit Termumformung der linken Seite
$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$	Gleichungsumformung, Addition von 4ab auf beiden Seiten
$(a+b)^2 \geq 4ab$	Termumformung links
$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$	Gleichungsumformung: Positive Quadratwurzel ziehen, da beide Mittelwerte ≥ 0.

(1.1.31) Der Versuch, diesen Beweis analog für n=3 zu führen scheitert. Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(a+b+c) &\geq \sqrt[3]{abc} \qquad \text{oder} \\ (a+b+c)^3 &\geq 27abc \end{aligned}$$

Wegen

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+....+b^2c)+6abc$$

gibt das ausgeschrieben

$$\boxed{\underbrace{a^3+b^3+c^3}+3(\mathrm{a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2})\geq \underbrace{21abc}}$$

Zwei markante Beiträge sind markiert, die man am Ende benötigt. Man könnte mit gültigen Ungleichungen der folgendenArt anfangen:

$(a+b-c)^2c \geq 0$	$a^2c+b^2c+c^3-2abc-2ac^2-2bc^2 \geq 0$
$(a-b+c)^2b \geq 0$	....
$(-a+b+c)^2a \geq 0$	.....

oder mit oder

$$(a+b-c)^2(a+b+c) = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2)-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2-2abc \geq 0.$$

Aber damit gelangt man offensichtlich nicht zur gewünschten Form! Und das heißt: **Man benötigt eine neue Idee.**

(1.1.32) Nochmals: Die AGM-Ungleichung für n=3 soll bewiesen werden. Die neue Idee: Als gültige Startbedingung wollen wir die bereits bewiesene Ungleichung für n=2 verwenden und eine allgemeine Ungleichung, die Bernoullische Ungleichung. Diese lautet:

Seien x und α reelle Zahlen mit x≥-1 und $\alpha \geq 1$.
Dann gilt $\boxed{(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x}$.

Jetzt gehen wir wie folgt vor:

(1.1.33) Die Ungleichung gilt, wenn eine der drei Zahlen Null ist. Also sei a,b,c>0. Dann ist auch jedes arithmetische Mittel >0.

Benenne die drei Zahlen so, dass a$\geq b,c$ gilt.

Setze $\boxed{B=\frac{1}{2}(b+c)>0}$. Wegen der Wahl von a ist a≥B. Dann wissen wir bereits $B^2 \geq bc.$

Jetzt rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 &= \left(\frac{a+2B}{3}\right)^3 = \left(B+\frac{a-B}{3}\right)^3 \\
&\overset{(1)}{=} B^3\left(1+\frac{a-B}{3B}\right)^3 \overset{(2)}{\geq} B^3\left(1+3\frac{a-B}{3B}\right) \\
&= B^3\frac{a}{B} = B^2a \overset{(3)}{\geq} bc\cdot a.
\end{aligned}$$

Das ergibt insgesamt das gesuchte Resultat.

In (1) haben gezielt ausgeklammert, wie in Kap. 1.2.3 besprochen.

Bei (2) haben wir die Bernoullische Ungleichung benutzt. Wegen a>B ist gilt x=$\frac{a-B}{3B} > 0$, so dass die Ungleichung anwendbar ist. Und unter (3) haben wir die AGM-Ungleichung für n=2 verwendet.

(1.1.34) Folgende naheliegende Frage wollen wir hier nicht diskutieren: "Wie findet man einen derartigen Beweis?". Was man degegen sieht, ist, dass ein allgemeines Resultat - hier die Bernoullische Ungleichung benutzt und benötigt wird. Und Sie sollten in der Lage sein, die einzelnen Schritte des Beweises zu verstehen und zu rechtfertigen.

(1.1.35) Kann man den Beweis auf höhere n-Werte ausdehnen? Das ist der Fall und das analoge Durchgehen der einzelnen Schritte bereitet keine Probleme, so dass man den Beweis mit vollständiger Induktion abschließen kann. (Das wieder sollten Sie können!)

(1.1.36) Schließlich kann man sich den Gehalt der Ungleichung für n=3 auch noch mit Hilfe des Computers veranschaulichen. Dazu formen wir die Ungleichung zunächst etwas um. Wir nehmen den Fall a>0 und dividieren die gesamte Ungleichung durch a^3. Das gibt:

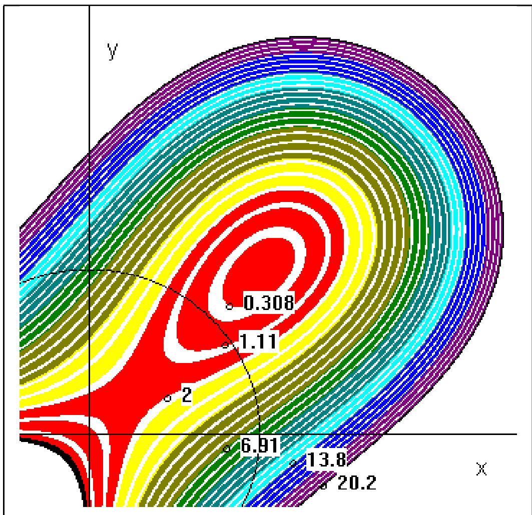
$$\frac{1}{a^3}\cdot \mathrm{abc} \le \frac{1}{a^3}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad \text{also} \quad 1\frac{b}{a}\frac{c}{a} \le \frac{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}{3}$$

$$\boxed{\beta\gamma \le \left(\frac{1+\beta+\gamma}{3}\right)^3} \quad \text{mit } \beta = \frac{b}{a} \text{ und } \gamma = \frac{c}{a}$$

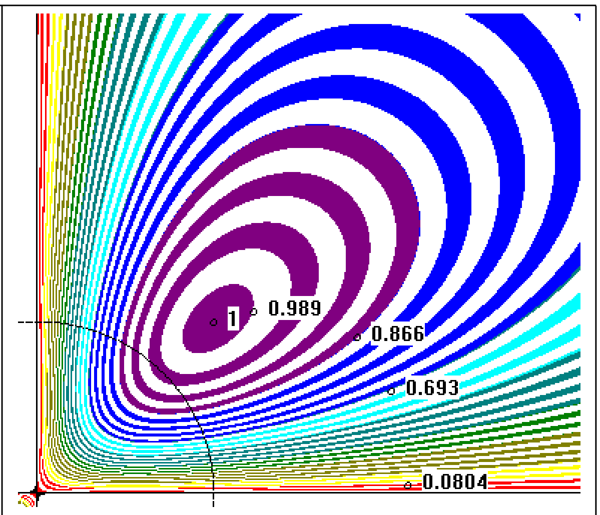
Wir haben daher auf den Wert von a normiert, diesen als Maßeinheit unserer Zahlen genommen. Dann kann jeder zugehörige Datensatz $(1,\beta,\gamma)$ als Punkt in der Ebene mit Koordinaten (x,y) interpretiert werden. Wir führen weiter zwei Skalarfelder wie folgt ein:

$$\mathrm{s}_A(x,y) = (1+x+y)^3 - 27xy \qquad \mathrm{s}_Q(x,y) = \frac{27xy}{(1+x+y)^3}$$

Sofern die AGM-Ungleichung in der normierten Form gilt, muss $\mathrm{s}_A(x,y) \ge 0$ im ersten ´Koordinatenquadranten gelten und ebenso $0 \le s_G(x,y) \le 1$. Das läßt sich leicht mit dem Computer graphisch testen. Gezeichnet wird das Höhenprofil der beiden Felder. D.h. die Randlinien der Farbfelder bilden Kurven konstanten Feldwertes. Natürlich ist das kein Beweis, sondern eher eine vertrauensbilden Maßnahme.



Das Feld s_A im ersten Quadranten mit einem Minimum bei x=y=1.
$\mathrm{s}_A(1,1) = 0$ Felwerte bis $\mathrm{s}_A = 20$.



Das Feld s_Q im ersten Quadranten mit Werten zwischen 0 und 1.

Verstehen der Achsensymmetrie der beiden Bilder und weiterer Eigenschaften. DAhinter steckt jeweils eine allgemeine Regel, die hier recht einfach anzugeben ist.

Kap.1.2: **Die Distributivgesetze**

Meist besteht ein Unterschied zwischen Formeln, die die mathematische Grundlage eines bestimmten Bereiches bilden, und Formeln, die man zum praktischen Rechnen verwendet. Wir illustrieren das am Beispiel der Distributivgesetze und der daraus folgenden Rechenmethoden.

(1.2.1) Als *Distributivgesetze* bezeichnet man zwei Rechenregeln, die im Bereich der Zahlen stets gültig sind und aus denen man rein logisch-mathematisch eine Reihe von ebenso gültigen Folgerungen ziehen kann. Wir unterscheiden zwischen den eigentlichen *Grundregeln* und den daraus folgenden, für die Anwendungen besonders nützlichen *Rechengesetzen.*

Die beiden Grundregeln lauten:

$$\boxed{\text{Es gilt } (a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x \text{ und } a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y \text{ für alle reellen Zahlen a,b,x,y.}}$$

T Diese beiden Gesetze werden **Distributivgesetze** genannt**.** Im Bereich der reellen Zahlen folgt übrigens jedes dieser Gesetze mit Hilfe des Kommutativgesetzes aus dem anderen, so dass eigentlich nur eine Grundregel vorliegt. Bei den Vektoren ist das nicht der Fall, dort benötigt man beide Gesetze.

(1.2.2) Zunächst ist zu betonen, dass es keineswegs der Hauptzweck dieser Gesetze ist, darin Zahlwerte einzusetzen. Bei vielen Anfängern ist folgende Vorstellung untergründig vorhanden: Formeln sind dazu da, Zahlen einzusetzen. Diese Vorstellung führt zu einem Drang, möglichst rasch tatsächlich Zahlen einzusetzen. Aber meist ist es weder besonders wichtig noch nützlich, die Gültigkeit von Beziehungen wie $(2+3)\cdot 5 = 2\cdot 5 + 3\cdot 5$ wertemäßig zu überprüfen und zu sichern. Das bringt wenig.

Welchen Sinn, welche Funktion haben die Distributivgesetze aber dann? Man kann für die in ihnen auftretenden Buchstaben andere Rechenausdrücke (also andere Terme) einsetzen **und das ergibt erneut eine gültige Gleichung!** Also nicht konkrete Zahlen, was natürlich auch zu richtigen, aber uninteressanten Beziehungen führt, sondern abstrakte andere Ausdrücke sollen eingesetzt werden.

(1.2.3) Setzen wir in der ersten Gleichung etwa für x den Term (c+d) ein und wenden auf die entstehende rechte Seite das zweite Gesetz an, dann ergibt sich folgende neue **und erneut gültige Gleichung:**

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d)\\ &= (a\cdot c + a\cdot d) + (b\cdot c + b\cdot d)\\ &= a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir auch das Assoziativgesetz der Addition herangezogen, das wie folgt lautet:

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

Denn nur als Konsequenz dieses Gesetzes dürfen wir im letzten Schritt die Klammern fortlassen. Das Ergebnis ist eine neue gültige Rechenregel, in die man bei Bedarf Zahlen einsetzen kann. Eine derartige Gleichung zeigt an, **dass und wie man ein und dasselbe Resultat auf zwei unterschiedliche Weisen erhalten kann**. Man darf daher stets die eine Berechnungsweise durch die andere ersetzen.

⇓ Die Mathematik befaßt sich damit, durch *Beweisen* aus Grundgesetzen möglichst viele und allgemeine gültige Konsequenzen herzuleiten. Wir wollen an dieser Stelle weniger die Technik dieses Beweisens vermitteln und üben, sondern fragen danach, welche dieser Folgerungen für den praktischen Rechengebrauch besonders nützlich und wichtig sind. Wir wollen also verständige Kenntnis der Gebrauchsregeln vermitteln und den günstigsten Umgang damit.

1.2.1 **Die Gebrauchsregel *Jeder mit Jedem***

⇓ Im Falle der Distributivgesetze findet man die folgende **Gebrauchsform**, die die in (1.2.3) hergeleitete Formel weiter verallgemeinert, wobei erneut das Assoziativgesetz der Addition eingeht:

(1.2.4) Es sei S eine Summe aus k Summanden, $S = a_1 + a_2 + ... + a_k$ und T eine Summe aus n Summanden also $T = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Dann gilt für das Produkt $S \cdot T$ die folgende Beziehung:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k) \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_1 \cdot x_2 + ... + a_k x_n.$$

Welche Beiträge stehen als Summanden auf der rechten Seite? Alle überhaupt möglichen Produktkombinationen von a-s mit x-en der linken Seite. Als Gedächtnisstütze: *Jeder mit jedem.* Also jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten, was insgesamt $k \cdot n$ Beiträge gibt, die man in einer sinnvollen Reihenfolge auf der rechten Seite der Gleichung angeben sollte. (Begründung: Kommutativgesetz für +, so dass jede Reihenfolge zulässig ist.)
(1.2.5) Entsprechend kann man jetzt Produkte aus drei Faktoren umformen. Zunächst bezeichnen wir den Ausdruck der rechten Seite von (1.2.4) mit P. Weiter setzen wir zusätzlich $U = y_1 + y_2 + ...y_p$. Dann gilt für das Dreierprodukt $S \cdot T \cdot U = (S \cdot T) \cdot U = P \cdot U$. Hierfür benutzen wir die Formel (1.2.4) und finden

$$S \cdot T \cdot U = a_1 x_1 y_1 + a_1 x_1 y_2 + a_1 x_1 y_p + ... + a_k x_n y_p.$$

Die ausgelassenen angedeuteten Beiträge können erneut mit dem Schlagwort *jeder mit jedem* charakterisiert werden, wobei jetzt jedes a mit jedem x und jedem y als Produkt zu verbinden ist. Insgesamt $k \cdot n \cdot p$ Möglichkeiten.

☐ Das folgende Produkt läßt sich nach der Regel *Jeder mit Jedem* berechnen:

$$(a + b + c)(u + v + w)(x + y + z).$$

Beschreiben Sie verbal die entstehenden Summanden. Wieviel Summanden gibt es? Wieso ist es günstig, zu indizieren? Also folgenden Ausdruck zu betrachten:

$$(a_1 + a_2 + a_3)(u_1 + u_2 + u_3)(x_1 + x_2 + x_3) \quad ?$$

! Diese Gebrauchsregel ist es, mit der man i.a. arbeitet, um weitere allgemeingültige Formeln und Umformungen zu erzeugen. Dabei werden dann noch je nach Bedarf zusätzliche Grundregeln wie Assoziativgesetz und Kommutativgesetz angewandt.
(1.2.6) Beispiel: Der Term $(a + b + c)^3$ soll distributiv umgeformt werden. Nach unserer Zählung gibt das bereits $3^3 = 27$ Summanden, von denen man aber zahlreiche unter Nutzung des Kommutativgesetzes (für die Addition +) zusammenfassen kann. Wir bestimmen zunächst $(a+b+c)^2$ zu

$$S^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Beachten Sie Anordnung und Struktur! ab nicht ba usw. Jetzt multiplizieren wir mit dem dritten Faktor. Das gibt 3 Serien, deren Beiträge wir so untereinander schreiben, dass wir am Ende leicht Bilanz ziehen können:

$$\begin{aligned} S^2 S \quad = \quad & a^2 a + b^2 a + c^2 a + 2aba + 2aca + 2bca \\ & ... + 2ab^2 + ... + a^2 b + ... + 2acb + b^3 + c^2 b. + 2bcb \\ & +........... + 2ac^2 + ... + a^2 c.. + 2abc + .. + 2bc^2 + b^2 c + c^3 \end{aligned}$$

Zusammenfaßbare Terme stehen untereinander. Wir addieren und finden in sinnvoller Reihung:

$$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc}$$

Beachten Sie die Struktur der rechts stehenden 10 Beiträge.

☐ Rekonstruieren Sie die Rechnungen aus (1.2.3) und (1.2.6).

☐ Berechnen Sie (mit korrektem Untereinanderschreiben):

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^N) = ...$$

und allgemeiner

$$(a - b)(a^N + a^{N-1} b + a^{N-2} b^2 + ... + ab^{N-1} + b^N) = ...$$

(1.2.7) Üblicherweise verwendet man die Distributionsregel *von links nach rechts.* D.h. ein Term der linken Form ist gegeben und man wandelt ihn in den Term der rechten Form um. Aber natürlich ist es auch möglich, von rechts nach links zu arbeiten. Die Ausführung ist dann jedoch meist deutlich schwieriger und in der Regel nicht schematisch ausführbar. Computeralgebraprogramme besitzen einen Befehl des Typs *Factor,* der einem diese Mühe abnimmt.

⇑ Fassen wir zusammen:

> Sinn der Distributivgesetze ist es, über die abgeleitete Gebrauchsregel *jeder mit jedem* und den sinnvollen Umgang mit dieser Regel durch Termeinsetzung neue gültige Formeln wie die soeben hergeleitete zu gewinnen.

⇓ Wir geben einige **Anwendungsbeispiele** unseres Schemas:

1.2.2 **Umformung einer gegebenen Gleichung**

(1.2.8) Beide Seiten einer gegebenen Gleichung werden mit einem weiteren Term multipliziert und **anschließend werden beide Seiten distributiv ausgerechnet.** Genauer: Beide Seiten einer gegebenen Gleichung A=B werden mit einem Faktor F multipliziert, so dass FA=FB entsteht. Dann werden beide Seiten mit Hilfe der Gebrauchsregel ausgewertet.
Die genannte Auswertung erfolgt typischerweise in einem einzigen Schritt. Beispiel: Die nachfolgend gegebene Gleichung soll in diesem Sinne mit $x^2 - 1$ multipliziert werden. Es gilt $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Damit folgt sofort (also **ohne** schriftliche Zusatzrechnung) die zweite angegebene Beziehung (die sich dann noch weiter vereinfachen läßt):

$$\begin{aligned} a + \frac{3}{x-1} &= \frac{x}{x+1} - (x-1) \\ a(x^2-1) + 3(x+1) &= x(x-1) - (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

☐ Setze s=$\frac{1}{2}(a+b+c)$ und $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Das ist die *Heronsche Formel* für den Flächeninhalt F eine Dreiecks mit Seitenlängen a,b und c, auf die wir noch zurückkommen werden. Rechnen Sie jetzt den Ausdruck für F^2 distributiv als Funktion von a,b und c aus. Es entsteht eine einfache und interessante Endform, die man mit S^2 aus (1.2.6) vergleichen sollte. Faktorisieren Sie dann - sofern verfügbar - das Ergebnis mit einem Computeralgebraprogramm.

☐ Beachten Sie unsere Formulierung zur Erzeugung einer neuen gültigen Gleichung:

- "Beide Seiten der Gleichung werden mit F multipliziert."

Das ist etwas anderes als die Regel

- " Jeder Summand (der Gleichung) wird mit dem Faktor F multipliziert.

Begründen Sie die Notwendigkeit dieser Unterscheidung über die Diskussion der folgenden beiden Regeln, von denen die zweite unzulässig ist:

- "Von beiden Seiten der Gleichung wird das Reziproke gebildet."
- Von jedem Summanden (der Gleichung) wird das Reziproke gebildet.

1.2.3 **Gezieltes Ausklammern**

T**(1.2.9)** Eine wichtige auf dem Distributivgesetz basierende Umformungsmethode ist *gezieltes Ausklammern.* Klar ist zunächst, dass das Ausklammern eines gemeinsamen Faktors eine Anwendung unserer Gebrauchsformel darstellt, wobei die Gleichung nur in der anderen Richtung zu lesen ist. Vgl. (1.2.7). Etwa

$$2ab^2x - 3a^2by + 4a^2b^2(x+y) = ab(2bx - 3ay + 4ab(x+y)).$$

(1.2.10) Von rechts nach links gelesen, ist das eine Anwendung unserer Gebrauchsregel. Und das sollte man sich generell als Probe angewöhnen: **Nach Ausklammern (im Kopf) testen, ob Ausmultiplizieren der rechten Seite erneut die linke ergibt!**

☐ $6ax^2 + 12a^2x - 18a^2x^2 = ..(...)$

(1.2.11) Vielfach klammert man nicht Faktoren aus, die überall vorkommen, sondern will einen ganz bestimmten **vorgegebenen** Faktor herausziehen. Sagen wir: In Beispiel (1.2.9) soll der dritte Summand zu einer 1 werden. Dann schreiben wir:

$$2ab^2x - 3a^2by + 4a^2b^2(x+y) = 4a^2b^2(x+y)\left\{\frac{x}{2a(x+y)} - \frac{3y}{4b(x+y)} + 1\right\}.$$

Ausmultiplizieren zeigt die Korrektheit der Umformung. (Zur Technik des Vorgehens: Man muß in jedem Summanden in Gedanken mit den fehlenden Faktoren erweitern. Diese bleiben dann im Zähler oder Nenner stehen. Im ersten Summanden fehlte eine 2, ein a und (x+y) im Zähler.)

☐ Die Rechnungen aus (1.2.8) und (1.2.11) rekonstruieren. (Also die linke Seite aufschreiben, dann rechnen und am Ende das Ergebnis vergleichen, Unterschiede überdenken!)

☐ Klammern Sie so aus, dass die rechts angegebene Form entsteht:

$$\frac{4x^3}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} - \frac{12x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{8}{x}\sqrt{x^2+a^2} = \frac{\cdots}{\cdots\cdot} \text{ [Polynom in x]}$$

Hinweis: Auszuklammern ist $\frac{4}{x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$. **Können Sie eine allgemeine Regel abstrahieren,** so dass die Form der rechten Seite entsteht? Was bringt es, wenn man aus $\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b + \frac{3}{4}c$ den Faktor $\frac{1}{12}$ ausklammert?

☐

$$\sqrt{a^2 - x^2} = |a|\sqrt{.. - ...}$$

☐ Beweisen Sie für $a \neq b$ die folgende Gleichung:

$$a^n + a^{n-1}b + ... + a^2b^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Für a=1 und b≠ 1 ergibt das eine wichtige Formel, die meist unter der Bezeichnung "**endliche geometrische Reihe**" läuft. Wie sieht diese Formel aus? ("Herleitung einer wichtigen gültigen Gleichung"). Dasselbe für a=1 und b=-x und a=1 und b=x^2.

☐ Welche Grundregeln (für das Zahlrechnen) werden neben den Distributivgesetzen in der folgenden Rechnung angewandt:

$$a + [2(x-3a) + 4a] = 5a + 2x - 6a = 2x - a$$

Sehen Sie u.U. in einer Formelsammlung oder einem Schulbuch nach!

Kap. 1.3: **Der Binomialsatz**

Mathematik besteht nicht nur aus schematischer Anwendung von Lösungsprozeduren. ***Kreative Leistungen*** *sind durchaus gefragt, wobei die Mathematik auch hierfür nützliche Hilfen bereitstellt. In diesem Teil suchen wir nach einer neuen Formel und neuartigen Anwendungen derselben.*

Bei der Herleitung der Formel begegnen wir einem anderen wichtigen Sachverhalt: Die Wahl günstiger ***Bezeichnungen*** *zum richtigen Zeitpunkt ist in der Mathematik ausgesprochen wichtig.*

(1.3.1) Durch mehrfaches Anwenden der Gebrauchsform des Distributivgesetzes samt Vereinfachung der dabei entstehenden Ausdrücke über Zusammenfassen erhält man die *Binomialformel*, eine Umrechnungsformel für den Ausdruck (a+b)^n für n=1,2,3,.... Einerseits ist die Formel selbst sehr nützlich und andererseits der Weg zu dieser Formel lehrreich.

(1.3.2) Um zu sehen, worum es geht, rechnen wir die ersten Fälle in n (n=2,3,4) konkret aus. Für n=2 finden wir zunächst $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Und für n=3 folgt $(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Weitere Rechengesetze für die reellen Zahlen wurden benutzt. (Welche?) In der Endform haben wir uns um eine Übersicht stiftende Anordnung bemüht. Die ersten 4 Formeln lauten:

$(a+b)^1$	$=$	$1a^1b^0 + 1a^0b^1$
$(a+b)^2$	$=$	$1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$
$(a+b)^3$	$=$	$1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$
$(a+b)^4$	$=$	$1a^4b^0 + 4a^3b^0 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + 1a^0b^4$
$(a+b)^5$	$=$	$1a^5b^0 + ...a^4b^1 + ...a^3b^2 + ...a^2b^3 + ...a^1b^4 + ...a^0b^5$

Dabei kann man (a+b)^4 entweder über (a+b)$^2(a+b)^2$ oder über (a+b)(a+b)^3 auf bereits berechnete Formeln zurückführen. Offensichtlich läßt sich die Berechnung auf diese Weise fortführen, wobei jedoch der Aufwand rasch wächst.

(1.3.3) Man kann unserem Bild nicht entnehmen, wie es genau weitergeht, aber man kann ihm Teilinformationen entnehmen: So läßt sich ziemlich sicher sagen, welche a-b-Potenzen jeweils auftreten werden. Für n=5 haben wir das bereits getan. Die auftretenden Potenzen lassen sich zusammenfassen zu $a^{5-k}b^k$ mit k=0,1,2...,5. Und für allgemeines n erwarten wir die Ausdrücke $a^{n-k}b^k$ mit k=0,1,...,n. Das sind n+1 Stück. Stets gilt für die Exponenten $(n-k)+k=n$. D.h. **die Summe der beiden Exponenten ist n**. Hiermit kann man sich die auftretenden Beiträge leicht verschaffen.

☐ Testen Sie das für n=5. Ergänzen Sie n=6. Welche der (fehlenden) Zahlkoeffizienten lassen sich über das Schema bereits raten?

(1.3.4) Die Situation ist wie in einem Kriminalroman: Jede zusätzliche Teilinformation bringt uns dem Täter näher. Welche Information fehlt uns noch? Es fehlen die in der letzten Zeile durch ... angedeuteten (natürlichen) Zahlen, die durch das Zusammenfassen gleichartiger Beiträge entstehen und die offensichtlich ein härteres Problem bilden. In einer solchen Situation ist es wichtig, den erreichten Stand dadurch festzuhalten, dass man dem Fehlenden einen Namen gibt. Dieser Name sollte hier durch die zugehörige Stelle im Formelschema, also durch das Zahlenpaar (n,k) vollständig festgelegt sein. $(a+b)^n$ bestimmt n und der gewählte Summand $a^{n-k}b^k$ legt k fest. Wir **bezeichnen** diese Zahlen mit $\binom{n}{k}$, gelesen "n-über-k". Im englischsprachlichen Bereich schreibt man auch gerne C(n,k) oder C$_{nk}$ oder Ähnliches. Allgemein nennt man diese Zahlen aufgrund ihrer Herkunft *Binomialkoeffizienten.*

Für n=2 haben wir $\binom{2}{0}=1$, $\binom{2}{1}=2$ $\binom{2}{2}=1$. Mit dieser Bezeichnung lautet die Formel

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2.$$

☐ Formulieren Sie die entsprechenden Gleichungen für n=3 und n=4.

(1.3.5) Beachten Sie das mathematiktypische Vorgehen: Wir sind sicher, dass es diese Zahlen gibt und dass es sich um natürliche Zahlen handelt (Begründung? Wieso keine Brüche?). **Also geben wir ihnen einen**

Namen, bezeichnen sie. Und nun können wir versuchen, Bedingungen (für die bezeichneten Größen) zu finden und mathematisch zu formulieren, mit deren Hilfe man die Binomialkoeffizienten am Ende auch bestimmen kann.
Inspizieren wir die Formeln für n=2,...,5, so sehen wir, dass jeder Summand die Form $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ hat, das ist der allgemeine k-te Beitrag. Damit läßt sich die gesuchte Binomialformel für beliebiges n bereits hinschreiben:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.}$$

Und das ist eine **zu merkende Formel**!

? Nur unser bisheriges Wissen zum Wert der Binomialkoeffizienten ist unbefriedigend. Wir können sie noch nicht auf einfache allgemeine Weise berechnen.

⇓ **(1.3.6)** Eine erste Lösungsidee besteht darin, das Vorgehen für die untersten Fälle zu imitieren. Also auf $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$ unsere allgemeine Formel einmal für n+1 und einmal für n anzuwenden und die rechte Seite sodann distributiv (jeder mit jedem!) auszumultiplizieren. Im Ergebnis nehmen wir Koeffizientenvergleich (für gleiche Potenzen a$^k b^{n+1-k}$) vor. Das ergibt folgende bekannte und wichtige Formel

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.}$$

☐ Führen Sie die beschriebene Rechnung aus. (Denken Sie dabei an die Ratschläge zur Bilanzierung aus (1.2.6)!)

(1.3.7) Hierdurch erhält man die übliche Methode des *Pascalschen Dreiecks* zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten, mit deren Hilfe man problemlos etwa die fehlenden Koeffizienten für n=5 bestimmt. Ebenso liegt es nahe, n=0 zu ergänzen und $\binom{n}{k} = 0$ zu setzen, für k<0 oder k>n. Es folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

(1.3.8) Die in (1.3.6) gegebene Formel ist eine *Rekursionsformel.* Mit ihrer Hilfe kann man die Binomialkoeffizienten für n+1 bestimmen, sofern man die für n bereits kennt.
Der Nachteil: Angenommen wir benötigen $\binom{100}{50}$. Nur diese eine Zahl. Müssen wir dann den größten Teil der Vorgängerschar bis 49 wirklich vorab berechnen? Das sieht unangenehm aus. Besser wäre, anstelle der Rekursionsformel über eine *explizite Formel* $\binom{n}{k}$ = ... zu verfügen, in der rechts ein Ausdruck steht, den man direkt mit Hilfe von n und k berechnen kann.
(1.3.9) Hat man das Problem einmal derart präzisiert, läßt es sich mit etwas Arbeit auch lösen! Nach einigem Probieren findet - rät - man die folgende Formel:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} [n]_k = n\cdot(n-1)\cdot ....\cdot(n-k+1) & \text{k Faktoren. } [n]_0 = 1 \\ \text{und } k! = 1\cdot 2\cdot ....\cdot k & 0! = 1 \end{array}}$$

(Dazu: Zuerst mit Hilfe der Rekursion die Koeffizienten für weitere n ausrechnen. Vielleicht bis n=10. Was bedeutet festes k im Schema? Man beginnt mit k=0 und k=1. Dann versucht man k=2 zu erraten. Ist die zugehörige Formel gefunden, geht es relativ leicht weiter. Erneut haben wir eine abkürzende Bezeichnung nämlich $[n]_k$ eingeführt. Dies Objekt nennt man auch *Pochhammersymbol.* Woher kennen Sie es bereits? Denken sie an das Ableiten von y=x^n!)
Hiermit berechnet man sofort konkrete Binomialkoeffizienten. Etwa

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10 \quad \text{oder} \quad \binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252.$$

Wenn Sie Lust haben, können Sie jetzt auch

$$\binom{100}{50} = \frac{[100]_{50}}{50!} = 10089\,13445\,45564\,19333\,48124\,97256$$

! nachrechnen. **Damit verfügen wir zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten sowohl eine über Rekursionsformel wie auch über eine explizite Formel.**

☐ Zeigen Sie, dass die explizite Formel die Werte für die untersten n korrekt angibt. Verifizieren Sie weiter, dass die Werte der expliziten Formel die Rekursionsformel erfüllen. **Wieso ist damit bewiesen, dass die explizite Formel die Binomialkoeffizienten -alle- korrekt wiedergibt.** (Was ist mit den Fällen k<0 und k>n?) Diese Frage enthält den mathematiküblichen, von uns hier ausgelassenen Beweisteil.

☐ Üblicherweise wird eine andere explizite Formel angegeben, die nur Fakultäten enthält. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ gilt, wobei die linke Seite nach der Formel aus (1.3.9) zu berechnen ist.Die neue Formel enthält viele kürzbare Faktoren. Mit dieser Formel folgt sofort $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Was besagt das im Pascaldreieck?

> ⇑ Damit ist die Binomialformel vollständig bestimmt. Unser Vorgehen, eine unbekannte Größe zunächst sinnvoll zu bezeichnen und dann mit dem bezeichneten Objekt mathematisch zu arbeiten, hat sich bewährt.

(1.3.10) Auch in der Formel des Binomialsatzes können wir Termeinsetzungen vornehmen. Hier sind sogar einige rein numerische Einsetzungen nützlich. Wählt man etwa a=b=1, so entsteht die folgende interessante Formel, deren Gültigkeit man für kleine n sofort über das Pascalsche Dreieck testet:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{k} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

☐ Was ergibt sich etwa für n=4 und a=2^x und b=2^{-x}? Was für allgemeines n und a=1 und b=x^2?

☐ Was ergibt sich für $(1+2x)^n$ und für $(x+\frac{1}{x})^{2n}$?

☐ **(1.3.11)** Und noch ein kreativ spekulativer Abschluß: Bisher mußte n eine natürliche Zahl sein. Es gilt aber auch $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Das ist unser Binomialausdruck für $n = \frac{1}{2}$. Unsere **Herleitung** versagt für diesen Fall. Aber wie steht es mit dem **Endergebnis**? Benutzen Sie die in (1.3.9) gegebene explizite Formel der Binomialkoeffizienten und beachten Sie, dass bei ganzzahligem n automatisch $\binom{n}{k} = 0$ für k>n gilt, so dass man über alle $k \geq 0$ summieren kann. Damit ist natürlich nicht **bewiesen,** dass das Resultat korrekt ist. Das muß auf andere, hier nicht zu diskutierende Weise geschehen. Was geht schief, wenn man die übliche Formel für die Binomialkoeffizienten mit den Fakultäten verwendet? Dasselbe für $(1+x)^{-1}$.

☐ Zwei Formeln sind zum Stichwort "Binomialsatz" unbedingt zu merken. Welche beiden sind das?

☐ Beweisen Sie die folgende in (6.3.75) benötigte Umformung:

$$P^2 + x^2((1-x^2) - P^2)^2 = (P^2 + x^2)((1-x^2)^2 + x^2 P^2).$$

Links den Binomialsatz auf $(1 - (x^2 + P^2))^2$ anwenden und umstellen, so daß man $P^2 + x^2$ ausklammern kann!

Kap.1.4: **Bruchrechnung**

Sicherer und verständiger Umgang mit Brüchen ist für eine Vielzahl mathematischer Manipulationen wichtig, bereitet jedoch Anfängern erfahrungsgemäß teilweise erstaunliche und reproduzierbare Schwierigkeiten. Auch die Computeralgebraprogramme können das zugehörige Verständnis nicht ersetzen. Überdies lassen sich mit Hilfe der Brüche weitere wichtige mathematische Vorgehensweisen illustrieren.

(1.4.1) Was ist ein Bruch, etwa $\frac{7}{5}$ oder $\frac{ab}{a+b}$? Hierauf sollte man eine sinnvolle Antwort geben können und die sollte so sein, dass sie einem weiterhilft, wenn man bei einer Rechnung, im Zusammenhang mit Brüchen in Schwierigkeiten gerät. Es wird hier nicht gefragt, wie man selbst in der Schule Bruchrechnung erlernt hat. Gefragt ist nach einer **mathematischen Definition:**

⇒ ! T	Es seien a und b zwei ganze Zahlen mit b$\neq$ 0. Dazu bilden wir die Bestimmungsgleichung bx=a. Dann hat diese Gleichung eine eindeutig bestimmte rationale Lösung. Diese Lösung wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet. a wird der *Zähler,* b der
	Nenner des Bruches genannt. Als gültige Gleichung: $\boxed{b\cdot\frac{a}{b}=a}$

(1.4.2) Eine solche Definition verlangt - sobald man ihre Bedeutung erkannt hat - sorgfältige, ja angestrengte **Inspektion**. Auch in unserem Fall sind eine Reihe von Punkten wahrzunehmen und geistig zu verarbeiten.

1. Formal werden zwei Zahlen a und b eingegeben und eine eindeutig bestimmte weitere Zahl kommt heraus. Für diese haben wir eine Bezeichnung, auch dann, wenn wir die Zahl selbst noch nicht genau kennen. Ein und dieselbe Zahl kann verschiedene Bezeichnungen haben, wie $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{54}{27}$ zeigt, kann also Lösung verschiedener Gleichungen sein.
   In symbolischer Schreibweise $(a,b)\mapsto\frac{a}{b}$. Der Pfeil $\mapsto$ wird "wird zugeordnet" gelesen.

2. Die Zahlen dürfen nicht beliebig sein. Oben wurden a und b als ganze Zahlen vorausgesetzt. Das kann problemlos verallgemeinert werden zu "a und b reell". Damit wären auch Ausdrücke wie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $\frac{\pi}{\left(\frac{3}{2}\right)}$ erklärt.

   Letzteres gehört zu der Gleichung $\frac{3}{2}x=\pi$. Mathematisch ist es unzweckmäßig, meist unökonomisch, ohne guten Grund eine Definition nicht möglichst allgemein anzusetzen. In unserem Fall ist " a und b reell " die angemessene Allgemeinheitsstufe. Dazu sollte man nur beachten, dass bei spezieller Wahl von a und b auch das Ergebnis spezieller wird. Bei a und b ganz (ganze Zahlen) wird $\frac{a}{b}$ rational. Generell ist $\frac{a}{b}$ nur reell.

3. Nicht fortlassbar ist die zweite Bedingung $b\neq 0$. An dieser Stelle sollte man erkennen und sich einprägen, dass in der Gleichung bx=a eine Umkehrung der Reihenfolge im Eingabepaar (a,b) stattfindet. Der dahinplätschernde menschliche Gedankenstrom hat immer die Tendenz, Reihenfolgen beizubehalten. Das kann rasch zu Problemen führen.

4. Nochmals: Hat man Schwierigkeiten mit einem Bruch, sollte man notfalls zur definierenden Gleichung übergehen mit Hilfe des Wissens: $\frac{a}{b}$ ist Bezeichnung der Lösung der Bestimmungsgleichung bx=a.

(1.4.3) Im Falle der Distributivgesetze haben wir zwischen (besonders einfachen) Grundregeln und praktischen Rechenregeln unterschieden. Das können wir hier auch tun. Als Grundregeln können wir beispielsweise die folgenden 4 Regeln wählen, die in der Gleichungsinterpretation sehr gut einzusehen sind:

(1)	(2)	(3)	(4)
$\frac{a}{a}=1$	$\frac{a}{1}=a$	$\left(\frac{a}{n}\right)+\left(\frac{b}{n}\right)=\frac{a+b}{n}$	$\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{d}\right)=\frac{ab}{cd}$

☐ Rechtfertigen Sie diese Regeln mit Hilfe der Gleichungsinterpretation!

T **(1.4.4)** Die eingeführten Klammern stellen sicher, dass man den genauen Rechenweg ablesen kann. Andererseits machen zu viele Klammern die Ausdrücke unübersichtlich und die Schreibarbeit aufwendig. Daher

führt man vielfach *Klammerersparnisregeln* ein, hier die bekannte Regel *Punktrechnung vor Strichrechnung.* Damit vereinfachen sich (3) und (4) sofort zur üblichen Form.
(1.4.5) Die eigentlichen Rechenregeln lassen sich jetzt wieder aus den Grundregeln beweisen, rein logisch herleiten. Alternativ kann man sie auch erneut über die Gleichungsdefinition erschließen. Für die auftretenden Buchstaben dürfen beliebige reelle Zahlen oder Zahlterme eingesetzt werden, sofern die Nenner nie Null werden. Später werden wir sehen, dass man auch andere, allgemeinere Objekte einsetzen möchte: komplexe Zahlen, Matrizen, Polynome, Funktionen usw. Dann muß man versuchen, die jetzigen Schlüsse verständig auf die neue Situation zu übertragen.
(1.4.6) Gewöhnlich kommt man mit den folgenden vier Rechenregeln aus, die wir sofort mit **Klammerersparnis** schreiben. Nur bei Doppelbrüchen wie (6) oder (8) sollte man vorsichtig sein und sich nicht zu sehr auf die *Länge der Bruchstriche* verlassen.Denn $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ und $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ ergeben keineswegs dasselbe.

(5)	(6)	(7)	(8)
$\frac{a}{b} = \frac{\alpha a}{\alpha b} \quad \alpha \neq 0$	$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x \quad x \neq 0$

⇓ Wir besprechen nachfolgend drei Anwendungen der Bruchrechnung, also Nutzung dieser Gebrauchsregeln.

1.4.1 Hauptnennerbildung

(1.4.7) Regel (7) läßt sich naheliegend auf mehr als 2 Summanden verallgemeinern. Überdies ist (7) dahingehend zu verbessern, dass der Hauptnenner nicht immer das Produkt der Einzelnenner ist, sondern nur das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner. Hierzu bringt man (7) besser in eine operativ verbale Form:

(7′)	Erweitere jeden Summanden genau mit den fehlenden Faktoren, die nicht in sämtlichen beteiligten Nennern vorkommen.

Eventuell sollte man gemeinsam vorkommende Faktoren auch **vorab ausklammern**. Ein Beispiel einer Hauptennerbildung:

$$\frac{5a+7b}{27a^2b^2} - \frac{3}{9ab^2} + \frac{11}{18a^2b} = \frac{2(5a+7b) - 3(6a) + 11(3b)}{2 \cdot 27a^2b^2} = \frac{-8a+47b}{54a^2b^2}.$$

(1.4.8) Gewöhnen Sie sich folgendes arbeitsökonomisches Prinzip an: **Bei schematischen Rechnungen zunächst die Form und alles Gesicherte hinschreiben.** Danach (geistig entlastet) mit der eigentlichen Arbeit beginnen. Hier also zunächst den Hauptnenner bestimmen und unter einen ausreichend langen Bruchstrich hinschreiben: $\frac{1}{Hauptnenner}$. Dann termweise die Erweiterungen vornehmen und den Zählerbeitrag aufschreiben. Damit ersparen Sie sich viel Ärger. Obige Rechnung ist so entstanden.
Jetzt dieselbe Rechnung mit vorherigem Ausklammern:

$$\begin{aligned} \frac{5a+7b}{27a^2b^2} - \frac{3}{9ab^2} + \frac{11}{18a^2b} &= \frac{1}{9ab}\left\{\frac{5a+7b}{3ab} - \frac{3}{b} + \frac{11}{2a}\right\} \\ &= \frac{1}{9ab}\left\{\frac{2(5a+7b) - 3 \cdot 6a + 11 \cdot 3b}{6ab}\right\} \end{aligned}$$

Hier ist $\frac{1}{9ab}\{...\}$ zunächst gesichert, also zuerst hinzuschreiben, dann $\frac{1}{9ab}\left\{\frac{...}{6ab}\right\}$ usw.
(1.4.9) Beachten Sie: Im soeben behandelten Beispiel geht es in erster Linie nicht darum, das Beipiel selbst nachzurechnen. Das ist nur ein Nebenzweck. **Hauptanliegen** ist, eine nützliche Schreib- und Arbeitstechnik zu vermitteln. Und das wurde am Beispiel für die Hauptnennerbildung mit verdeutlicht.

☐ Wie wird man diese Arbeitstechnik ("zunächst Form und Gesichertes....") beim Stichwort *gezieltes Ausklammern* verwenden?

☐ Der Hauptnenner ist nicht immer einfach "das Produkt aller beteiligten Nenner". Wieso? Beispiel!

1.4.2 **Beseitigung von Doppel- und Mehrfachbrüchen**

(1.4.10) Damit ist nicht gemeint, $\frac{2}{7}$ durch 0.28571 zu ersetzen oder $\frac{\pi}{2}$ durch 1.5708. Derartiges sollte man nur machen, wenn ein besonderer Grund vorliegt. Gemeint ist, dass man in den allermeisten Fällen eine Endform der Gestalt $\frac{a}{b}$ mit möglichst einfachen Termen a und b anstreben sollte. Per Hauptnennerbildung beseitigt man mehrere additive Brüche und per Doppelbruchregel Mehrfachbrüche. Einige Beispiele für die Endformbildung:

$\frac{\frac{a}{b}-2}{\left(\frac{4}{a+2b}\right)} = \frac{a^2-4b^2}{4b}$	$\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}{xy} = \frac{\left(\frac{y+2x}{xy}\right)}{xy} = \frac{y+2x}{x^2y^2}$	$\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

In Computeralgebraprogrammen findet man Befehle wie *simplify,* die derartige Endformbildung leisten. Rekonstruieren Sie die Rechnungen.

□ In Ausdrücken wie dem nachfolgenden kann man entweder zuerst Hauptnenner bilden und dann die Doppelbrüche beseitigen oder man kann die umgekehrte Reihenfolge wählen.

$$\frac{b}{\left(\frac{a+b}{2a}\right)} + \frac{3-a}{\left(\frac{a-b}{3b}\right)} = ...$$

Meist ist eine bestimmte Reihenfolge vorzuziehen. Welche ist das in unserem Beispiel? Was ergibt sich?

1.4.3 **Bruchgleichungen**

(1.4.11) Tritt bei einer Bestimmungsgleichung eine Unbestimmte im Nenner auf, versucht man, diesen Zustand durch geeignete Gleichungsumformungen zu beenden. Und zwar in der Regel als Erstes. Dabei wird man Hauptnennerbildung und das Beseitigen von Doppelbrüchen einsetzen. Hinzu kommen typische Gleichungsumformungen wie Multiplikation mit dem Hauptnenner und Bildung des Kehrwertes für beide Gleichungsseiten.

(1.4.12) Kurz, man muß mehrere Techniken zusammenführen und gezielt einsetzen. Nochmals: **Ziel ist, die Unbestimmten aus dem Nenner herauszubekommen**. Im nachfolgenden Beispiel sind keinerlei zusätzliche schriftliche Rechnungen ausgelassen:

$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-4} = 5$	x gesucht.
$(x-4) + 3(x-2) = 5(x-2)(x-4)$	Multiplikation mit dem Hauptnenner
$4x - 10 = 5(x^2 - 6x + 8)$	Vereinfachen
$5x^2 - 34x + 50 = 0$	Quadratische Gleichung
$x^2 - \frac{34}{5}x.....$	Usw.

(1.4.13) Allzuhäufig werden unzulässige Umformungen benutzt, um die Unbestimmten aus dem Nenner herauszubekommen. Es finden sich Rechnungen der folgenden Art:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{x-a} + \frac{2}{3(x-b)} = \frac{1}{x} \\ (x-a) + \frac{3}{2}(x-b) = x \\ x = \frac{2}{3}(a+b) \end{array}}$$

□ Kommentieren Sie den Übergang von der ersten zur zweiten Zeile. Welche **unzulässige, falsche** Bruchrechnungsregel wurde benutzt? (Vgl. die Frage aus (1.2.8)) Was den Rechenaufwand betrifft, würde diese Regel das Leben tatsächlich sehr erleichtern! Was ergibt eine korrekte Rechnung für das Beispiel?

□ Reproduzieren Sie die Rechnung aus (1.4.12).

Kap. 1.5: **Quadratische Gleichungen**

Wichtige Formeln sollten nicht isoliert gesehen werden. Wenn wir propagieren, wichtige Formeln auswendig zu wissen und zu beherrschen, meinen wir damit, dass man in der Lage ist, an die Formel jederzeit eine Vielzahl weitergehende Leistungen anzuschließen - die einzuschlagende Denkrichtung ohne langes Nachdenken und Nachschlagen verfügbar zu haben. Wir illustrieren ein solches ***Formelumfeld*** *am Beispiel der p-q-Formel für quadratische Gleichungen.*

1.5.1 **Äußere Parameter**

(1.5.1) Einen Rechenausdruck wie $3x^2+5x-7$ nennt man ebenso wie $5-x-x^2$ einen *quadratischen Term (in der Variablen x).* Auch $\frac{1}{2}t^2+5t-\frac{13}{7}$ ist ein quadratischer Term (in der Variablen t) ebenso wie $(t-5)(t+3)$. Ein Term wie $\frac{2}{t^2}+5t-13$ dagegen ist **nicht** quadratisch.
(1.5.2) Versuchen wir einmal aus diesen Beispielen zu abstrahieren, was unter einem *quadratischen Recheausdruck* verstanden werden soll. Die ersten beiden Beispiele verallgemeinern sich unmittelbar zu dem Ausdruck: Ax^2+Bx+C. Und die letzten beiden Beispiele verlangen als endgültige Definition:

T **Ein *quadratischer Term* in x ist ein Rechenausdruck, den man durch Termumformung auf die angegebene Gestalt Ax^2+Bx+C bringen kann, wobei A** $\neq 0$ gilt.

Als Rechenausdrücke sind (t-3)(t+3) und t^2-9 zu unterscheiden, auch wenn man sie ineinander umwandeln kann..
(1.5.3) Die Buchstaben, die in Ax^2+Bx+C auftreten, haben einen unterschiedlichen Charakter: Für A,B und C dürfen bzw. müssen wir **zunächst** Zahlen einsetzen. Allerdings sollte dabei $A\neq 0$ gelten. Erst das Ergebnis des Einsetzens ist ein quadratischer Term in der Variablen x. Würden wir umgekehrt mit At^2+Bt+C starten, so würden wir durch entsprechende Einsetzungen quadratische Ausdrücke in t erhalten. Nochmals: Erst wenn für A, B und C Werte eingesetzt sind, erhält man ein Objekt der gewünschten Art, das immer noch einen allgemeinen Buchstaben enthält, die Variable x.

☐ Wie wird allgemein ein *quadratischer Ausdruck* ***in den Variablen x und y*** aussehen?

(1.5.4) Zu jedem quadratischen Ausdruck q(x) mit spezifizierter Variabler x gehört ein *quadratisches Polynom*, also eine Zuordnung $x\mapsto q(x)$. Kann man zwei (verschiedene) quadratische Ausdrücke durch Termumformungen ineinander umwandeln, so führen beide zu demselben Polynom. Etwa $x\mapsto(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$. Man sagt dann auch, dass das Polynom in eine andere Form gebracht wird. Zwei ineinander umwandelbare quadratische Terme ergeben dasselbe quadratische Polynom. Zum Begriff der Zuordnung s. Kap.3.1a.
(1.5.5) Mit jedem quadratischen Ausdruck kann man eine Reihe mathematischer Operationen durchführen: Die Nullstellen (der zugehörigen quadratischen Gleichung) bestimmen, den Ausdruck in Scheitelpunktsform bringen usw. Die zugehörige Rechnung kann man entweder für jeden vorliegenden quadratischen Term gesondert ausführen oder man kann versuchen, die Rechnung *allgemein* auszuführen. Was heißt das genauer? Nun, hat man ein spezielles Problem zu lösen, geht man nach geeigneter Festlegung von A, B, C zum allgemeinen Ausdruck Ax^2+Bx+C über, versucht das Problem hierfür allgemein (für jede Wahl von A,B und C) zu lösen und zwar in der Weise, das man im Endergebnis nur die entsprechenden Werte für A,B,C einsetzen muß, **um die korrekte Lösung für den zugehörigen quadratischen Ausdruck zu erhalten.** Gelingt das, so haben wir durch die eine ausgeführte allgemeine Rechnung gleichsam unendlich viele Rechnungen auf einen einzigen Schlag ausgeführt!
(1.5.6) Ein Beispiel: Für die quadratische Gleichung $x^2+23x-17=0$ sollen die Lösungen, die Nullstellen bestimmt werden. Mit $p=23$ und $q=-17$ gehen wir zur allgemeinen Form $x^2+px+q=0$ (in der Unbestimmten x) über. Für diese erhalten wir durch eine einzige Rechnung die Lösungsformel

$$\boxed{x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad \text{die } p\text{-}q\text{-Formel}}$$

Setzt man hierin die ursprünglichen Werte von p und q ein, so erhält man unmittelbar die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Gleichung. Wir haben ein Resultat, das auf einen Schlag das Ergebnis unendlich vieler konkreter Rechnungen liefert. Zur Schreibweise: Es liegen 2 Gleichungen vor, eine zum Index 1 mit dem "+" und eine zu 2 mit dem "-".Das bedeutet, dass man bei Umformungen $-x_{1,2}=-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\dots}$ hat. Obwohl in der Schule dies Schreibweise offenbar teilweise "verboten" wird, sollte man sie und ähnliche Abkürzungen verwenden. Meist schreibt man sogar x_{12} statt $x_{1,2}$.

☐ Leiten Sie die allgemeine p-q-Formel mit Hilfe der Methode der quadratischen Ergänzung her. (**Eine** allgemeine Herleitung genügt! Dann sollte man das Ergebnis, also die p-q-Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen verwenden, nicht jeweils neu die gesamte quadratische Ergänzung!)

(1.5.7) Im Zusammenhang mit (1.5.5) ist folgender Sachverhalt wichtig: Angenommen wir erhalten die Aufgabe, für die quadratische Gleichung $y^2 + 4xy - 3x^2 = 0$ die Nullstellen zu bestimmen. Dann fehlt Information. Wir wissen nicht, nach welchem Buchstaben wir auflösen müssen und für welchen Buchstaben wir vorab Werte einsetzen sollen. Die Situation verlangt, dass wir dies genauer spezifizieren. Suggestiv: Wir müssen festlegen, **welche Rolle die einzelnen Buchstaben des Termes in der speziellen anstehenden Aufgabe oder Rechnung spielen sollen**.

T Wir sagen: Ein Buchstabe (eines Rechenausdrucks) erhält in einer bestimmten Situation **die Rolle eines äußeren Parameters**, wenn jede Wahl dieses Paramters ein Problem des zu behandelnden Typs ergibt. (Bitte genau lesen und merken!)
So ergibt jede Wahl der äußeren Parameter p und q in $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Bestimmungsgleichung!
Setzt man in das (allgemein bestimmte) Endresultat für den äußeren Parameter einen Wert ein, so erhält man die Lösung des zugehörigen Problems.
Kurz: Zu jedem Wert eines äußeren Parameters gehört ein eigenes Problem, das sich auch mit diesem festgelegten Wert konkret rechnen läßt.

(1.5.8) Im oben besprochenen Fall des allgemeinen quadratischen Ausdrucks erhalten A,B und C in $Ax^2 + Bx + C$ die Rolle äußerere Parameter, wogegen x die Rolle der Veränderlichen erhält. Für $y^2 + 4xy - 3x^2 = 0$ muß man festlegen, ob x oder y die Rolle eines äußeren Parameters übernehmen soll. Die jeweiligen Lösungsformeln sind dann unterschiedlich:

$$\boxed{y_{1,2} = -2x \pm \sqrt{7x^2} - 2x \pm \sqrt{7}\,|x| \quad \text{bzw.} \quad x_{1,2} = -\tfrac{2}{3}y \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{7y^2} = ...}$$

Gibt man entsprechend in einem Computeralgebraprogramm obige Gleichung ein und fordert man die Lösung an, so wird man nach der Variablen (bezüglich der zu lösen ist) gefragt. Beachten Sie: Man kann nie sagen: *Dieser Buchstabe ist (gleichsam per Geburt) äußerer Parameter.* Immer nur: *Für die anstehende Aufgabe erhält er die Rolle eines äußeren Parameters!*

☐ Erläutern Sie den Unterschied zwischen "qudratischem Rechenausdruck" und "quadratischem Polynom" kurz am Beispiel (x-3)$^2 = x^2 - 6x + 9$.

⇓ Nach dieser begrifflichen Vorbereitung wenden wir uns dem benötigten **Grundwissen zu den quadratischen Ausdrücken** zu, das sich um die p-q-Formel herum aufbaut.

1.5.2 Unterschiedliche Formen eines quadratischen Polynoms

(1.5.9) Ein und dasselbe quadratische **Polynom** kann in unterschiedlichen Formen auftreten. Häufig muß man dann die zugehörigen quadratischen **Rechenausdrücke** ineinander umwandeln, weil die Problemsituation eine bestimmte Endform verlangt. Wir stellen kurz die wichtigsten dieser Formen zusammen. Wichtig ist immer, die Variable und eventuelle äußere Parameter auseinander zu halten.:

Rechenausdruck	äußere Parameter	Bezeichnung
$Ax^2 + Bx + C$	$A, B, C,\ A \neq 0$	allgemeine Form
$A(x^2 + px + q)$	A, p, q	Normalform
$A(x - x_1)(x - x_2)$	A, x_1, x_2	Linearfaktorform
$A(x - a)^2 + b$	A, a, b	Scheitelpunktsform

(1.5.10) Meist hat man es mit folgender Problemsituation zu tun: Das Polynom liegt zunächst in der allgemeinen Form vor. Diese erhält man typisch im Rechenablauf. Man soll den Ausdruck umwandeln in eine der anderen Formen. Die Normalform etwa erhält man durch Ausklammern von A. Das bedeutet $p = \frac{B}{A}$ und $q = \frac{C}{A}$. Jetzt sind p und q Hilfsgrößen, die man mit Hilfe der ursprünglichen drei äußeren Parameter ausdrücken kann.

Hat man die Normalform, dann kann mit Hilfe der p-q-Formel die beiden Nullstellen x_1 und x_2 bestimmen. Das gibt die Linearfaktorform. Nimmt man in der Normalform eine quadratische Ergänzung vor, so folgt schließlich die Scheitelpunktsform.

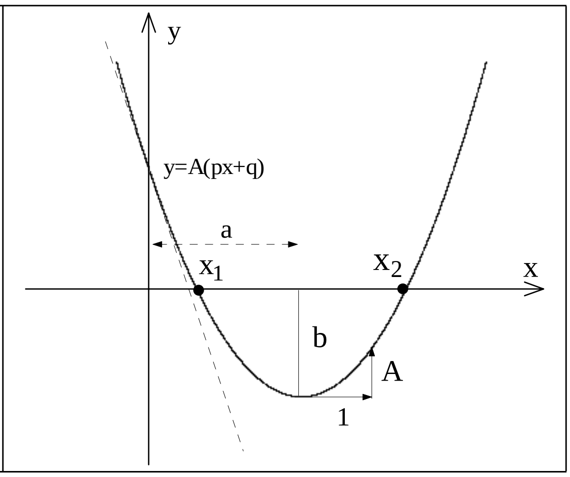
☐ Bestimmen Sie die Formeln, die p und q durch x_1 und x_2 ausdrücken. Bestimmen Sie die Formeln, die a und b durch x_1 und x_2 ausdrücken.

! Es ist allerdings keine gute Strategie neben der p-q-Formel noch all diese weiteren Formeln aufzustellen und gar zu merken. Bei Bedarf sollte man jeweils den konkreten Fall durchrechnen. Mit der p-q-Formel selbst ist das anders: Sie sollte stets verfügbar sein.

1.5.3 **Parabelgeometrie**

(1.5.11) Wir fertigen jetzt eine Skizze des Graphen unseres Polynoms. In dieser Skizze haben die Parameter a, b, x_1, x_2 sowie B,C und A alle eine ausgeprägte geometrische Bedeutung. Die Skizze verdeutlicht das. Hat das Polynom reelle Nullstellen, dann sind x_1 und x_2 die Nullstellen des Graphen. (a,b) sind immer die Koordinaten des Scheitelpunktes. Geht man vom Scheitelpunkt um 1 (eine Einheit) in x-Richtung weiter, dann muß man um A in y-Richtung gehen, um wieder auf den Graphen zu treffen. $y = C$ gibt den Schnitt des Graphen mit der y-Achse und $y = Bx + C$ liefert die Tangente an die Parabel zu diesem Punkt.

Geometrische Bestimmungsstücke der Parabel.
Scheitelpunkt (a,b)
Nullstellen x_1, x_2
"Scheitel"-zuwachs A
Tangente bei x=0.



☐ Wandeln Sie $p(x) = (x-3)(x+4)$ in die allgemeine und in die Scheitelpunktsform um.
Wandeln Sie $q(x) = 3x^2 + 2x - 1$ in die Scheitelpunktsform und in die Linearfaktorform um. (Dabei sollte man über die Normalform gehen!)
Auf den Fall komplexer Nullstellen kommen wir im Kapitel über komplexe Zahlen zurück.

1.5.4 **Nullstellenbestimmung**

(1.5.12) Das ist ein besonders wichtiges Problem, das man effektiv beherrschen sollte. Also: Gegeben ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen bestimmt werden sollen. Folgende Strategie ist zu empfehlen:

(1)		Inspektion des Polynoms
(1a)	?	Liegt eine direkt lösbare Sonderform vor? Direkter Weg.
(2)	sonst	Normalform herstellen
(3)		**p-q-Formel anwenden**
(4)		Klassifikation mit Hilfe der Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

(1.5.13) Was besagt (1a)? Folgende Sonderformen erlauben unmittelbares Angabe der Nullstellen: Linearfaktorform, Scheitelpunktsform, C=0 oder B=0. Insbesondere ist es in Hinblick auf die Effektivität

geradezu absurd, ein Polynom wie $(3x + \frac{a-2}{5})(\frac{4}{7}x + \frac{2a-7}{11})$ erst auszumultiplizieren und dann per quadratischer Ergänzung die Nullstellen zu bestimmen. (*Das mußten wir in der Schule immer so machen* ist keine Entschuldigung.)
Einige Beispiele des direkten Weges über (1a):

Gleichung	$\to$	Nullstellen per Inspektion:
$5(x-3)(4x+3) = 0$	$\to$	$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{3}{4}$
$7x^2 + 21x = 0$	$\to$	$x_1 = 0, \quad x_2 = -3$
$(x-5)^2 = 9$	$\to$	$x_{12} = 5 \pm 3$

□ Wieso fällt auch die folgende Gleichung unter (1a)?

$$3(2x-3)(x+5) - (x+1)(6-2x) = 0$$

(1.5.14) Zum **Merken und Anwenden der p-q-Formel**:

Man berechnet die Größe $-\frac{p}{2}$. Diese Zahl wird dann quadriert und kommt als erstes unter die Wurzel. Nicht etwa $\frac{p^2}{4}$ erneut berechnen. Bei großen Zahlen kann das unangenehm werden.

□ Geben sie die Nullstellen an für $p_1(x) = (x-2)^2 - 9$ und $\mathrm{p}_2(x) = 5x^2 - 15x$ und für $\mathrm{p}_3(x) = 4x^2 - 9$. Das sind erneut Fälle für den direkten Weg in (1a).
□ Bestimmen Sie die Nullstellen (in x) der Gleichung

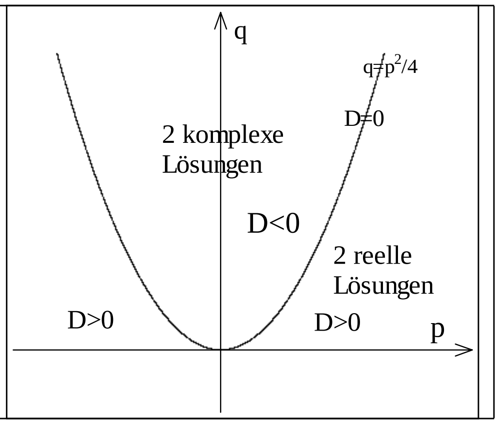
$$(a+b)x^2 - 3(a^2 - b^2)x - (a^3 + b^3) = 0.$$

□ ■ Formulieren und lösen Sie jeweils einige Konkretisierungsaufgaben zu (1.5.9) und (1.5.12-13).

1.5.5 **Die p-q-Ebene**

(1.5.15) Beim Anwenden der p-q-Formel trifft man auf eine Fallunterscheidung. Man bildet die *Diskriminante* $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ und inspiziert den zugehörigen Wert. Für positives D hat man zwei reelle Nullstellen. Der Graph des Polynoms schneidet die x-Achse an zwei Stellen. Ist D negativ, erhält man komplexe Nullstellen. Der Graph schneidet die x-Achse nicht. Und für D=0 erhält man eine doppelte reelle Nullstelle. Mit D lautet die p-q-Formel einfach $x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$.
(1.5.16) Hat man eine quadratische Gleichung, dann läßt sich diese Gleichung immer in die zugehörige Normalform bringen. (Vorausgesetzt $A \neq 0$ gilt.) Damit erhalten die äußeren Parameter p und q einen bestimmten Wert. Man kann das Paar (p,q) bilden und als Punkt in der p-q-Ebene interpretieren. (Nicht mit der x-y-Ebene verwechseln, in der das Polynom $x \mapsto p(x)$ in (1.5.11) dargestellt wurde!) Jetzt lassen sich die drei Fälle geometrisch unterscheiden. D=0 bedeutet ja $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$. Und das beschreibt eine Parabel $q = \frac{1}{4}p^2$ in dieser Ebene. Liegt der Punkt im Innern der Parabel, so liegen komplexe Nullstellen vor. Liegt er außerhalb, so liegen zwei reelle Nullstellen vor. Liegt er auf der Parabel, so hat man eine reelle Nullstelle. Es erweist sich vielfach als nützlich, derartige **Räume äußerer Parameter** einzuführen. Dabei findet ein Rollenwechsel statt. Da jetzt die Werte von p und q im Rahmen der Betrachtung geändert, miteinander verglichen werden, erhalten p und q die Rollen von Variablen. Jede (quadratische) Gleichung gehört zu einem Punkt diese Raumes. Zu jedem Punkt gehört umgekehrt eine Gleichung in Normalform.

Die Zerlegung der p-q-Ebene durch die Diskriminante D=$\frac{p^2}{4} - q$



☐ Wo liegt der zu $2x^2+3x+5=0$ gehörige Punkt? Eigenständig weitere Konsolidierungsbeispiele ausdenken.

1.5.6 Gleichungen, die auf eine quadratische Gleichung führen

(1.5.17) Eine Reihe von Gleichungen, die zunächst nicht vom quadratischen Typ sind, werden durch Gleichungsumformungen zu quadratischen Gleichungen. Hierzu gehören insbesondere Gleichungen mit Brüchen, bei denen die Unbestimmte im Nenner steht. Nehmen wir ein Beispiel:

$$\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{1}{2}.$$

Dabei soll x Unbestimmte sein und a und b sind äußere Parameter. Bei einer solchen Gleichung stört das x im Nenner am meisten. Vgl. (1.4.11-12). Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner, dann kürzen sich notwendig sämtliche Nenner heraus (Diesen Schritt sollte man möglichst im Kopf vollziehen. Vgl. (1.4.8)). In unserem Fall folgt:

$$\begin{aligned}
2a(x-b)+2b(x-a) &= (x-b)(x-a)\\
2(a+b)x-4ab &= x^2-(a+b)x+ab\\
x^2-3(a+b)x+5ab &= 0\\
& \boxed{x_{12}=\tfrac{3}{2}(a+b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{9a^2+9b^2-2ab}}
\end{aligned}$$

Der mittlere Schritt zeigt, wieso beim Beseitigen der Brüche eine Potenz der Unbestimmten, hier ein Quadrat, entsteht. Der Rest ist Anwenden der p-q-Formel.
(1.5.18) Nochmals: **Gleichungen mit nicht quadratischen Termen können durch Gleichungsumformungen (nicht Termumformungen) u.U. zu quadratischen Gleichungn werden.**
Im Gegensatz dazu kann ein nicht quadratischer *Term* durch Termumformungen nicht zu einem quadratischen werden.

1.5.7 Substitutionen

(1.5.19) In anderen Fällen gelangt man mit Hilfe von Substitutionen von der (nicht quadratischen) Ausgangsgleichung zu einer quadratischen Gleichung. D.h. man zerlegt die Gleichungslösung in mehrere aufeinander folgende Schritte, von denen wenigstens einer aus dem Lösen einer quadratischen Gleichung besteht. Das bekannteste Beispiel ist die biquadratische Gleichung: In der Gleichung $x^4+5x^2+6=0$ etwa setzt man $u=x^2$. Das gibt die leicht lösbare quadratische Gleichung $u^2+5u+6=0$ für die Unbestimmte u mit den zwei Lösungen $u_1=2$ und $u_2=3$. Aber man will ja x. Daher ist $x^2=2$ und $x^2=3$ zu lösen. Das gibt dann insgesamt 4 (reelle) Lösungen.
(1.5.20) Wir geben eine Reihe von weiteren Beispielgleichungen, die sich durch Substitution in Ketten leichter lösbarer Gleichungen umwandeln, wobei ein Schritt im Lösen einer quadratischen Gleichung besteht. Teilweise müssen auch noch Gleichungsumformungen vorgenommen werden.

$x^6+px^3+q=0$	$u=x^3$	$u^2+pu+q=0$
$e^x+a+e^{-x}=0$	$u=e^x$	$u^2+au+1=0$
$x+p\sqrt{x}+q=0$	$u=\sqrt{x}$	$u^2+pu+q=0$
$sin^2x+q\cos^2x+p\sin x=c$	$u=sinx$	$(1-q)u^2+pu+(q-c)=0$

Im Falle der dritten Gleichung muß i.a. $u\geq 0$ gewählt werden, damit man reelle x-Lösungen erhält. Negative u-Lösungen sind dann zu verwerfen.

☐ Bestimmen Sie die Nullstellen von $x^4-10x^2+1=0$. In der Endform kann man die doppelten Wurzeln beseitigen. Beweisen Sie dazu mit Hilfe des binomischen Satzes $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

1.5.8 Verallgemeinerungen der quadratischen Gleichung

(1.5.21) Es gibt eine Reihe naheliegender Verallgemeinerungen der quadratischen Gleichung. Startet man mit einem Polynom dritten Grades, statt eines quadratischen Polynoms, so entsteht eine *kubische Gleichung*, die sich weitgehend analog zur quadratischen Gleichung behandeln läßt. Um von der allgemeinen Form zur Normalform zu gelangen, muß man allerdings eine Verschiebung der x-Achse bis zum Symmetriepunkt vornehmen:

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$		allgemeine Form
$A\left(u^3 + pu + q\right)$	$u = x - x_0$ mit $x_0 = -\frac{B}{3A}$	Normalform
$A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$		Linearfaktorform

(1.5.22) Beachten Sie, dass in der Normalform der quadratische Term fehlt. Für die Normalform gibt es erneut eine Lösungsformel, die Formel von Cardano), die wir hier nicht angeben. Lassen Sie sich die Formel durch irgendein Computeralgebraprogramm ausgeben und lassen Sie dieses einige Beispiele rechnen. Bei der Einführung der komplexen Zahlen kommen wir auf die Formel und ihre Herleitung zurück. Vgl. (6.3.3).
(1.5.23) Das Gewinnen der Linearfaktorform ist im kubischen Fall bereits recht mühsam. Ist eine faktorisierte Form gegeben, sollten Sie diese nur ausmultiplizieren, wenn es dafür einen guten Grund gibt. **In der Regel, besonders bei Nennern von Brüchen, sollte man die faktorisierte Form in der Endform bewahren**. Allerdings erleichtern einem Computeralgebrasysteme auch hier sehr das Leben, da sie über einen Faktorisierungsbefehl verfügen, mit dessen Hilfe einem geradezu unfaßbare Leistungen beim Faktorisieren gelingen.

☐ Welche geometrische Interpretation haben p und q im kubischen Fall für A=1? Wie steht es mit dem Analogon zur Scheitelpunktsform? Welches Problem tritt auf? Welche geometrische Bedeutung haben $a = \sqrt{-\frac{p}{2}}$ und $H = -a^3$ im Falle p<0?

(1.5.24) Für Polynome 4.Grades gibt es erneut analoge Resultate. Insbesondere gibt es eine zur p-q-Formel analoge Formel, die die Nullstellen liefert. Aber Vorsicht vor vorschneller Verallgemeinerung: Es wurde mathematisch bewiesen, dass es für Poynome mit einem Grad 5 oder höher **keine entsprechende Formel** gibt, die einem die Nullstellen liefert! Diese Nullstellen existieren zwar, aber man kann sie nicht über eine explizite Formel allgemein berechnen und sei diese auch noch so kompliziert.

(1.5.25) Zusammenfassung: Der Text zeigt, wie eine einzige Formel - hier die p-q-Formel - als Keimzelle oder Kondensationskeim vieler weitergehender mathematischer Überlegungen dienen kann. Hierzu gehören:

1. Der Begriff der Formel mit äußeren Parametern
2. Der Unterschied zwischen Zuordnung und Rechenausdruck (quadr. Term - quadr. Polynom)
3. Die graphische Veranschaulichung eines Rechenausdrucks (mit spezifizierter Variabler)
4. Unterschiedliche Formen einer Gleichung
5. Normalform einer Gleichung
6. Umformung einer Gleichung mit Hilfe von Substitutionen
7. Verallgemeinerungen einer Gleichung.

Die nachfolgenden Aufgaben vertiefen einige in diesem Abschnitt angeschnittene Aspekte:

☐ Betrachten Sie das Polynom n-ten Grades $p_n(x) = x^n + 1$. Lassen Sie es durch ein Computeralgebraprogramm für einige Werte von n mit n<100 faktorisieren. Welche allgemeine **Hypothese über die Koeffizienten der Faktoren liegt nahe**? Und das ist auch für alle n unter 100 korrekt! Aber so eine Verallgemeinerung (hier von *...bis 100..* auf *...immer...*) kann vorschnell sein, ersetzt keineswegs einen mathematischen Beweis! Wählen Sie einmal n=105 und inspizieren Sie das Resultat.

☐ Wir kehren zu Herons Gleichung für den Flächeninhalt F eines Dreiecks aus der Frage in (1.2.8) zurück. Wir schreiben die Gleichung jetzt wie folgt:

$$F^2 = \frac{1}{16}(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

Wir wollen diese Formel nicht beweisen, aber uns mit ihr vertraut machen. **Sammeln Sie möglichst viele Argumente und Indizien, dass die Formel tatsächlich den Flächeninhalt F eines Dreiecks liefert, dessen Seitenlängen a,b und c sind.** Welche Form ist hierzu besser geeignet, die faktorisierte oder die in (1.2.8) bestimmte ausmultiplizierte?

Kap.1.6: **Geradengleichungen (in der Ebene)**

Mit Hilfe geeigneter Formeln lassen sich wichtige geometrische Figuren quantitativ darstellen und zugehörige Probleme werden mathematisch lösbar. Die Entdeckung und Entwicklung dieses Sachverhaltes (der analytischen Geometrie) hat die Anwendbarkeit der Mathematik außerordentlich voran gebracht. Worum es geht, läßt sich am einfachen und sachlich wichtigen Beispiel der Geradenbeschreibung in der Ebene illustrieren.

1.6.1 **Die Gleichungsbeschreibung**

(1.6.1) Wie beschreibt man Geraden in der Ebene mathematisch? Gebräuchlich und besonders günstig ist die Beschreibung mit Hilfe einer "Geradengleichung" etwa des Typs $y = mx + b$. Wir wollen überlegen, was das genauer bedeutet. Im Rahmen der Vektorrechnung werden wir eine weitere Beschreibungsform kennen lernen.
(1.6.2) Zunächst einmal: Jede Wahl von m und b legt eine bestimmte Gerade fest. Alle Wahlen sind zulässig. m und b sind *äußere Parameter* (wie bei den quadratischen Gleichungen eingeführt). Wählt man $m = 2$ und $b = -3$, so wird aus der allgemeinen Geradengleichung $y = mx + b$ die konkrete $y = 2x - 3$. Man erhält so alle Geraden der Ebene, die nicht parallel zur y-Achse sind.
(1.6.3) Damit sind wir bei einem weiteren Punkt: Die Beschreibung verlangt eine Ebene mit einem (rechtwinkligen) Koordinatensystem, mit dessen Hilfe sich jeder Punkt P der Ebene durch ein Koordinatenpaar (x_P, y_P) festlegen läßt.

! **(1.6.4)** Die Geradengleichung leistet dann Folgendes: **Alle Punkte, die auf der Geraden liegen, besitzen Koordinaten, die die (konkrete) Gleichung erfüllen. Alle Punkte, die nicht auf der Geraden liegen, haben Koordinatenpaare, die die Gleichung nicht erfüllen.** Die Geradengleichung hat eine Lösungsmenge, die aus genau allen Koordinatenpaaren von Punkten der Geraden besteht.
(1.6.5) Die Geradengleichung leistet noch mehr. Sie teilt die Ebene in drei Teile:

- Hat der Punkt Koordinaten (x,y) mit y>mx+b, so liegt der Punkt oberhalb der Geraden.
- Hat der Punkt Koordinaten (x,y) mit y<mx+b, so liegt der Punkt unterhalb der Geraden.
- Hat der Punkt Koordinaten (x,y), die die Gleichung erfüllen, für die also y=mx+b gilt, dann liegt der Punkt auf der Geraden.

(1.6.6) Bitte halten Sie sorgfältig die folgenden Begriffe auseinander:

- Die Gerade g.
- Ein Punkt P der Geraden g.
- Das Koordinatenpaar (x_P, y_P) des Punktes P der Geraden g.

Ist g jetzt zu bestimmen, führt man das Problem routinemäßig über dies Begriffssystem auf die Bestimmung der Koordinatenpaare aller Punkte von g zurück.
Achten Sie auch darauf, dass Sie eine entsprechende korrekte sprachliche Darstellung verwenden.
(1.6.7) Scheuen Sie sich nicht vor vertrauensbildenden eigenen Überlegungen (Konkretisierungen) der folgenden Art: "Wenn ich in $y = 3x + 4$ die Werte $x = 3$ und $y = 4$ einsetze, dann wird $4 < 3 \cdot 3 + 4$, also liegt der zugehörige Punkt...". Eine solche Scheu (=Bequemlichkeit?) findet sich leider allzu häufig.

> !**(1.6.8)** Unser Resultat ist wichtig und verallgemeinerungsfähig: **Man beschreibt geometrische Figuren der Ebene, indem man ihre Punkte festlegt. Und die Punkte werden bestimmt durch ihre Koordinatenpaare. Und letztere legt man durch eine Gleichung fest. Meist ist es so, dass es für ein und dieselbe Figur mehrere Gleichungen gibt**. Wir nennen das *Gleichungsbeschreibung* von Figuren. Im Rahmen der Vektorrechnung werden wir eine weitere Beschreibungsform für Figuren kennenlernen.

☐ Was leistet entsprechend die Parabelgleichung $y = x^2$? Gehen Sie die einzelnen Schritte der Beschreibung hierfür durch.
☐ Was ist entprechend eine *Kreisgleichung ?* Wie lautet die übliche Kreisgleichung?
☐ Schauen Sie in einer Formelsammlung nach, welche ebenen Figuren üblicherweise durch Gleichungen der beschriebenen Art festgelegt werden.

! **(1.6.9)** Eine (nicht zur y-Achse parallele) Gerade g wird somit durch Angabe von m und b festgelegt. Wir schreiben dies auch g=g(m,b). Die äußeren Parameter m und b haben die folgende bekannte geometrische Interpretation:

- b liefert den y-Abschnitt, also die y-Koordinate des Schnittpunktes von g mit der y-Achse. Dieser hat die Koordinaten (0,b).
- m ist die Steigung der Geraden. Diese interpretiert sich operativ wie folgt: Geht man von einem Punkt von g aus eine Einheit in positiver x-Richtung, dann muss man m Einheiten in y-Richtung gehen, um auf g zu treffen.

☐ Welcher (gewichtige) Unterschied besteht zwischen der geometrischen Interpretation von m und der von A für die Gleichung $y = Ax^2 + Bx + C$? Vgl. (1.5.11)
☐ Was für eine geometrische Figur wird durch die Gleichung $y^2 - x^2 = 0$ festgelegt? Was durch $x^2 + y^2 = r^2$ und allgemeiner durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

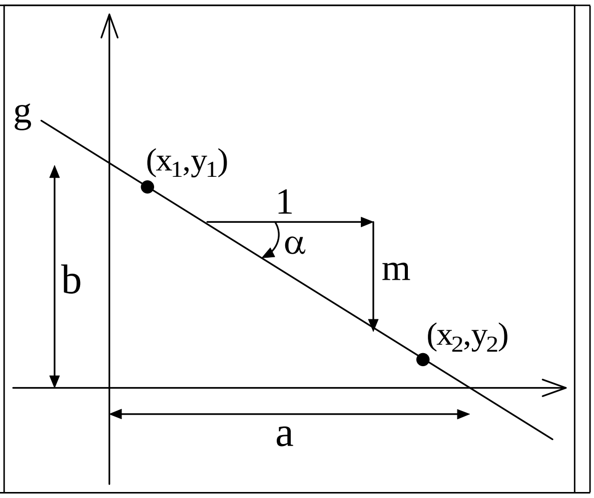
1.6.2 **Formen der Geradengleichung**

(1.6.10) Wir sagten bereits, dass mehrere Gleichungen zu derselben Geraden führen können, so wie verschiedene Rechenausdrücke zu ein und derselben Parabel führen können. Einige dieser weiteren Gleichungen sind deshalb wichtig, weil in ihnen andere geometrische Bestimmungsstücke (als äußere Parameter) auftreten. Nun kann man diese Bestimmungsstücke entweder geometrisch umrechnen bis man m und b erhält oder man schreibt mit ihnen unmittelbar eine geeignete Geradengleichung auf, **in der die neuen Bestimmungsstücke als äußere (geometrisch interpretierbare) Parameter auftreten.**
(1.6.11) Wir geben die wichtigsten derartigen Gleichungen:

$Ay + Bx + C = 0$		Allgemeine Form
$y = mx + b$	m: Steigung b: y-Abschnitt	**Normalform**
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a: x-Abschnitt $a \neq 0$ b: y-Abschnitt $b \neq 0$	Abschnittsform
$y - y_1 = m(x - x_1)$	m: Steigung (x_1, y_1): Ein Punkt der Geraden	Punkt-Richtungsform
$y - y_1 = m(x - x_1)$ $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	(x_1, y_1): Ein Punkt der Geraden g (x_2, y_2): Zweiter **verschiedener** Punkt von g.	Zweipunkteform

(1.6.12) Nochmals das Szenenbild: Die Umstände legen bestimmte geometrische Bestimmungstücke der Geraden fest. Man sucht und bildet diejenige Gleichung, zu der die Bestimmungsstücke am besten passen, und steigt damit in die Rechenarbeit ein. Bei Bedarf kann man dann die Gleichung in eine der anderen Formen bringen und die zu dieser gehörigen geometrischen Größen ablesen. Das alles ist weitgehend analog zum Vorgehen bei den Parabeln.
☐ Wie erhält man die Abschnittsform aus der allgemeinen? Wann ergeben sich Probleme?
☐ Überlegen Sie sich selbst ein Beispiel einer einfachen Übung zur Abschnittsform.
(1.6.13) Eine Skizze verdeutlicht auch hier die Bedeutung der einzelnen äußeren Parameter.

Die geometrischen
Bestimmungsstücke
einer Geraden
m=tan(α),b
a,b
m,(x_1, y_1)
(x_1, y_1), (x_2, y_2)



Diese Skizze und die Formeln aus (1.6.11) bilden das ("auswendig") zu beherrschende Ausgangsmaterial für die Behandlung der eigentlichen geometrischen und physikalischen Probleme.

□ ■ Rekonstruieren Sie die Skizze und die zugehörigen Gleichungen.

□ ■ Formulieren und lösen Sie jeweils einige Konkretisierungsaufgaben zu (1.6.5),(1.6.6) und (1.6.11).

(1.6.14) Ein Beispiel: Eine Gerade g habe die Achsenabschnitte $a = 3$ und $b = -4$. Normalform und Steigung? $\frac{y}{-4} + \frac{x}{3} = 1$. Also $y = \frac{4}{3}x - 4$ und damit $m = \frac{4}{3}$.

⇓ Jetzt steigern wir die Komplexität der Aufgabe, um zu zeigen, wie man derartige Gleichungen beim Problemlösen einsetzt. Das Grundmuster ist immer dasselbe.

1.6.3 **Beispiele**

(1.6.15) Bestimme alle Punkte der Geraden g mit Achsenabschnitten a=3 und b=-4.

Wir starten mit der zugehörigen Achsenabschnittsform $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$ und wandeln diese in die Normalform um. Wie sind x und y zu interpretieren? Sie haben die Rolle von Unbestimmten. D.h. sie sind mit der Aufforderung verbunden: *Suche alle Paare (x,y), die eingesetzt die Gleichung erfüllen.* So erfüllen (0,-4) und (3,0) die Gleichung sicher. Aber es gibt weitere Lösungen und man sucht alle. Jetzt verändert man in der (durch Umformung entstehenden) Gleichung $y = \frac{4}{3}x - 4$ **die Bedeutung der Buchstaben:** Und zwar soll man x beliebig vorgeben dürfen und kann dann ein zugehöriges y über die Gleichung berechnen. Das gibt jeweils eine Lösung des Problems (=Punkt auf g), gleichgültig wie man x wählt. Und da zu jeder Lösung genau ein x-Wert gehört, ergibt das auch alle Lösungen. Wir sagen: *x erhält die Rolle eines freien Parameters* und y *die Rolle einer abhängigen Variablen.* Wählt man etwa x=9, so folgt y=8. Die Koordinaten (9,8) gehören zu einem Punkt der Geraden. Also: Bei einem *freien Parameter* kann man den Wert beliebig vorgeben und erhält ein Objekt des interessierenden Typs, hier eine Lösung und damit einen Geradenpunkt. Bei einer abhängigen Variablen wird der Wert durch das System, hier in Form der Gleichung bestimmt, nachdem eventuelle freie und äußere Parameter festgelegt sind.

(1.6.16) Bestimme alle Tangenten an die Parabel y=x^2.

Wir wissen: Gemeint ist die Parabel, deren Punkte Koordinatenpaare besitzen, die die Gleichung lösen. Tangenten sind Geraden. Zur Festlegung wählen wir die Punkt-Richtungsformel. Denn wir wissen: Jede Tangente muss durch einen Parabelpunkt gehen. Und die Steigung der Tangente folgt über die Ableitung zu $y'(x) = 2x$. Nun haben wir es aber nicht mit einer Geraden zu tun, sondern mit vielen. Zu jedem Punkt der x-Achse (freier Parameter) gehört ein Punkt der Parabel mit Koordinaten (x,x^2) und Steigung m=2x.

Beim Einsetzen in die Punkt-Richtungsformel ergibt sich ein unangenehmes Problem. Der Buchstabe x hat jetzt zweierlei Bedeutung! Einmal bezeichnet er das x der Geradengleichung und zum anderen bezeichnet er den freien Parameter zur Festlegung des Parabelpunktes! Ein so entstehendes **gefährliches Durcheinander** ist unbedingt durch eine **Bezeichnungsänderung** aufzulösen, etwa durch Umbenennung der Parabelpunkte. Der Parabelpunkt auf der Geraden soll $(x_1, y_1) = (x_1, x_1^2)$ genannt werden. Die zugehörige Steigung (der Tangente) ist m=m(x_1) $= 2x_1$. Dann ist m wieder eine abhängige Variable. **Jetzt** können wir in die allgemeine Punkt-Richtungsformel einsetzen und finden:

Zu x_1 gehört die Tangente mit der Gleichung $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$ Der freie Parameter x_1 gibt den Fußpunkt des Berührungspunktes der Tangente.

(1.6.17) Wir erhöhen die Komplexität der Aufgabe nochmals:
(1.6.18) Unter der *Normalen* (an die Parabel zum Punkte (x_1, x_1^2) verstehen man die Gerade durch diesen Punkt, die senkrecht auf der zugehörigen Tangente steht. Die Normale hat im Parabelpunkt (a,a^2) die Steigung $-\frac{1}{2a}$.

Unsere abschließende Aufgabe zur ergänzenden Übung:

☐ Bestimme alle Punkte der Parabel, für die der x-Abschnitt der Normalen die dreifache Länges des x-Abschnittes der Tangente besitzt. (Dazu sind weitere Rollenwechsel erforderlich. Skizze machen.)

☐ Noch eine weitere Geradengleichung: Fällen Sie vom Ursprung des Koordinatensystems aus das Lot auf die Gerade. Das Lot habe die Länge d. Weiter sei β der Winkel, den das Lot mit der positiven 1-Richtung bildet. Beschreiben Sie eine beliebige Gerade g, die nicht durch den Ursprung geht, durch eine Gleichung, die durch d und β festgelegt wird.

☐ Wie gehen Sie vor/sollten Sie vorgehen, um sich alle Formeln aus (1.6.11) zu merken? Können Sie diese Fomeln jetzt rekonstruieren? Welche davon würden Sie als *zentral* bezeichnen, wie folgen die übrigen?

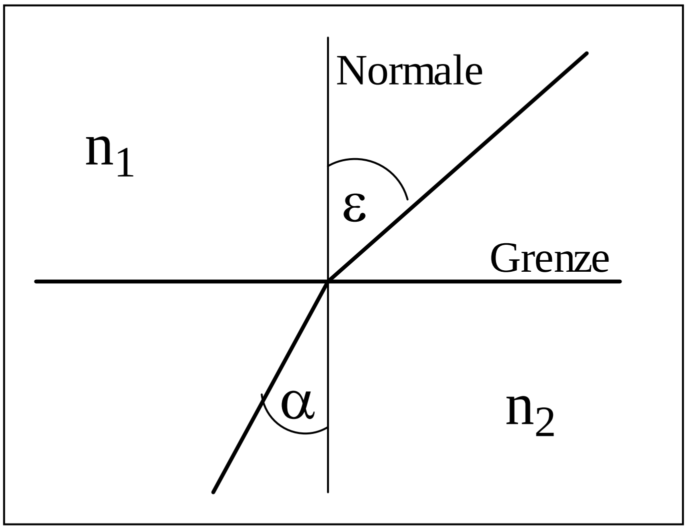
Kap.1.7: **Die Tiefe des Wasserbeckens**

Formeln können als Einstieg in die Behandlung komplexerer Probleme dienen. Dabei sollte man gewisse Routinepunkte beachten. Und man benötigt grundlegende mathematische Techniken - im Beispiel die der Geradenbeschreibung. Hinzu kommt ein ausreichendes Rollenbewußtsein während des gesamten Verlaufs der Aufgabenbehandlung. Wir besprechen ein Beispiel aus der geometrischen Optik.

(1.7.1) Das Problem: Wir schauen von oben in ein Wasserbecken, auf dessen Boden eine Münze liegt, und beobachten, dass sich die scheinbare Tiefe des Beckens mit dem Blickwinkel ändert, dass diese Tiefe geringer erscheint als die tatsächliche geometrische Tiefe. Dies Phänomen soll physikalisch verstanden werden. Die zugehörige Frage: **Wie groß ist die scheinbare Tiefe des Wasserbeckens?**
(1.7.2) Angelpunkt der Behandlung dieser Aufgabe ist eine Formel, das (physikalisch bestätigte) **Brechungsgesetz.** Es beschreibt, wie sich die Richtung eines Lichtstrahles ändert, wenn dieser eine Grenzfläche zwischen zwei (sonst homogenen) Stoffen passiert, hier die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser. Winkel werden dabei immer von der Normalen der Grenzfläche aus gemessen:

Das Brechungsgesetz		
$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$		n_1, n_2 Brechungsindizes der beiden Medien
		α_1, α_2 Einfalls- bzw. Ausfallswinkel

Ein Lichtstrahl trifft die Grenze zwischen den Medien 1 und 2 unter dem Einfallswinkel ε und verläßt die Grenze unter dem Ausfallswinkel α. Das Brechungsgesetz liefert die Beziehung zwischen den beiden Winkeln.

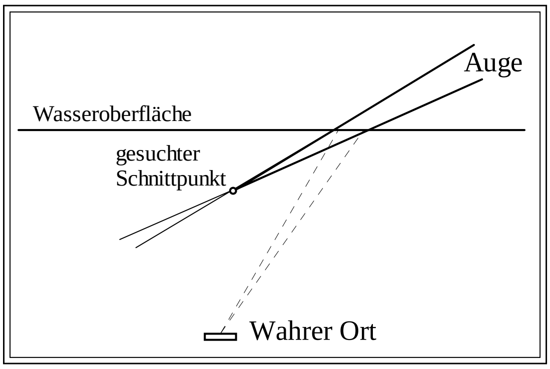


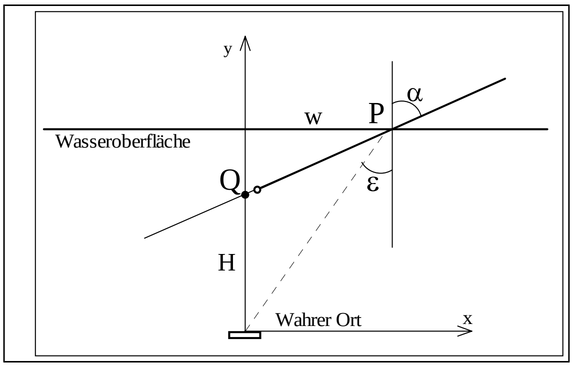
! (**1.7.3**) Wir behandeln das Problem in mehreren für derartige Aufgaben typischen Schritten:

1. Wir entwickeln eine qualitative Beschreibung des Sachverhaltes (mit Hilfe einer Skizze).
2. Wir wandeln die qualitative Beschreibung in eine quantitative um.
3. Wir stellen zugehörige Formeln zusammen und nehmen die situtionsspezifische **Rollenzuweisung vor.**
4. Wir versuchen, das entstehende mathematische Bestimmungsgleichungsproblem exakt zu lösen und führen Vereinfachungen durch.
5. Interpretation und Veranschaulichung des Resultates.

(1.7.4) Zu 1.) Es treten **zwei Geraden** auf: a) Der Lichtweg in der Luft vom Auge zum Auftreffpunkt auf der Wasseroberfläche sowie dessen geometrische Verlängerung ins Wasser hinein. Und b) der Lichtweg im Wasser vom Auftreffpunkt bis zur Münze sowie der zugehörigen Verlängerung in die Luft. Das Auge verlängert den eingehenden Strahl geradlinig ins Wasser hinein.

(1.7.5) Das Auge nimmt aber nicht nur einen einzigen Strahl auf, sondern ein ganzes Strahlenbüschel, das von **einem** Punkte der Münze startet. Die Verlängerungen dieser Strahlen ins Wasser hinein müssen sich näherungsweise wieder in einem Punkt treffen. Tun sie das, so erscheint der Münzpunkt dem Auge virtuell an diesem Punkt! **Das Problem besteht daher darin, Existenz und Lage dieses virtuellen Schnittpunktes zu bestimmen**!





(1.7.6) Zu 2.) Wir betrachten zunächst nur einen einzigen Strahlengang von der Münze zum Auge, der Einfachheit halber in einer festen Ebene. Wir führen Koordinaten ein mit dem Ursprung am Ort der Münze. Der betrachtete Strahl treffe die Oberfläche im Punkt P mit Koordinaten (w,T). D.h. T ist die physikalische Tiefe des Beckens. w gibt an, wie weit der Punkt P der Wasseroberfläche von der (vertikalen) 2-Achse entfernt ist. Diese Koordinatenachse liefert *den Blick von oben* auf die Münze. Weiter sei ε der Einfallswinkel des Strahles. Dieser Strahl läuft in der Luft unter dem Ausfallswinkel α weiter, um schließlich ins Auge zu gelangen. Wichtig ist die rückwärtige Verlängerung des Strahls ins Wasser hinein. Diese treffe die 2-Achse des Koordinatensystems im Punkte Q mit Koordinaten (0,H). Dann wird S=T-H (ungefähr) die scheinbare Tiefe des Beckens sein. Ungefähr, weil der oben besprochene virtuelle Punkt nicht direkt über der Münze liegen muss, seine scheinbare Lage kann auch seitwärts verschoben sein. Die beiden Brechungsindizes $n_{Wasser} \approx 1.33$ und $n_{Luft} \approx 1$ sind feste äußere Parameter. Die Bestimmung des **scheinbaren Münzortes** ist unser Problem.

☐ Zeichnen Sie die beiden Größen T und S selbst in die Figur ein. Welche Rolle hat T in dieser Aufgabe? Welche hat S?

(1.7.7) Zu 3). Der von der Münze ausgehende Strahl wird (in der Ebene) durch den Einfallswinkel ε festgelegt. D.h. ε ist unabhängige Veränderliche. Damit ist P offensichtlich bestimmt. P wird durch w festgelegt, wir benötigen w=w(ε) als abhängige Veränderliche. Jetzt legt das Brechungsgesetz den Ausfallswinkel $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ fest. Mit P zusammen bestimmt dieser Winkel über die Punkt-Richtungsformel die Lichtgerade in der Luft. Deren Schnitt mit der y-Achse ist gesucht in Form des Achsenabschnittes H. Die soeben beschriebenen Rollenzuweisungen muss man sich vor oder spätestens während der Aufgabenbehandlung einprägen. Man hat sie während der gesamten Rechnung zu beachten.
Welche Formeln stehen zur Verfügung?

$w = S\tan(\alpha)$	$w = T\tan(\varepsilon)$	$\sin(\alpha) = n\sin(\varepsilon)$	n=$\frac{n_{Wasser}}{n_{Luft}}$
Dreieck QDP	Dreieck 0DP	Brechungsgesetz	Brechungsindex

Hinzu kommt die Beziehung $\boxed{\text{S=T-H}}$ zwischen den eingeführten Bezeichnungen.
Der Brechungsindex n ist äußerer Parameter. Er behält über den gesamten Aufgabenbereich einen konstanten Wert. Und jede zulässige Werteinsetzung gibt eine eigenständige Aufgabe (*Münztiefe in einer anderen Flüssigkeit*).

(1.7.8) Zu 4) aus (1.7.2). Das rechnerische Vorgehen ist bei vorhandenem Rollenbewußtsein klar: Die erste Gleichung nach S umstellen, w über die zweite Gleichung und α über die dritte hinauswerfen. Das gibt S=S(ε) mit zusätzlicher Abhängigkeit vom äußeren Parameter n.
Das nachzuvollziehende Ergebnis :

$$\boxed{\text{S=T}\frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(asn(n\sin(\varepsilon))} = T\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varepsilon)}}{n\cos(\varepsilon)}}$$

Die erste Form folgt sofort, die zweite verlangt etwas Rechnung. (Hinweis: Verifizieren Sie $\tan\varepsilon = \frac{\sin(\varepsilon)}{\sqrt{1-\sin^2(\varepsilon)}}$ und $\sin(\mathrm{asn}(\mathrm{nsin}(\varepsilon))) = n\sin(\varepsilon))$. Damit folgt das Resultat.)

(1.7.9) Beachten Sie: Die Beckentiefe T bietet sich als **systembezogene Längeneinheit** an! D.h. auftretende Längen werden möglichst als Vielfache von T geschrieben. Die angegebene Formel ist bereits entsprechend formuliert: T mal ein reiner Zahlfaktor.

(1.7.10) Für sehr kleine ε wird die Münze scheinbar senkrecht über dem Ursprung liegen. Dann ist näherungsweise (wie wir in Teil 2 genauer diskutieren) $\sin(\varepsilon) \approx \varepsilon$ und $\tan(asn(n\sin(\varepsilon)) \approx n\varepsilon$. Damit folgt für den senkrechten Blick bereits S=$\frac{1}{n}T$ für die scheinbare Tiefe. Unter den gegebenen Umständen ist n>1, d.h. die scheinbare Tiefe ist geringer als die wahre. Für Wasser mit $n \approx 1.33$. folgt $\frac{1}{n} = 0.75$. Beachten Sie die Nützlichkeit der eingeführten systembezogenen Einheit!

(1.7.11) Aber wir können auch exakt rechnen. Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Luftgeraden (in Normalform y=mx+b, einschließlich der Verlängerung ins Wasser). m und b werden durch ε festgelegt. Wegen b=H=T-S erhalten wir $b = b(\varepsilon)$ sofort. M folgt über $m = \frac{S}{w} = \frac{S(\varepsilon)}{T\tan(\varepsilon)} = \frac{1}{\tan(asn(n\sin(\varepsilon)))}$ wieder aus den Ausgangsgleichungen. Ergebnis:

$$\boxed{m(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varepsilon)}}{n\sin(\varepsilon)} \qquad b(\varepsilon) = T\left\{1 - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varepsilon)}}{n\cos(\varepsilon)}\right\}}$$

(1.7.12) Damit liegt für jeden Startwinkel ε die Gerade des zugehörigen Luftstrahles fest! Wir wählen zwei benachbarte (vom gewählten Münzpunkt ausgehende) Strahlen , also deren ε-Werte. (So benachbart, dass beide zugehörigen Strahlen ins Auge gelangen). Wir fragen nach dem Schnittpunkt dieser beiden Geraden und bilden dann den Grenzwert gleichen Winkels. (Das sollte den scheinbaren Münzort festlegen!) In Teil 2 werden wir mit den Methoden der Analysis sehen, wie sich dieser Grenzwert der Schnittpunkte leicht bestimmen läßt. Das Ergebnis ist ein Punkt V mit Koordinaten (x_V, y_V), der durch folgende Formeln gegeben wird:

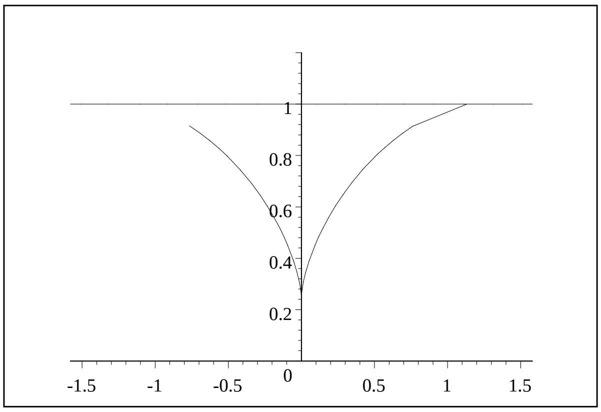
$$\boxed{\mathrm{x}_V = -\frac{b'(\varepsilon)}{m'(\varepsilon)} = T(n^2-1)\tan^3(\varepsilon) \qquad \mathrm{y}_V = m(\varepsilon)x_V + b(\varepsilon).}$$

Beachten Sie: Nur die erste Gleichheit erfordert einen Vorgriff auf die Resultate von Teil 2 des Kurses. Gemäß diesem vorweggenommenen Resultat sind zwei Ableitungen zu bilden. Die Erstellung der gegebenen einfachen Endform für x_V verlangt allerdings einige Rechnung. x_V gibt die Horizontalabweichung des scheinbaren Münzortes. Und $T - y_V$ die scheinbare Tiefe.

! Damit haben wir eine Parameterdarstellung für den virtuellen scheinbaren Ort der Münze. Ein Defizit: DerAufgabenstellung gemäßer wäre es, den Ausfallswinkel α anstelle des Einfallswinkels ε vorzugeben. Aber das läßt sich mit Hilfe des Brechungsgesetzes bewerkstelligen.

☐ Führen Sie die ausgelassenen Zwischenrechnungen aus.

☐ Lassen Sie (ein geeignetes Computerprogramm) für einige Werte von n die Ortskurve der scheinbaren geometrischen Orte der Münze zeichnen. Das nachfolgende Bild gibt die Figur für n=1.33, also den Wasser-Luft-Übergang. Die Wasseroberfläche liegt bei y=1 (D.h. H ist Einheit!). Der wahre Münzort ist der Ursprung. Bei sehr flachem einfallendem Strahl scheint die Münze daher direkt unter der Oberfläche zu liegen.



☐ Behandeln Sie nach demselben Muster die folgende Aufgabe: Gegeben ein Punkt A im Luftbereich. Wie sieht der Lichtweg aus, der diesen Punkt mit einem Punkt im Wasserbereich verbindet. (Der Ursprung kann in letzteren gelegt werden.) Was sind jetzt die unabhängigen Variablen? Welche Rolle hat ε jetzt ?)

☐ Schreiben Sie ein Basic-Programm, bei dem Sie mit der Maus die Augenposition (in der Luft) festlegen und das dann den zugehörigen Lichtweg vom Auge zu einem festen Punkt im Wasser zeichnet. Sowie optional die Verlängerung des Luftweges ins Wasser hinein. (Achtung: Nach jeder Mausbewegung muss der Bildschirm mit dem alten Weg gelöchst werden! Benutzen Sie das Resultat der vorangegangenen Aufgabe.)

(1.7.13) Zusammenfassung. Wir haben in diesem Teil eine anspruchsvollere Formelanwendung besprochen. Gehen Sie dazu nochmals die in (1.7.3) gegebene Aufteilung der Problemlösung in Einzelschritte durch. Unterschätzen Sie nicht die Bedeutung der ersten drei Schritte zur Vorbereitung der Problemlösung. Die Ausführung von Problemlösungen scheitert ebenso häufig an fehlendem Problemverständnis wie an rechentechnischen Unzulänglichkeiten.

Kap.1.8: **Problemlösung und Rollenkonzept**

Wie arbeitet man sich in eine gegebene Aufgabe, eine Problemsituation ein, die nicht vom Routinetyp ist? Neben den elementaren mathematischen Techniken, von denen einige besonders wichtige in den vorangegangenen Teilen vorgestellt wurden, gibt es weitere unterstützende Hilfen, die traditionellerweise nicht zum mathematischen Lehrstoff gezählt werden. Wir sind dem Rollenkonzept bereits mehrfach begegnet und haben gesehen, wie es bei der Behandlung von Anwendungsproblemen auftritt. Jetzt soll es etwas systematischer eingeführt und zusammengefasst werden.

(1.8.1) Wie geht man vor, wenn man mit einer Aufgabe konfrontiert ist, die nicht vom Routinetyp ist, aber auch keine reine Denksportaufgabe? Also nicht einfach die Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmen, sondern ein Problem von der Art der Wasserbeckentiefe behandeln. Oder auch selbständig eine Formel finden wie im Falle der Binomialformel.
(1.8.2) Das zu empfehlende Vorgehen ist weitgehend analog zur Planung eines größeren Marsches durch unwegsames Gelände. (Achtung, diese Analogie soll später als Gedächtnisstütze dienen!). Entsprechend stellen wir uns drei größerer Fragen:

- Kann man den Weg in Abschnitte aufteilen, insbesondere, kann man gewisse bekannte Wegstrecken abtrennen? (Modulares Arbeiten)
- In welche Richtung soll man sich bei Beginn der einzelnen Wegstrecken wenden? (Rollenzuweisung)
- Was weiß man über das Aussehen des jeweiligen Endzieles? (Rollenbewußtsein, Endform)

Wir haben den Punkten jeweils ein Stichwort angefügt, das die zugehörige Leistung im mathematischen Bereich charakterisiert und das wir nachfolgend verwenden wollen. Damit man diese Fragen sinnvoll angehen kann, ist eine Einarbeitung in die Aufgabe, so wie sie in den ersten drei Schritten von (1.7.3) beschrieben wurde, fast immer erforderlich.

1.8.1 **Modulares Arbeiten**

(1.8.3) Für bestimmte immer wieder auftretende Probleme verwendet man Schemata, die einem effizient und gesichert ein bestimmtes Resultat liefern, sofern gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. Wichtige Schemata dieser Art findet man besonders auch in den Computeralgebraprogrammen wieder. Einige Beispiele:

- Lösung einer quadratischen Gleichung über die p-q-Formel wie eingeführt.
- Bestimmung einer Geraden durch Wahl einer geeigneten Geradengleichungsform und Festlegung der zugehörigen Bestimmungsgrößen
- Distributives Ausrechnen eines Produktes nach der Regel *Jeder mit jedem* unter Verwendung einer Schreibweise, die effiziente Bilanzierung erlaubt.

(1.8.4) Solche Schemata lassen sich bausteinartig zur Problemlösung einsetzen. Beachten Sie, dass Schemata Verzweigungen enthalten können, wie Beispiel b) zeigt: Es können mehrere Wege zum Ziel führen und Sie müssen begründet entscheiden, beurteilen, welchen Weg Sie wählen.
☐ Entwickeln Sie ein Schema, das Folgendes leistet: Gegeben eine Gerade g und ein Punkt P auf dieser Geraden. Bestimme die Normale zur Geraden (=dazu senkrechte Gerade) durch diesen Punkt. Einstiegsfrage: Wie sollte man g und P quantifizieren? Diese Quantifizierung ist dann als gegeben anzusehen und muss die Geradengleichung festlegen.
(1.8.5) Teilweise kann man Schemata nutzen, ohne sie selbst bewiesen oder verstanden zu haben. Nehmen wir als Beispiel das im Zusammenhang mit dem Brechungsgesetz in (1.7.12) benutzte Schema: Gegeben eine

Schar von Geraden $y = m(\varepsilon)x + b(\varepsilon)$. Gesucht der Grenzwert der Geradenschnittpunkte $(x_S(\varepsilon), y_S(\varepsilon))$ für gleichen Wert von ε. Die Antwort wird durch die Formel $x_S(\varepsilon) = -\frac{b'(\varepsilon)}{m'(\varepsilon)}$ gegeben. Mit Hilfe dieser Formel kann man das Resultat bestimmen, ohne den Weg dahin, den Beweis, zu kennen.

☐ Lösen Sie jetzt modular - durch Zusammenfügen der soeben gegebenen Formel mit dem Resultat der vorangegangenen Frage - folgendes Problem: Gegeben eine Funktion $y = f(x)$, etwa $y = x^2$. Bestimme zu einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ des Graphen den zugehörigen Krümmungskreis. (Dazu muss man die Normale zu dem Graphenpunkt mit der Normalen zu einem benachbarten Punkt auf dem Graphen schneiden und dann zum Grenzwert gleicher Punkte übergehen! Der Krümmungskreis wird durch Mittelpunkt und Radius festgelegt. Wie erhält man beides?)

☐ Inwieweit ist die Fähigkeit zum modularen Denken besonders für den Umgang mit Computeralgebraprogrammen wichtig? Wie wird man mit Hilfe solcher Programme Gleichungen lösen, Kurven oder Flächen zeichnen, Ableitungen bilden usw.? Identifizieren und analysieren sie mindestens drei Schemata genauer, die in Computeralgebraprogrammen auftreten. (Etwa: *solve, simplify und factor*).

Eine Konsequenz des Modulkonzeptes: Sehen Sie es nicht als besonders erstrebenswert und selbstverständlich an, dass Beispielaufgaben immer vollständig und linear vorgeführt werden! Eine solche Erwartungshaltung ist teilweise so stark ausgeprägt, dass Auslassungen sofort als *unzulängliche didaktische Fähigeit* (des Lehrenden) kritisiert werden. Für den jeweiligen Zweck des Beispiels unwesentliche modular abtrennbare Teile können, ja sollten durchaus ausgelassen werden. Für jegliche Arbeit mit Computern ist eine derartige modulare Aufbereitung von Beispielen eine wichtige Vorübung.

Weitere Beispiele: Anwendung des Binomialsatzes zur Auswertung etwa von $(1\text{-}x^2)^5$ anstelle von unmittelbarem distributiven Rechnen. Der Unterschied im Aufwand ist hier beträchtlich!

Die rechnerische Bestimmung einer Geradengleichung über die Zweipunkteformel. (Anstelle eines Ansatzes y=mx+b mit rechnerischer Bestimmung von m und b.)

1.8.2 Das Rollenkonzept bei gegebener Formel

(1.8.6) Wie geht man ein Problem an, wenn man über kein fertiges Lösungsschema verfügt? **W**ir wollen einen besonders wichtigen Spezialfall diskutieren, nämlich den, dass man erwartet, die Lösung mit Hilfe einer oder mehrerer zugehöriger Formeln zu erhalten. Das Wasserbeckenproblem war von dieser Art, das Brechungsgesetz die heranzuziehende Formel.

(1.8.7) Dann muss man die spezifische Problemsituation mit den Formeln verbinden und wir haben bereits mehrfach gesehen, dass bei dieser Verbindung die Buchstaben der Formeln zusätzliche Bedeutung erhalten. Und diese Bedeutung gibt an, in welcher Richtung man mit seiner Arbeit zu gehen hat, wie das Problem weiter zu behandeln ist! Erhält ein Buchstabe die Rolle eines äußeren Parameters, ist die weitere Behandlung eine ganz andere, als wenn er die Rolle einer Unbestimmten oder einer freien Variablen erhielte. Für alle diese Begriffe haben wir Beispiele besprochen!

(1.8.9) Nachfolgend geben wir eine Zusammenstellung der wichtigsten Rollen mit Kurzbeschreibung. Nochmals: Wenn Sie unsere bisherigen Probleme nicht alle mühelos gelöst haben, sollten Sie sich die unterschiedlichen Rollen gut einprägen und dann bei Beginn einer Problembehandlung für die auftretenden Größen nach der Rollenzuweisung fragen.

Schematische Übersicht zu den im Formelbereich auftretenden Rollen.

## Bezeichnungsbereich	
▲ Bezeichnungsgröße	Struktur liegt fest, Ziel ist Berechnung (Quantifizierung).
▲ Konstante	Fester Wert - feste Struktur, stets verfügbar.
▲ Hilfsgröße	Nützliche abkürzende Bezeichnung. Eventuell inhaltlich interpretierbar.
## Eingabebereich	
▲ Freie Variable	Jede einschlägige Einsetzung ist zulässig. Insbesondere sind Termeinsetzungen relevant.
▲ Äußerer Parameter	Jede Werteinsetzung bestimmt zugehörige Problemeinsetzung. Ziel: Werteinsetzung in Endresultat
▲ Freier Parameter	Zählt die Objekte einer problemrelevanten Menge . auf. Namensgebung dieser Objekte
▲ Unabhängige Variable	Das Problem verlangt Beziehung und Vergleich der erfaßten Größe für unterschiedliche Werte. Der Bearbeiter darf den Wert wählen
▲ Stumme Variable	Erfaßt und benennt Objekte **innerhalb** einer Rechenoperation
## Ausgabebereich	
▲ Abhängige Variable	Nicht der Bearbeiter, sondern das System legt den Wert fest.
## Verarbeitungsbereich	
▲ Unbestimmte	Ihr Wert ist durch Bedingungen festgelegt oder eingeschränkt, aber nicht bekannt. Ziel ist die Bestimmung zulässiger Werte.
▲ Lösung (einer Gl.)	Einsetzen der Lösung in die Gleichung gibt eine gültige (wahre) Aussage, mit der man arbeiten kann.

⇓ Gehen wir die angeführten Rollen einmal durch:
(1.8.10) Bei der Aufgabe zur Beckentiefe haben wir zunächst eine geometrische Skizze gemacht und in ihr eine Reihe von Größen mit Buchstaben bezeichnet. Zuerst ohne weitere Spezifikation. T,H und S etwa bezeichneten die Längen dreier wichtiger Strecken. Diese drei Buchstaben erhielten die Rolle von *Bezeichnungsgrößen.* Sie bezeichneten Dinge, mit denen wir weiter arbeiten wollten. Vgl. auch die Einführung der Binomialkoeffizienten in (1.3.4) und die Definition (1.4.1) von $\frac{a}{b}$ als *Bezeichnung der Lösung* von bx=a. .

Welche Buchstaben soll man zur Bezeichnung wählen? Man findet zwei Trends. Der eine geht von den mathematischen Rollen aus, bezeichnet Unbestimmte mit x,y,z,..., äußere Parameter mit a, natürliche Zahlen mit n usw. Für einen allgemeinen Bruch würde man vorzugsweise $\frac{a}{b}$ oder $\frac{p}{q}$ schreiben, nicht aber $\frac{a}{n}$. Der andere, besonders auch in der Physik beliebte Trend geht von den Bedeutungen und verbalen Bezeichnungen aus, für die das Bezeichnungssymbol eine möglichst gedächtnisstützende Abkürzung liefern soll. Einen Bruch schreibt man dann gerne $\frac{z}{n}$, um an *Zähler* und *Nenner* zu erinnern, ohne dass z Unbestimmte sein muss. Die jeweilige mathematische Rolle ist zusätzlich zu merken, während im ersten Fall die Bedeutung zusätzlich zu merken ist. Sie sollten beide Methoden kennen, verstehen und auch beide verwenden!

☐ Überlegen Sie sich wenigstens 5 Buchstaben, für die von Seiten der Physik die Tendenz einer bestimmten Bedeutungsfestlegung besteht. Etwa t für "Zeit".
(1.8.11) Eine *Konstante* dagegen gehört zu einer vereinbarten Bezeichnung für viele Aufgaben, die meist auch ohne ausdrückliche Nennung festliegt. Man denke an die Kreiszahl π.
(1.8.12) Führt man eine abkürzende Bezeichnung für einen längeren Ausdruck ein, dann erhält dieser Buchstabe die Rolle einer *Hilfsgröße.*
Formt man das Brechungsgesetz um zu $sin(\alpha_2) = n\sin(\alpha_1)$ mit $n = \frac{n_1}{n_2}$, dann hat n die Rolle einer Hilfsgröße. n ist abkürzende Bezeichung für $\frac{n_1}{n_2}$ und man darf jederzeit rückeinsetzen. Zu einer Hilfsgröße gehört also eine **Definitionsgleichung**, die festlegt, wie man diese Größe aus den durch die Problemsituation gegebenen

Größen erhält. Der weitere Umgang mit einer solchen Gleichung ist ein völlig anderer als der mit einer Bestimmungsgleichung. So ist n! eine abkürzende Bezeichnung des Produktes $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.
(1.8.13) Die Rolle der *freien Variablen* haben wir im Zusammenhang mit dem Distributivgesetz kennengelernt. Für sie sollte und kann man andere Terme - nicht nur Zahlen - einsetzen, um so neue gültige Formeln (wie die Binomialformeln) zu erhalten. Ebenso haben die Buchstaben in den Rechenregeln (1.4.6) für Brüche die Rolle freier Variabler.
(1.8.14) Anders steht es mit der extrem wichtigen Rolle des *äußeren Parameters.* Jede Wertwahl bestimmt hier eine **eigenes zugehöriges Problem (**"desselben Typs"**).** Und man zielt darauf ab, alle diese Probleme auf einen Schlag durch *allgemeine Rechnung* zu lösen. Beispiel: Quadratische Gleichungen. Die Rolle des äußeren Parameters legt also eine ganz bestimmte **Startrichtung des Denkens** fest ebenso wie Vorstellungen über die **anzustrebende Endform** des Resultates.
(1.8.15) Ein *freier Parameter* (nicht freie Variable!) dagegen bezieht sich auf ein und dieselbe Aufgabe. Seine Werte beschreiben Dinge, die in **derselben** Aufgabe auftreten. Beschreibt man beispielsweise eine Gerade durch eine Gleichung des Typs $y = mx + b$, dann legt jede Wahl von x einen Punkt dieser Geraden fest. Die Bildung $(x, mx + b)$ liefert die Koordinaten diese Punktes. x ist so etwa wie ein (mathematischer) Name für den Punkt. Bei Bedarf darf man innerhalb der Aufgabe geeignete Werte einsetzen.
(1.8.16) Eine *unabhängige Variable* ist etwas mehr als ein freier Parameter. Hier will man nicht nur die interessierenden Dinge aufzählen und benennen, sondern man will sie zusätzlich in Beziehung zueinander setzen, sie etwa vergleichen, ihre Differenz bilden usw. Kurz, man will die Objekte nicht nur benennen, sondern mit mehreren von ihnen **gemeinsam rechnen**. So wollten wir im Beckentiefeproblem den Schnitt mehrerer Lichtgeraden bestimmen. Diese wurden durch die Gleichungen $y = m(\varepsilon)x + b(\varepsilon)$ festgelegt. Hier hatte ε die Rolle einer unabhängigen Variablen. Ziel war es, den Schnitt voneinander verschiedener Geraden bestimmen und dann zum Grenzwert gleicher Geraden überzugehen. D.h. mit mehreren Geraden wurde **gemeinsam gerechnet** und **natürlich gehörten alle Geraden zu ein und derselben Aufgabe.**
y dagegen erhält die Rolle einer *abhängigen Variablen.* Hier bestimmt das erfaßte System, die Gerade, welcher Wert ausgegeben wird. Entsprechend ist beim Brechungsgesetz $sin\alpha = nsin\beta$ folgende Rollenzuweisung möglich: β unabhängige Variable, deren Wert vom Bearbeiter vorgegeben werden kann, n äußerer Parameter und α abhängige Variable, die über das System, repräsentiert durch die Formel festgelegt, bestimmt wird. Hier liegt es dann nahe, nach α aufzulösen, also zu $\alpha = asn(nsin\beta)$ überzugehen.

□ Je nach Problemsituation kann es zum Brechungsgesetz noch andere Rollenzuweisungen geben. Überlegen Sie sich einige davon mit zugehöriger physikalischer Aufgabenstellung.

(1.8.17) Hat man eine Größe bezeichnet, von der man weiß, dass sie bestimmte Eigenschaften hat, deren Wert man aber noch nicht kennt, dann erhält diese Größe die Rolle einer *Unbestimmten.* Im Zusammenhang mit der quadratischen Gleichung sind wir diesem Rollentyp begegnet. Man beginnt mit einem quadratischen Ausdruck, spezifiziert die Variable als Unbestimmte und erhält eine quadratische Gleichung, die - nach Aussondereung eventueller Sonderfälle - in die Normalform zu bringen ist und die schließlich über die p,q-Formel gelöst wird. Die einzuschlagende Richtung des Denkens ist hier klar: **Alle** Objekte, die die geforderten Eigenschaften besitzen, sind zu bestimmen. Damit ist auch die Endform einer solchen Aufgabenteiles klar: **Angabe oder Aufzählung aller gefundenen Lösungen.**
(1.8.18) Von der Rolle der Unbestimmten zu trennen ist die Rolle der *Lösung (einer Gleichung).* Weiß man, dass eine bestimmte Größe Lösung einer Gleichung ist, **dann darf man diese Gleichung für die Lösung als gültige Beziehung verwenden** und damit arbeiten. Beispielsweise kann man Gleichungsumformungen vornehmen und über die Gleichung interessierende Terme ausrechnen.
Nehmen wir an, Sie hätten herausgefunden, dass $a = w^{\frac{1}{3}} - 3w^{-\frac{1}{3}} - 3$ mit $w = \frac{29}{2} + \frac{11}{18}\sqrt{597}$ eine Lösung der Gleichung $(x + 3)^3 + 7x = 8$ ist, und Sie benötigen die Größe $(a + 3)^3$. Auswerten dieses Ausdrucks mit Hilfe des Binomialsatzes ist recht mühsam. Aber die Gleichung $(a + 3)^3 = 8 - 7a$ ist gültig. Und das gibt sofort das Resultat $(a + 3)^3 = -\frac{187}{2} - \frac{77}{18}\sqrt{597}$.
Eine Bestimmungsgleichung wird **nur** für Lösungen zur gültigen, nutzbaren Gleichung! Sonst ist sie zunächst nur eine Aufforderung nach bestimmten Objekten zu suchen.

1.8.3 **Die Endform**

⇓ Im Anschluß an die eigentliche Problemlösung sind meist noch eine Reihe von Arbeiten zu erledigen, die wir abschließend ansprechen wollen. Wir nennen drei Punkte: *Stimmigkeit, Resultatwiedergabe und Kommentare.*

(1.8.19) Stimmigkeit. Hat man wirklich das ursprünglich gefragte Problem gelöst, alle zugehörigen Punkte erfaßt oder bleiben Lücken? Zumindest sollte man den Aufgabentext **mit dem durch die Lösung erworbenen Wissensstand** nochmals durchgehen. Besitzt man Kontrollen, etwa in Form beherrschter Spezialfälle oder Vergröberungen? Ist die Antwort vollständig? Erfasst sie beispielsweise sämtliche zulässigen Fälle beteiligter äußerer Parameter? Obwohl die Ausführung dieser Punkte meist ausgesprochen einfach und naheliegend ist, unterbleibt sie vielfach, selbst wenn manifester Unfug als Resultat angeboten wird.
(1.8.20) Resultatwiedergabe. Das Resultat sollte in vernünftiger Form angegeben werden: Einerseits **vollständig** (so dass man nicht Teile mühsam im eigentlichen Lösungstext suchen muss) und andererseits in **überlegter Endform**. D.h. so, dass man damit modular weiterarbeiten kann, dass man das Resultat in einem anderen, größeren Zusammenhang einsetzen kann. Für typische physikalische Aufgaben heißt das vielfach: Zunächst die allgemeine Lösungsformel mit äußeren Parametern angeben und dann erst den eventuellen zugehörigen numerischen Wert. Und die Lösungsformel selbst sollte auch wieder eine durchdachte Form haben. Etwa: Typische Konstante mit der gesamten Einheit mal Zahlfaktor. Und ein Rechenausdruck wie $3a + 14a^2 + 9a - 2a^2$ sollte nie ohne ganz besonderen Grund in einer Endform auftauchen. Dort sollte $12a(a+1)$ stehen.
(1.8.21) Kommentare. Vielfach hat man beim Lösen der Aufgabe noch ergänzende oder überraschende Beobachtungen gemacht, die nicht direkt zur ursprünglichen Aufgabenstellung gehören, aber nahe liegen. Dann wird man noch ergänzende Kommentare hierzu anbringen.
(1.8.22) Nehmen wir etwa die Aufgabe aus (1.8.4). Eine die genannten Anforderungen erfüllende Antwort könnte wie folgt aussehen:

> Hat der gegebene Punkt die Koordinaten (x_P, y_P) und die Gerade die Steigung m, dann wird die gesuchte Normale durch folgende gleichung festgelegt: $y = y_P - \frac{1}{m}(x - x_P)$.
>
> Kommentar: Es ist nicht nötig, dass P auf der Geraden liegt, wie gefordert. Die Formel gilt allgemein.

Die Formulierung des Resultates zielt auf modularen Einsatz, weil nicht gesagt wird, **wie** - etwa über welche Geradengleichung - man y_P und m erhält. Nur die Größen selbst, ihre resultierenden Werte, werden benötigt.
(1.8.22) In Computeralgebrasystemen gibt es eine Reihe von Befehlen we "simplify" oder "expand" oder "factor" mit denen man Rechenausdrücke in Hinblick auf eine gewünschte Endform bearbeiten kann.