Einleitend wurde am Beispiel des Pendels die allgemeine Struktur physikalischen Vorgehens etwas erläutert und insbesondere diskutiert welche zentrale Rolle die Bahnkurven von Massenpunkten dabei spielen,

Die Ableitung wurde als **Änderungsrate** interpretiert (Unterschied Rate - Quote)

Beim ebenen Pendel ist die Winkelfunktion t$\longmapsto \alpha(t) = (\textit{Auslenkwinkel zur Zeit } t)$. von zentraler Bedeutung. Kennt man sie, so folgt die Bahnkurve über $\vec{r}(t) = L\vec{e}_r(\alpha(t))$.

Danach die folgenden Übungsaufgaben mit drei Schwerpunkten:

- Einarbeiten in die jeweilige Aufgabe - was häufig nicht ausreichend geschieht
- Entwickeln einer Lösungsstrategie
- Lösungsarbeit
- Formulierung des Resultates (nicht extra lang, ohne triviale Schritte aber korrekt und die Fragen beantwortend)

Ein Teil der Lösungen folgt im Anschluss an die Aufgaben!

■ 1) Für ein ebenes Pendel sei die Zeitabhängigkeit des Ausschlagwinkels t$\longmapsto \alpha(t)$ gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Bahnkurve $\vec{r}(t)$, die vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ und deren Betrag v(t)=$|\vec{v}(t)|$. Wie erhält man etwaige Umkehrpunkte?

■2) Ein Rad mit dem Radius R rollt geradeaus auf einer Ebene mit konstanter (skalarer) Geschwindigkeit V.

a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem K ein und fertigen Sie eine Skizze. Bestimmen Sie die Bahnkurve des Kreismittelpunktes.

b) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit? Numerische Konkretisierung: R=50 cm und V=10m/s.

c*) Jetzt bewege sich das Rad auf derselben Bahn wie in a) aber mit ungleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. Wie lautet seine Bahnkurve?

▼

Das ergibt für den Kreismittelpunkt

$$\vec{r}^K(t) = (0, Vt, R).$$

Für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ folgt mit R$\Delta\alpha = Vt$ und $\Delta t = t$

$$\omega = \frac{V}{R} = ...$$

usw.▲

■3) Gegeben eine Kreisbewegung $\vec{k}(t) = R \cdot \vec{e}_r(\omega t)$ mit R=100m und Periode T=40s. (Beachte $\omega = \frac{2\pi}{T}$). Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=15s? Wie groß ist dann seine vektorielle Geschwindigkeit? Wann bildet der Geschwindigkeitsvektor mit der positiven 1-Achse einen Winkel von 2? (Sie sollten wissen: $\vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi)$. Vgl. Formel von Euler in $\mathbb{C}$.)

■ 4) Wir betrachten das reibungsfreie Herabrutschen auf einer Wendeltreppe. Es wird (in geeigneten Koordinaten) durch eine Bahnkurve der folgenden Art beschrieben:

$$\vec{r}^K(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), H - \alpha t^2)$$

Mit welcher (momentanen vektoriellen) Geschwindigkeit rutscht der Körper zur Zeit t=2? Und wie groß ist der Betrag dieser Geschwindigkeit? Wie groß ist der Winkel, den die Geschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt mit der z-Achse bildet? Wann und wo erreicht der Körper die Höhe -3H?

■ 5) Was für eine Figur (Bild$\vec{r}$) wird durch die folgende Bahnkurve beschrieben?

$$\vec{r}(t) = 3\vec{e}_1\cos(\pi t) + 2\vec{e}_2\sin(3\pi t)$$

Wie groß ist die zugehörige vektorielle Geschwindigkeit?
Dasselbe (Figur und Geschwindigkeit) für

$$\vec{r}_b(t) = 3\vec{e}_1\cos(\pi t^3) + 2\vec{e}_2\sin(3\pi t^3)$$

■ 6) Sei G(x)=x+$\frac{1}{x}$.

1. (a) Wie lautet die Tangentenzerlegung von G um $x_0 = 2$?
   (b) Bestimmen Sie die Tangente (an den Graphen von G) zum Punkte x=3. Dasselbe für die zugehörige Normale.
   (c) Kurvendiskussion für G

- Vorschlag für die Stichwortliste
  - Definitionsbereich?
  - Symmetrie
  - Verhalten für x$\longrightarrow$ 0 und x$\longrightarrow \infty$ (Dominanz)
  - Vorzeichenbereiche?
  - Damit Skizze!
  - Was fehlt? Gezielte Suche.

■ 7) Diskutieren Sie die drei Funktionen F(x)=$e^x(4-x)^2$ und G(x)=$e^x(4-x^2)$ und H(x)=$2e^x(9-x)^2$. (Achtung H kann auf F zurückgeführt werden. Wieso? Geben Sie eine weitere Funktion K(x) an, die entsprechend auf G zurückgeführt werden kann.)
Stichwortliste für F und G:

- - Nullstellen mit Dominanzapproximation
  - Verhalten bei x=0
  - Verhalten für x$\rightarrow \pm\infty$
  - Vorzeichenbereiche ?
  - Skizze
  - Tangente von F bei x=0 aus zwei Weisen bestimmen!!! (Eine ohne die Ableitung zu verwenden)

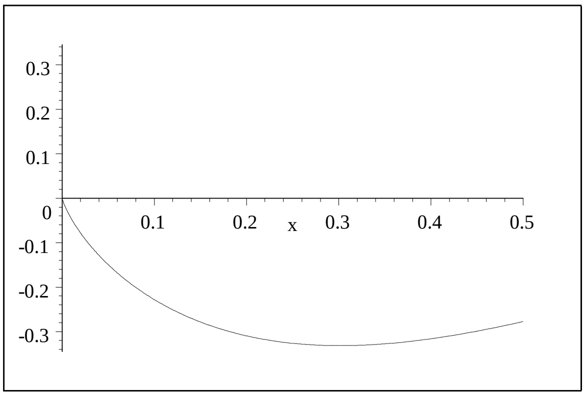
- Was bleibt zu klären

$$\frac{d}{dx}e^x(4-x)^2 = 8e^x - 6e^x x + e^x x^2 = e^x\,(x-2)\,(-4+x)$$
$$\frac{d}{dx}e^x\,(x-2)\,(-4+x) = 2e^x - 4e^x x + e^x x^2 = e^x\left(2-4x+x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}e^x(4-x^2) = 4e^x - e^x x^2 - 2e^x x = -e^x\left(-4+x^2+2x\right)$$
$$\frac{d}{dx}e^x\left(-4+x^2+2x\right) = -2e^x + e^x x^2 + 4e^x x = e^x\left(-2+x^2+4x\right)$$

■ 8) Diskutieren Sie die Funktion F(x)=$\frac{x}{1+x^2}\ln(x)$

- Vorschlag für die Stichwortliste
  - Definitionsbereich?
  - Nullstellen ? Verhalten für x$\longrightarrow\infty$ und x$\rightarrow 0$ Siehe Figur
  - Vorzeichenbereiche?
  - Damit Skizze!
  - Was fehlt? Gezielte Suche.



Zu 1.)

■ 1) Für ein ebenes Pendel sei die Zeitabhängigkeit des Ausschlagwinkels t$\longmapsto \alpha(t)$ gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Bahnkurve $\vec{r}(t)$, die vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ und deren Betrag v(t)=$|\vec{v}(t)|$. Wie erhält man etwaige Umkehrpunkte?

▼ Die Bahnkurve ist $\vec{r}(t) = L\vec{e}_r(\alpha(t))$, wobei L die Pendellänge ist. Es folgt $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}L\vec{e}_r(\alpha(t)) = L\dot{\alpha}(t)\vec{e}_t(\alpha(t))$ und $|\vec{v}(t)| = L|\dot{\alpha}(t)| = L|\omega(t)|$

Diskussion: Die momentane Winkelgeschw. als Vektor? Problem Was nimmt als Richtung? Antwort war etwas mühsam zu erhalten: Die Drehachse. ω ist die Änderungsrate des Winkels. ▲

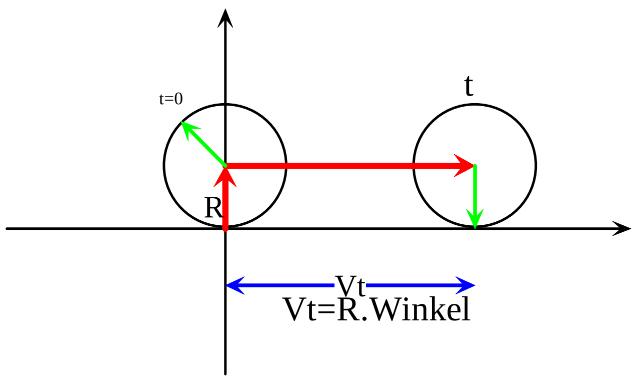
■2) Ein Rad mit dem Radius R rollt geradeaus auf einer Ebene mit konstanter (skalarer) Geschwindigkeit V.

a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem K ein und fertigen Sie eine Skizze. Bestimmen Sie die Bahnkurve des Kreismittelpunktes.

b) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit? Numerische Konkretisierung: R=50 cm und V=10m/s.

c*) Jetzt bewege sich das Rad auf derselben Bahn wie in a) aber mit ungleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. Wie lautet seine Bahnkurve?

▼



DAs gibt für die Bahnkurve des Kreismittelpunktes:

$$\vec{r}^K(t) = (0, Vt, H)$$

Laut Skizze ist Vt=$\Delta\alpha \cdot R$, wenn $\Delta\alpha$ der in der Zeit t abgerollte Winkel ist. Mit $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{Vt}{Rt} = \frac{V}{R}$ folgt für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{10m/s}{0.5m} = 20s^{-1}$

Ist die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant (ungleichförmig) und gegeben, dan benötigt man $\alpha(t)$ mit $\dot{\alpha}(t) = \omega(t)$. DAnn liegt ein Integrationsproblem vor. ▲

■3) Gegeben eine Kreisbewegung $\vec{k}(t) = R \cdot \vec{e}_r(\omega t)$ mit R=100m und Periode T=40s. (Beachte $\omega = \frac{2\pi}{T}$). Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=15s? Wie groß ist dann seine vektorielle Geschwindigkeit? Wann bildet der Geschwindigkeitsvektor mit der positiven 1-Achse einen Winkel von 2? (Sie sollten wissen: $\vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi)$. Vgl. Formel von Euler in $\mathbb{C}$.)

▼ Die Angaben der Aufgabe liefern $\omega = \frac{\pi}{20.}$. Also $\vec{k}(15s) = 100m \cdot \vec{e}_r(\frac{3\pi}{4})$. Weiter folgt $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{k}(t) = R\omega \cdot \vec{e}_t(\omega t)$ und $\vec{v}(15s) = ...$ Der gesuchte Winkel führt auf die Bedingung . $\cos(2) = \frac{(\vec{v}(t) \cdot \vec{e}_1)}{R\omega} = -\frac{R\omega \sin(\omega t)}{R\omega}$. Also $\sin(\omega t) = -\cos(2) = 0.416. Das$ gibt $\omega t = \arcsin(0.416) = 0.429\,04$ Der gesuchte Zeitpunkt ist

$$t = \frac{20}{\pi} 0.429\,04 s = 2.7s$$

Beachte: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{k}(t) = R\omega\vec{e}_t(\omega t)$. Ja nicht $\frac{d}{dt}\ \vec{k}(\frac{3\pi}{4}) = 0$ bilden. Erst ableiten , dann differenzieren! ▲

■ 4) Wir betrachten das reibungsfreie Herabrutschen auf einer Wendeltreppe. Es wird (in geeigneten Koordinaten) durch eine Bahnkurve der folgenden Art beschrieben:

$$\vec{r}^K(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), H - \alpha t^2)$$

Mit welcher (momentanen vektoriellen) Geschwindigkeit rutscht der Körper zur Zeit t=2? Und wie groß ist der Betrag dieser Geschwindigkeit? Wie groß ist der Winkel, den die Geschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt mit der z-Achse bildet? Wann und wo erreicht der Körper die Höhe -3H?

▼ Vorüberlegung: Alles Routine und frivial▲

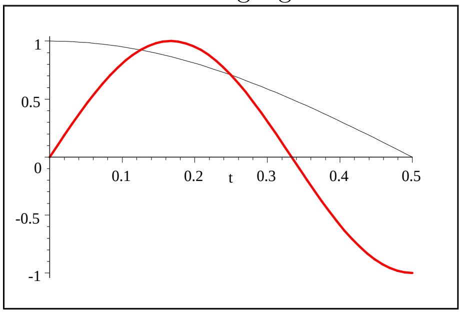
■ 5) Was für eine Figur (Bild$\vec{r}$) wird durch die folgende Bahnkurve beschrieben?

$$\vec{r}(t) = 3\vec{e}_1 \cos(\pi t) + 2\vec{e}_2 \sin(3\pi t)$$

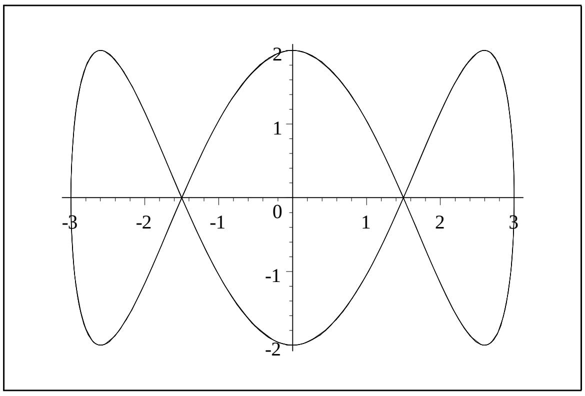
Wie groß ist die zugehörige vektorielle Geschwindigkeit?
Dasselbe (Figur und Geschwindigkeit) für

$$\vec{r}_b(t) = 3\vec{e}_1 \cos(\pi t^3) + 2\vec{e}_2 \sin(3\pi t^3)$$

▼ Bild$\vec{r}$ liegt in einem Rechteck um den Ursprung. Man startet z.B. bei t=0 mit $\vec{r}(0) = 3\vec{e}_1$ und arbeitet sich mit t vor. Für t=$\frac{1}{2}$ ist die 1-Koordinate bei Null, aber das Argument des Sinus ist von 0 auf $\frac{3}{2}$ angewachsen. D.h. die y-Koordinate ist bereits über einen Nulldurchgang beim Minimum angelagt (Figur: $\sin(3\pi)$ rot)



Die gesamte Figur hat das folgende Aussehen:



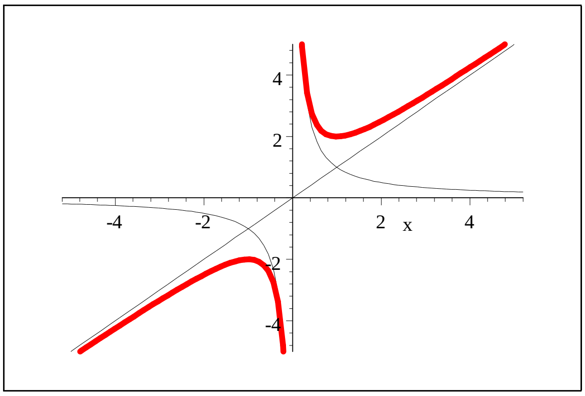
■ 6) Sei G(x)=x+$\frac{1}{x}$.

1. (a) Wie lautet die Tangentenzerlegung von G um $x_0 = 2$?
   (b) Bestimmen Sie die Tangente (an den Graphen von G) zum Punkte x=3. Dasselbe für die zugehörige Normale.
   (c) Kurvendiskussion für G

- Vorschlag für die Stichwortliste
  - Definitionsbereich?
  - Symmetrie
  - Verhalten für x$\longrightarrow$ 0 und x$\longrightarrow \infty$ (Dominanz)

– Vorzeichenbereiche?
– Damit Skizze!
– Was fehlt? Gezielte Suche.

▼ Nur noch wenige haben Probleme mit den ersten FRagen:
a) G(2+Δx) $= \frac{5}{2} + \frac{3}{4}\Delta x + \Delta x R_G(2, \Delta x)$
b) G(3+Δx) $\approx \frac{10}{3} + \frac{8}{9}\Delta x$ oder y=$\frac{10}{3} + \frac{8}{9}(x-3)$ (Normalform hier wenig sinnvoll!) Normale: y=$\frac{10}{3} - \frac{9}{8}(x-3)$
c) Recht gut: $x + \frac{1}{x}$



■ 7) Diskutieren Sie die drei Funktionen F(x)=e$^x(4-x)^2$ und G(x)=e$^x(4-x^2)$ und H(x)=2e$^x(9-x)^2$. (Achtung H kann auf F zurückgeführt werden. Wieso? Geben Sie eine weitere Funktion K(x) an, die entsprechend auf G zurückgeführt werden kann.)

Stichwortliste für F und G:

- – Nullstellen mit Dominanzapproximation
  – Verhalten bei x=0
  – Verhalten für x→ ±∞
  – Vorzeichenbereiche ?
  – Skizze
  – Tangente von F bei x=0 aus zwei Weisen bestimmen!!! (Eine ohne die Ableitung zu verwenden)
  – Was bleibt zu klären?

▼ Es gilt:

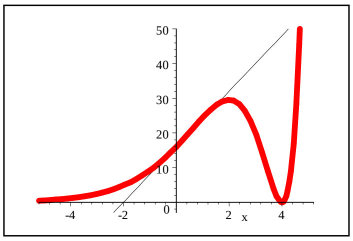
$$\begin{aligned} H(x) &= e^x(9-x)^2 = e^x(4-(x-5))^2 \\ &= e^5 e^{x-5}(4-(x-5))^2 \end{aligned}$$

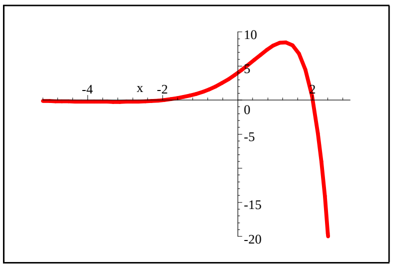
Der Graph von F ist um $x_0 = 5$ in x-Richtung zu verschieben und mit A=e^{5}90 in y-Richtung zu multiplizieren.

Wie sieht die Tangente von F bei x=0 aus? Man kann sie ohne Ableitung wie folgt erhalten: (e$^x = 1+x+...$ bei x=0)

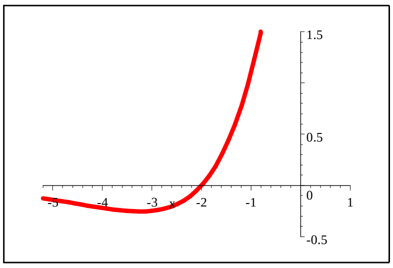
$$\begin{aligned} F(x) &= (1+x+...)(4-x)^2 \\ &= (1+x+...)(16-8x+x^2) \\ &= 16+8x+... \quad \text{Also } \boxed{\text{y=8x+16}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stichwortliste gab es meist recht zügig ordentliche Skizzen. Hier die Graphen:
$e^x(4-x^2)$





und nochmals das Minimum von G:



Noch zwei der Ableitungen (mit dem Computeralgebrasystem berechnet)::

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{d}{dx}e^x(4-x)^2 = 8e^x - 6e^x x + e^x x^2 = e^x\,(x-2)\,(-4+x)$$

$$\mathrm{F}''(x) = \frac{d}{dx}e^x\,(x-2)\,(-4+x) = 2e^x - 4e^x x + e^x x^2 = e^x\left(2-4x+x^2\right)$$

5.10. 09

$\boxed{\text{Kap. 12.1}}$ durchgesprochen (Hauptgleichung, technische Form des Hauptsatzes, Eigenschaften des Integrales, andere Schreibweisen)
$\boxed{\text{Kap. 12.3}}$ begonnen!

- Typisierung des Integrales
- Inspektion des Integranden
- Direkte Integration , dazu die Tabelle (12.3.9)
- $\frac{1}{\alpha}$– Regel (zu den typisch physikalischen Argumenten $\alpha x + \beta$)
- Umkehrung Kettenregel
- Übersicht "Umformung des Integranden" und dazu **Partielle Integration**

Erste Übungen:

□ Was ist $\frac{d}{dx}\int_x^b dt$ f(t)=-f(x)?

□ Was ist $\int_a^x dt\left(\int_b^t ds f(s)\right)$? Etwa $\int_0^x dt\left(\int_1^t dss^2\right)$?

Und weiter $\int_a^x dt \left(\int_b^t ds f(s,t)\right)$ Etwa

$$I(x) = \int_0^x dt \int_1^t ds(s^2+2t)$$

Fingerübungen für das Wissen/Erraten einer Stammfunktion

$\mathrm{I}_1 = \int_0^3 dx\ x^3$	$\mathrm{I}_2 = \int_1^3 dt\ t^3$	$\mathrm{I}_3 = \int_{-1}^3 dx\ (t+x)$	$\mathrm{I}_4 = \int_1^3 du\ x^3$
$\mathrm{I}_5 = \int_{-1}^3 dx\ x^4$	$\mathrm{I}_6 = \int_0^\pi da\ \sin a$	$\mathrm{I}_7 = \int_0^1 dx\ (1-7x)^7$	$\mathrm{I}_8 = \int_{-1}^1 dx\ \frac{\pi+1}{1+x^2}$
$\mathrm{I}_9 = \int_0^1 \frac{dx}{1+\pi^2x^2} = \mathrm{atn}(\pi x)\frac{1}{\pi}\vert_0^1$	$\mathrm{I}_{10} = \int_1^2 \frac{dt}{t}$	$\mathrm{I}_{11} = \int_0^a dx\ \frac{1}{a+x}$	$\mathrm{I}_{12} = \int_a^{a+1} du \frac{2}{1+au}$
$\mathrm{I}_{13} = \int_0^{\frac{T}{2}} dx\ \sin(\omega x)\quad \mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$	$\mathrm{I}_{14} = \int_0^A dx\ e^{-ax}$	$\mathrm{I}_{15} = \int_0^1 dx\ e^{-2x+3}$	$\mathrm{I}_{16} = \int_0^x dt\ e^{-2xt}$
$\mathrm{I}_{17} = \int_0^1 dx\ (1+2x+3x^2)$	$\mathrm{I}_{18} = \int_{-1}^1 dt\ (1+7x^2t)^{17}$	$\mathrm{I}_{19} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+7}$	

Und jetzt Beispiele für die **Umkehrung Kettenregel** usw.

$\mathrm{K}_1 = \int_{-1}^2 dt(2-11t)^5$

$\mathrm{K}_2 = \int_{-1}^2 dt\cdot t\cdot(2-2t^2)^5) = \frac{1}{-4}\int_{-1}^2 dt(-4t)(2-2t^2)^5 = ...$
$\mathrm{K}_3 = \int_{-1}^2 dt\cdot(2t+3)\cdot(2-2(t^2+3t+5))^5$

$$\begin{array}{ccccc} & -2(2t+3) & \rightarrow & & \searrow \\ x \rightarrow\nearrow\!\!\rightarrow & 2-2(t^2+3t+5)=y & f(y)=y^5 & & \rightarrow * \rightarrow \\ & & \boxed{\mathrm{F(y)}}??? & & \end{array}$$

$\mathrm{K}_4 = \int_0^1 dxx\sqrt{3+4x^2} = \frac{1}{8}\int_0^1 dx(8x)(3+4x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}(3+4x^2)^{\frac{3}{2}}\vert_0^1 = ..$
$\mathrm{K}_5 = \int_0^\pi dt\cos(\omega t)\sin(\sin(\omega t)) = \frac{1}{\omega}\int_0^\pi dt\,(\omega\cos(\omega t))\sin(\sin(\omega t))$

$\int dxx\sin(x^2) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$
$\int dxxe^{-x^2} = -\frac{1}{2}\int dx(-2x)e^{-x^2} = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$

$\mathrm{K}_7 = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 2\int_0^A dx\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 4(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}\vert_0^A = ..$

$\mathrm{K}_8 = \int_0^1 dxx\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx(-2x)\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\vert_0^1$

$\int dx\frac{e^x}{(1+17e^{2x})} = \frac{1}{\sqrt{17}}\int dx\frac{\sqrt{17}e^x}{1+\left(\sqrt{17}e^x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{17}}atn(\sqrt{17}e^x)$
$\frac{1}{19}\int dx\frac{19e^x}{(17+19e^x)^{21}} = -\frac{1}{19}\frac{1}{20}\frac{1}{(17+19e^x)^{20}}$

$\int dt\frac{t}{2+3t^2} = \frac{1}{6}\int dt6t\frac{1}{2+3t^2} = \frac{1}{6}\ln|2+3t^2| = \frac{1}{6}\ln(2+3t^2)$

$\int dy\frac{f'(y)}{f(y)} = \int dyf'(y)\cdot\frac{1}{f(y)} = \ln|f(y)|$
$\int dx\tan x = -\int dx\frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln(\cos x)$

$\int \mathrm{dx}\frac{1}{\sin x} = \int \mathrm{dx}\frac{\sin x}{\sin^2 x} = \int \mathrm{dx}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x} \qquad \int\frac{dy}{1-y^2}$
Und noch ein Beispiel für partielles Integrieren:

$$\int_0^A dt\arctan/t) = \int_0^A dt\ 1\arctan/t) = [t\ \arctan(\mathrm{t})]_0^A - \int_0^A dt\frac{t}{1+t^2} = ...$$

6.10.09

Sie sollten ein Integral möglichst nicht nur mechanisch automatisch berechnen, sondern die Rechnung verständig und offen verfolgen! Dazu Beispiele

$\boxed{F(T)=\int_0^T dte^{-at} \quad \text{wobei s Einheit von t}}$

Inspektion: ■ Einheit von F,T,a? ■ Integralabschätzung ? $\leq$ F $\leq$? ■ Wert ? (Methode)

$\boxed{G(H,a)=\int_0^H \frac{dxx}{a^2+x^2} \quad \text{wobei cm Einheit von x}}$

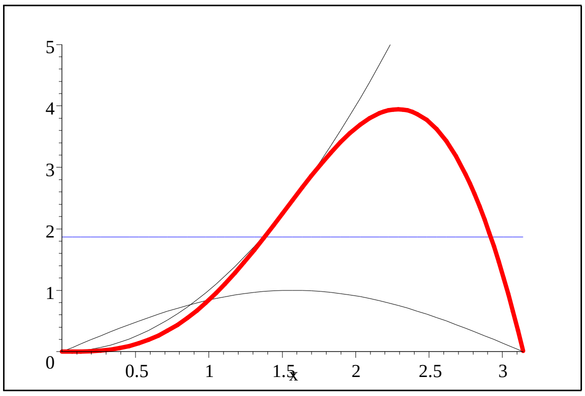
Inspektion: ■ Einheit von G,H,a? ■ G(H,a)=$\int_0^{a\frac{H}{a}} \frac{\frac{dx}{a}\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ Interpretation? ■ Abschätzung und Wert?

$\boxed{H(C)=\int_0^{c^{-4}} dx\frac{x^3}{\sqrt{1+Cx^4}} \quad \text{wobei m Einheit von x}}$

■ Einheit von H, C? ■ Abschätzung ■ Wert ■ Bezug zu $\int_0^A du\frac{u^3}{\sqrt{K^4+u^4}}$?

$\boxed{P=\int_0^\pi dx\ x^2\sin(x)}$ ■ Einheit von P und x? ■ Wert? (Methode??) ■ Bezug zu Q(T)=$\int_0^{\frac{T}{2}} dt$ $t^2\sin(\omega t)$? ■ Resultatinterpretation mit Hilfe des Graphen

$x^2\sin(x)$



Numerisch:

$\int_0^\pi x^2\sin(x)dx = 5.869\,6 \qquad \frac{5.869\,6}{\pi} = 1.868\,4$

Besprechung der Partialbruchmethode

Das Computerprogramm zerlegt in Partialbrüche, aber mit den üblichen (ungünstigen) Variablen! Beispiel (mit ergänzter Endform):

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{((x-1)^2+4)(x+2)} &= -\frac{3}{13\,(x+2)}+\frac{1}{13}\frac{1+3x}{x^2-2x+5}\\ &= -\frac{3}{13\,(x+2)}+\frac{1}{13}\frac{4+3(x-1)}{(x-1)^2+4}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-1x+2}{((x-1)^2+4)(x+2)} &= \frac{8}{13\,(x+2)}+\frac{1}{13}\frac{-7+5x}{x^2-2x+5} \\
&= \frac{8}{13\,(x+2)}+\frac{1}{13}\frac{-17+5(x+2)}{x^2-2x+5}
\end{aligned}
$$

Zum Problem $\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+1}$ Im Skript (6.3.44)
Wie kann man mit dem Computeralgebraprogramm vorgehen? ♦Zunächst die Nullstellen suchen:
$x^4+1=0$, Solution is: $\left\{x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\},\left\{x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\},\left\{x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\},\left\{x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$
♦ Diese paarweise zusammenmultiplizieren. danach Probe
$\left(\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)=x^4+1$
♦ Das gibt die gewünschte Faktorisierung!
♦ Jetzt tut das Programm es. "Partialbruch" liefert:
$\frac{1}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{4}\frac{-2+x\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}\frac{2+x\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$
♦ Das muss noch integriert werden. Dazu liefert das Programm die Stammfunktionen:
$-\frac{1}{4}\int\frac{-2+x\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=-\frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\left(-x^2+x\sqrt{2}-1\right)-\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}\left(-2x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$
und
$\frac{1}{4}\int\frac{2+x\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}\left(2x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$
Das muss noch zusammengefasst und vereinfacht werden.

Ableiten nach einem Parameter: (a>0)

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{a+x^2} &= \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}\overset{(1/\alpha)}{=}\frac{1}{a}\sqrt{a}atn\frac{x}{\sqrt{a}} \\
\frac{\partial}{\partial a}a^{-\frac{1}{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} &= -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}+a^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{2}a^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)-\frac{xa^{-2}}{2(a+x^2)}
\end{aligned}
$$

Jetzt darf man a=1 setzen!

$$
\int\frac{dx}{(a+x^2)^2}=-\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dx}{(a+x^2)^1}=......
$$

Das gibt für a=1:

$$
\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{x}{2(1+x^2)}
$$

Probe:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{x}{2(1+x^2)}\right)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$
Damit ist gezeigt, wie man den letzten für die Partialbruchzerlegung benötigten Integraltyp erhält.

7.10.2009

Substitutionsmethode wiederholt

Dann Kap.12.2 mit der inhaltlichen Bedeutung des Integrales! Die linke Seite der Hauptgleichung, also
$\vec{f}\cdot(b-a)=\int_a^b dxf(x)$ wurde damit präzisiert zu
$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(z_i)\right)\approx\vec{f}\cdot(b-a)=\int_a^b dxf(x)$

und es wurde auf mehrere Weisen gezeigt, welche Bedeutung das Zeichen $\approx$ hier hat.

Zur Ergänzung logarihmische und doppelt logarithmische Auftragung besprochen.

Beispiel: Substitution x=tan$\frac{u}{2}$ (u alt)

1) x=tan$\frac{u}{2}$ u=2atn(x) sin(u)=$\boxed{????}$ cos(u)=$\boxed{????}$

2) du=dx$\boxed{\frac{2}{1+x^2}}$

3) $\int_a^b du\rightarrow\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} dx$

Nebenrechnungen:

a) tanv=$\frac{\sin v}{\cos v}$ $\tan^2 v=\frac{\sin^2 v}{1-\sin^2 v}$ (1-sin^2v) $\tan^2 v=\sin^2 v$ $\sin^2 v=\frac{\tan^2 v}{1+\tan^2 v}$

$\boxed{\sin\frac{u}{2}=\frac{\tan\frac{u}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{u}{2}}}}$ $\cos\frac{u}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{u}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) cosu=$\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}=\boxed{\frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos u}$

$\sin^2 u=1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ $\boxed{\sin u=\frac{2x}{1+x^2}}$ oder

Beispiel: Für unbestimmte Integration. Am Ende x=tan$\frac{u}{2}$ einsetzen!

Beispiel (Substitution und Partialbruch)

$\int du\sin^4 u=\int dx\frac{2}{1+x^2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4=2\int dx\frac{x^4}{(1+x^2)^5}$

$\int\frac{x^4}{(1+x^2)^5}dx=\frac{1}{8}\frac{x}{(1+x^2)^4}-\frac{3}{16}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{1}{64}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{128}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{128}\arctan x$

Beispiel : Umformung des Integranden. ei spezieller Trick,

$\sin^4 u=\sin^2 u(1-\cos^2 u)=\sin^2 u-\frac{1}{2}\sin^2(2u)=$

$\sin^2 v=\frac{1}{2}(\sin^2 v+\sin^2 v)=\frac{1}{2}(\sin^2 v+1-\cos^2 v)=\frac{1}{2}(1-\cos(2v))$ usw

---

■ 9) Wandeln Sie das folgende Integral mit der (Eulerschen) Substitution u=x+$\sqrt{x^2-x-2}$ in ein lösbares Integral um. Über welche x>0 darf integriert werden?

$$J=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-2}}.$$

a) Geben Sie eine numerische Abschätzung des Integrales (0$\leq J\leq A$ Wert von A?)

■ 10) Diskutieren Sie die Substitution u=tan($\frac{x}{2}$) . (u neu, x alt).Was leistet Sie? Hierzu gehört, dass Sie im ersten Schritt (des Substitutionsschemas) sinx und cosx durch u ausdrücken.

■ 11) Berechnen Sie I(A)=$\int_0^A dx\ \sqrt{1+x^2}$ mit Hilfe der Substitution x=sh(u)=$\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$.

a) Wie ist die Substitution abzuändern für $\int_0^A dx\ \sqrt{1+ax^2}$ mit a>0?

b) Probieren Sie es alternativ mit der Substitution $\sqrt{a+bx+cx^2}=xt+\sqrt{a}$, die natürlich wieder von Euler ist.

c) Was ergibt die (erste) Substitution für das Integral $\int_0^1 dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$, was für $\int_0^1 dx(1+x^2)^2$?

Logarithmische Auftragung

n(t)=N$_0e^{-at}$??? a

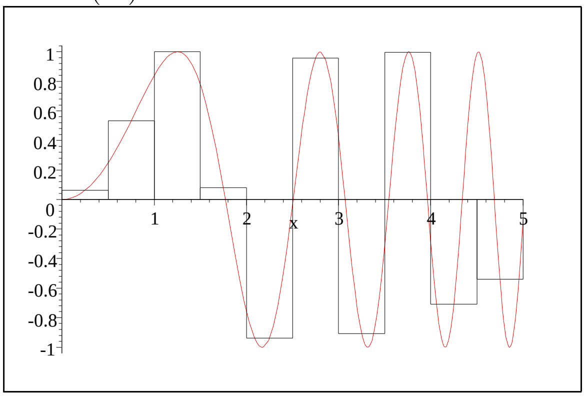
Datensatz n$_i=n(t_i)$ messen

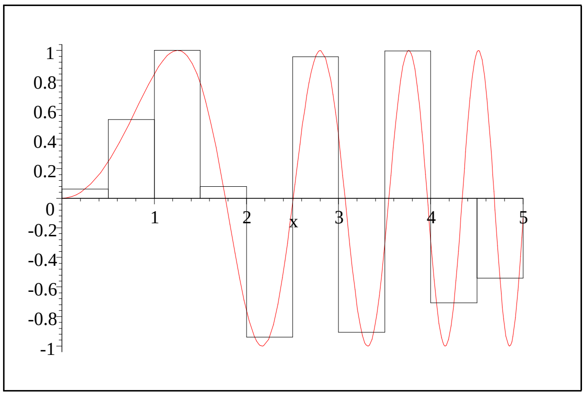
$\boxed{\text{ln(t)=-at+logN}_0}$

$\int_0^5\sin(x^2)dx=0.527\,92$

$\int_0^5\sin(x^2)dx$ Approximate integral (left boxes) is$\frac{5}{10}\sum_{i=0}^{9}\sin\frac{1}{4}i^2=0.937\,79$

sin(x^2)

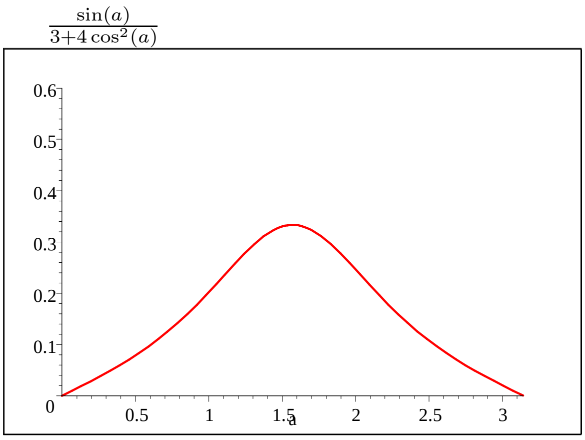




$\int_0^5 \sin(x^2)dx$ Approximate integral (midpoint rule) is$\frac{1}{20}\sum_{i=0}^{99}\sin\left(\frac{1}{20}i+\frac{1}{40}\right)^2 = 0.526\,88$

$$\frac{1}{A}\int_0^A \sin^2 x dx = \frac{-\frac{1}{2}\cos A\sin A+\frac{1}{2}A}{A} = -\frac{1}{2}\frac{\cos A\sin A-A}{A} = +\frac{1}{2} - \frac{\cos A\sin A}{A}$$

$$\int_0^\pi da\frac{\sin(a)}{3+4\cos^2(a)}$$



Beispiele zu Umkehrung Kettenregel geübt. Das gab wieder Probleme!!!

$$\int_0^\pi da\frac{\sin(a)}{3+4\cos^2(a)} = -\int_0^\pi da(\text{-sina})\frac{1}{3+4\left(\boxed{\text{cosa}}\right)^2} =$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[atn(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(a))\right]_0^\pi = ... \qquad \text{weil:}$$

$$\text{f(y)}=\frac{1}{3+4y^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}y\right)^2} \qquad \text{F(y)}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}atn(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(a))$$

$$\text{I}=\int_0^1 dx \;\; x^3\cdot\boxed{\left((2-x^4)^5-x^8\right)} = ...$$

Wegen der Problme suchten wir nacheinander:

$$g'(x) = 4x^3 \quad \text{g(x)=x}^4 = y \quad \text{f(y)=(2-y)}^5 - y^2 \quad \text{F(y)=-}\frac{1}{6}(2-y)^6 - \frac{1}{3}y^3$$

Das Integral $\text{I}=\int_0^1 dx \;\; x^3\cdot\boxed{\left((2-x^4)^5-x^8\right)}$

kann natürlich mit der Substitutionsregel (unökonomisch) gelöst werden:

1) $\text{u=x}^4 \quad \text{x=u}^{\frac{1}{4}}$

2) $\text{dx=du}\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}$

3) $\int_0^1 dx \to \int_0^1 du$

$$\text{I}=\frac{1}{4}\int_0^1 du \; \text{u}^{-\frac{3}{4}} \; \text{u}^{\frac{3}{4}}\left((2-u)^5-\left(u^{\frac{1}{4}}\right)^8\right) = \frac{1}{4}\int_0^1 du((2-u)^5-u^2)$$

wie oben!

$$\text{J}=\int_0^A dx\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \int_0^A dxe^x\frac{e^x-1}{e^x+1} = ..$$

$$g'(x) = e^x \quad \text{g(x)=e}^x = y \quad \text{f(y)=}\frac{y-1}{y+1}\text{=}\frac{(y+1)-2}{y+1} = 1-2\frac{1}{y+1} \quad \text{F(y)=y+2ln|y+1|}$$

$$K=\int_1^2 \frac{dx}{x}(3+\sin(\ln(x))) = [3\ln x - \cos(\ln x)]_1^2 =$$
$$=3\ln 2 - \cos(\ln 2) - 0 + 1 = 2.310\,2$$

$g'(x) = \frac{1}{x}$ g(x)=lnx= y f(y)=3+sin(y) F(y)=3y-cosy...

$$\int_0^2 \frac{dxx}{(2+3x^2)^5} = \frac{1}{2}\frac{1}{-12}\frac{1}{(2+3x^2)^4}|_0^2 = \frac{1}{24}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{14^4}\right]$$
$$f(y)=\frac{1}{(2+3y)^5} = (2+3y)^{-5} \quad F(y)=\frac{1}{-12}(2+3y)^{-4}$$

Jetzt ging es besser. Aber Probleme mit $1/\alpha bei$ einfachen Potenzen:

$$\int dx(2+3x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(2+3x)^{\frac{1}{2}}$$
$$\int dx(2+\tfrac{1}{3}x)^{-\frac{3}{2}} = -6(2+\tfrac{1}{3}x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\int da(x-a)^{2x} = -\frac{1}{2x+1}(x-a)^{2x+1}$$
$$\int da(a-2)^{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}(a-2)^{\frac{6}{5}}$$

Viele weitere Beispiele noch zum Ende vom 5.9.

Verfolgen und Verstehen einer Rechnung

Bestimmen eine Rekursionsformel für $\boxed{I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, \sin^{2n} x}$ n>0

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin x \cdot \sin^{2n-1} x \\
&= \left[-\cos x \cdot \sin^{2n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos x \cdot (2n-1)\cos x \sin^{2n-2} x \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^2 x \sin^{2n-2} x \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx (1-\sin^2 x)\sin^{2n-2} x = (2n-1)(I_{2n-2} - I_{2n})
\end{aligned}$$

$2nI_{2n} = (2n-1)I_{2n-2}$ $\boxed{I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}}$ n=1,2,3

$I_0 = \frac{\pi}{2}$ offensichtlich!

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$
$$I_4 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{usw.}$$

(2n)!!=(2n)(2n-2)....2 (2n-1)!! =(2n-1)....3·1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \text{ sinx } \sin^{n-1}x \quad n>1$$
$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos x \cdot (n-1)\cos x \sin^{n-2} x$$
$$=(n-1)\int dx(1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$
$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 x=-\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$
$$\mathrm{I}_3=\frac{2}{3}$$
$$\mathrm{I}_5=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}$$
$$\mathrm{I}_7=\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\frac{16}{35}\qquad \text{usw!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x dx=\frac{16}{35}$$

Text:

Die Integrale $\mathrm{I}_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,\sin^{2n}x$ sollen für n=0,1,2,3,... berechnet werden. Dazu integrieren wir $\mathrm{I}_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin x{\cdot}\sin^{2n-1}x$ partiell und finden sofort $\mathrm{I}_{2n}=(2n-1)(I_{2n-2}-I_{2n})$. Das ergibt die Rekursionsformel $\boxed{\mathrm{I}_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-}}$ für n=1,2,3.... Nun ist

$\mathrm{I}_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ 1=\frac{\pi}{2}$. Es folgt $\mathrm{I}_2=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ und $\mathrm{I}_4=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$ usw.

Mit vollständiger Induktion folgt $\boxed{\mathrm{I}_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}}$.

Flugparabelaufgabe.

Viele Daten zu einem ganzheitlichen "Bild" zusammenfügen

$\vec{r}_0=\vec{0}$, $\vec{v}_0=(0,3,4)$ und $\vec{g}=(0,0,-10)$ sowie $t_0=-2$. Wann, wo und unter welchem Winkel trifft die Flugbahn die Ebene E mit $\boxed{\vec{x}_E(u,v)=(u,v,v)}$? Wo liegt der Scheitel? $\boxed{\text{Skizze!}}$

$\vec{x}_E(u,v)=(u,v,v)=u(1,0,0)+v(0,1,1)$

$\vec{r}(t)=(0,3T,4T-5T^2)\quad \vec{v}(t)=(0,3,4-10T)$

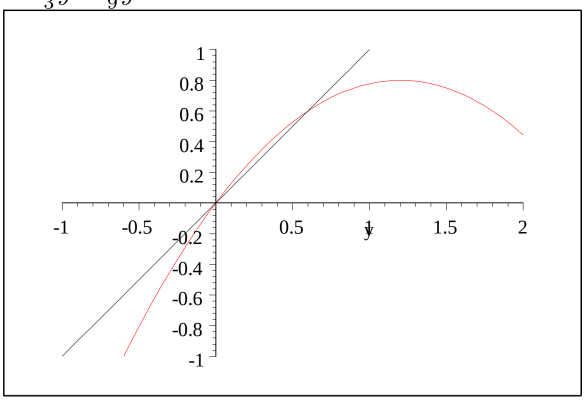
Also: $\boxed{\text{u=0}}$ und $\begin{array}{l}3\text{T=v}\\ 4\text{T-5T}^2=v\end{array}$. Also $5\mathrm{T}^2-T=0$ / $\mathrm{T}_1=0$ und $\mathrm{T}_2=\frac{1}{5}$. Es interessiert $\mathrm{t}_2=\mathrm{T}_2+t_0=-\frac{9}{5}$ (Wann?) . Einsetzen gibt $\vec{r}(-\frac{9}{5})=(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}-\frac{1}{5})$ (Wo?). Die zugehörige Geschwindigkeit ist $\vec{v}(-\frac{9}{5})=(0,3,2)$. Wir nehmen einen nach unten zeigenden

Normalenvektor der Ebene $\vec{n}=(0,1,-1)$ und erhalten für den Winkel $\cos(\alpha)=\frac{2}{}$

Scheitel $\mathrm{T}=\frac{2}{5}$

Wie erhält man bei gegebener Parametrisierung $t\longmapsto\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ die zugehörige Koordinatengleichung y=y(x)? In unserem Fall gab das:

$\frac{4}{3}y-\frac{5}{9}y^2$



$\boxed{\mathrm{J}_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}}$ Stammfunktion?? $\mathrm{J}_1 = atn(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x(1+x^2)^{-n} &= (1+x^2)^{-n} + x\cdot(-n)(2x)(1+x^2)^{-n-1} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^n} - 2n\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^n} - 2n\frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1-2n}{(1+x^2)^n} + 2n\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(1+x^2)^n} &= (1-2n)J_n + 2nJ_{n+1} \\
J_{n+1} &= \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n
\end{aligned}$$

n=1

$\mathrm{J}_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}J_1$

n=2

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}J_1\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}J_1
\end{aligned}$$

Probe: Stimmt n=3

$$\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}J_1\right) \\
&= \frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}J_1
\end{aligned}$$

n=4

$$\begin{aligned}
J_5 &= \frac{1}{8}\frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{7}{8}J_4 \\
&= \frac{1}{8}\frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{7}{8}\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{7}{8}\frac{5}{6}\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} \\
&\quad + \frac{7}{8}\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{7}{8}\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}J_1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{J}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[[2n-1]]_k}{[[2n]]_{k+1}}\frac{x}{(1+x^2)^{n-k}} + \frac{[[2n-1]]_n}{[[2n]]_n}\mathrm{atn(x)}}$$

$$[[N]]_k = \Pi_{j=0}^{k-1}(N-2j)$$

Kurvenlänge - Bogenlänge:

Param	$\vec{r}(t) = ...$	$\begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t\cos(\omega t) \\ t\sin(\omega t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$
V.Geschw	$\vec{v}(t) = ...$	$\begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}$	$t\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$
Betrag	$\lvert\vec{v}(t)\rvert = ..$	$\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$	$t\omega$ t>0	$\sqrt{1+4x^2}$
Bogenl.	$\int_{t_1}^{t_2} dtv(t) =$	...	$\omega\int_0^{4\pi} dtt = ...$	$\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+4x^2}$

z.B $\int_1^2 \sqrt{1+4x^2}dx = \sqrt{17} - \frac{1}{4}\ln\left(-4+\sqrt{17}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) = 3.1678$

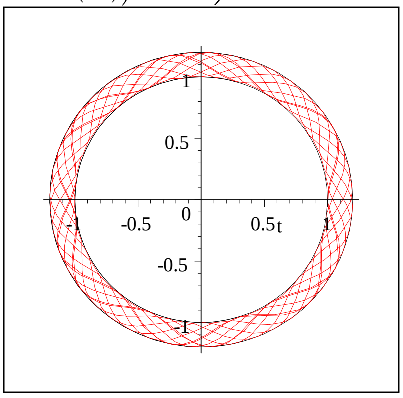
oder

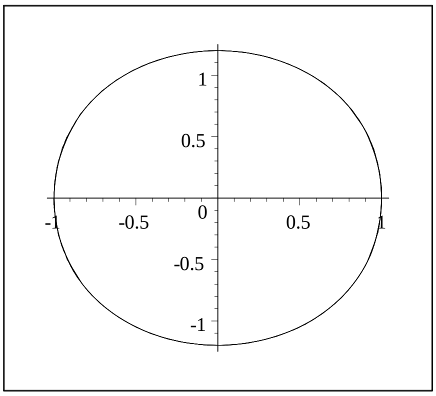
$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln\left(-2+\sqrt{5}\right) = 1.4789$$

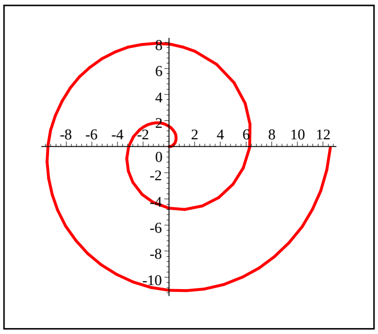
$$\begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1.2\cos t \\ 1.2\sin t \end{pmatrix} = t\vec{e}_r(t)$$

Polardarstellund einer Kurve: $t \longmapsto r(t)\vec{e}_r(t)$. Vgl. Kap. 11.1.8 Etwa

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \left(1+0.2\sin^2(\pi t)\right)\cdot\cos t \\ \left(1+0.2\sin^2(\pi t)\right)\cdot\sin t \end{pmatrix}$ mit Bild







$$8\pi^2 = 78.957$$

Weiter mit dem elliptischen Integral

$$B_{ell} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2(t)}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2(1 - \sin^2(t))}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t}$$
$$= b \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^1} \sin^2 t} = b \boxed{\int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

Das ist die Form mit der man arbeitet.

Angedeutete Idee: Entwickle nach Binomi unter dem Integralzeichen, vertausche (unendliche!!) summe und Integration und nehme nur die ersten Terme. Die Integrale lassen sich dann alle lösen: Für $k^2 < 1$:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} = (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-k^2 \sin^2 t) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-k^2 \sin^2 t)^2 + ...$$
$$= 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 t + \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2} k^4 \sin^4 t + ...$$

Einsetzen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^2 t - \frac{k^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^4 t + ...$$

Wir sehen: Die Integrale wurden alle oben berechnet!

Mathematisches Problem: Darf man die unendleiche(!) Summation und die Integration vertauschen?

Skalarfelder

Das einschägige Kapitel wurde durchgegangen

- Was ist ein Skalarfeld, wie shen zugehörige Rechenterme aus?
- Globale Verhaltensveranschaulichung (analog zum Funktionsgraphen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Niveaumengen)
- Lokale Veranschaulichung. Konzept: durch Vektor $\vec{m}$ in Richtung der größten Feldänderung un mit Betrag gleich Änderungsrate des Feldes
- Tangentenzerlegung für glatte Skalarfelder.
  - Konzept / Eindeutigkeit / Schreibweisen / Die beiden Denkfiguren / Ableitung einfacher Felder
  - Ableitungsregeln
  - Interpretation von grads($\vec{x}_0$)
- Koordinatendarstellung s^K der Skalarfelder.
  - Die Formel $\text{grad}^K s(\vec{x}) = grads^K(x, y, z) = \left(\frac{\partial s^k}{\partial x}, \frac{\partial s^k}{\partial y}, \frac{\partial s^k}{\partial z}\right)$
  - Der "Rundlauf" s$\to$ $grad$ s$\leftrightarrows$ $grad^K s \leftrightarrows grads^K \longleftarrow s^K \rightleftarrows s$