

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70711$$

28.9.09

Abbildungsbegriff allgemein $f = (A, \boxed{x \mapsto f(x)}, W)$

Allg. Eigenschaften: Bildf, Graphf, Zusammensetzung,....

"Reelle Funktionen": $A = D \subset \mathbb{R}$, **Graph!**

Grundausrüstung $h_n : x \mapsto h_n(x) = x^n, \cos, \sin, \exp$

Symmetrie, Nullstellenstärke, Additionstheoreme...**Rekonstruktion** dieser Begriffe!

Rekursive Konstruktionen:

- Starte mit einem Rechenausdruck für reelle Zahlen etwa $\boxed{a \cdot b}$ und zwei gegebenen Funktionen f und g.
- Interpretiere ihn als Zuordnung, etwa $\boxed{x \mapsto f(x)g(x)}$
- Ergänze zu vollem Abbildungstripel $f \cdot g = (D, x \mapsto \boxed{(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)}, \mathbb{R})$
- Die Graphen von f und g seien bekannt. Wie erhält man daraus den Graphen der neuen Funktion?
(Hauptproblem)

– Erste Methoden: Symmetrieüberlegungen, Dominanz bei Wachstum und Nullstellenstärke

Abb.	Werte		
$f+g$	$f(x)+g(x)$ $\alpha f(x) + \beta g(x)$		Rekursiver Bau der Polynome
$f \cdot g$	$f(x)g(x)$		Nullstellendominanz Vorzeichenregeln
$\frac{f}{g}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$ D uU kleiner	Pole, Vorarbeiten von einem Punkt
$g \circ f$	$g(f(x))$	$A \rightarrow B \rightarrow C$	
f^{-1}	$f(f^{-1}(x)) = x$	Bijektiv	Vorb. RA, Graph

(8.3.31) Ansehen! Nacht immer wieder Schwierigkeiten!!

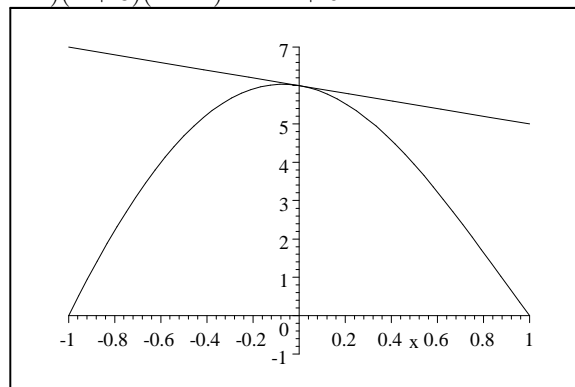
Beispiele für Diskussion (Skript Kap.8.3 u. 8.4)

Gegeben eine Funktion f über einen Rechenausdruck $y=f(x)$.

Gesucht ist das Verhalten der Funktion über ein halbquantitative Skizze des Graphen. Diese erhält man über Inspektion des Rechenausdrucks und die entwickelten Methoden!

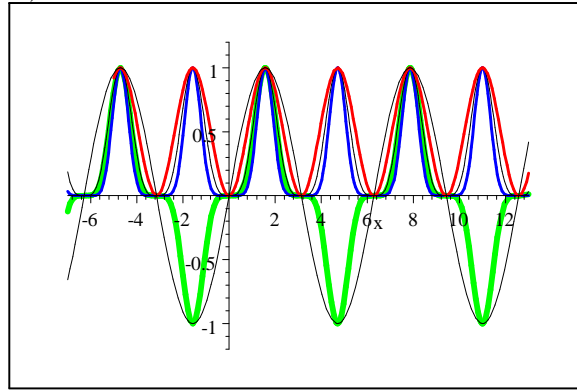
Die Beispiele des heutigen Tages

$$(x^2 - 1)(x + 3)(x - 2) - x + 6$$

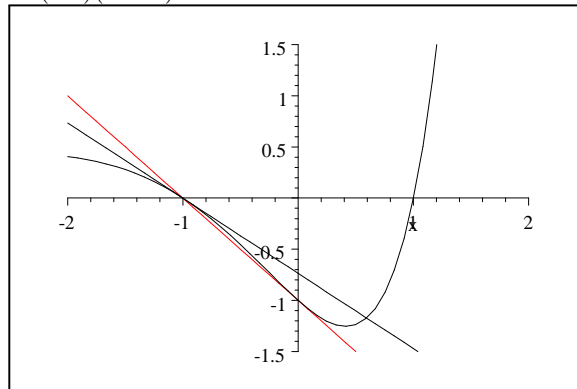


$$= x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

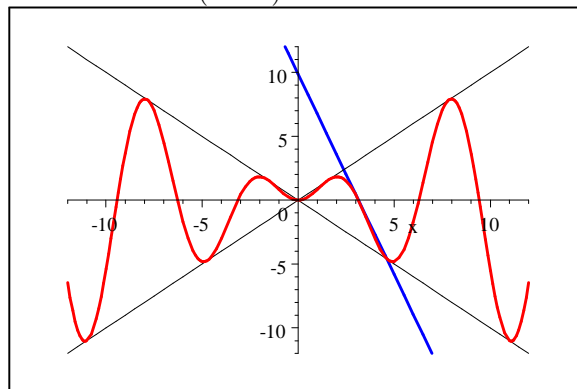
$\sin^5 x$ (grün) sowie $\sin x$, $\sin^2 x$ und $\sin^4 x$ und $\sin^8 x$.



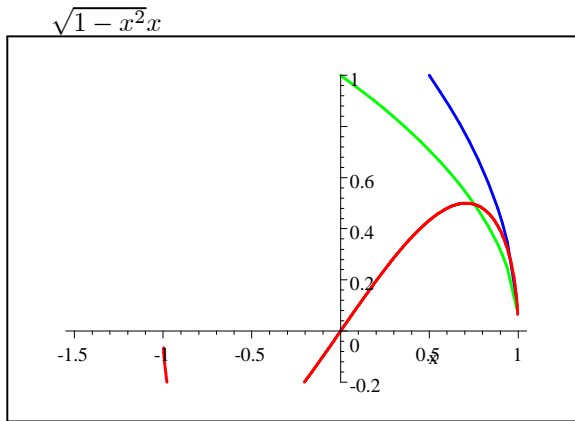
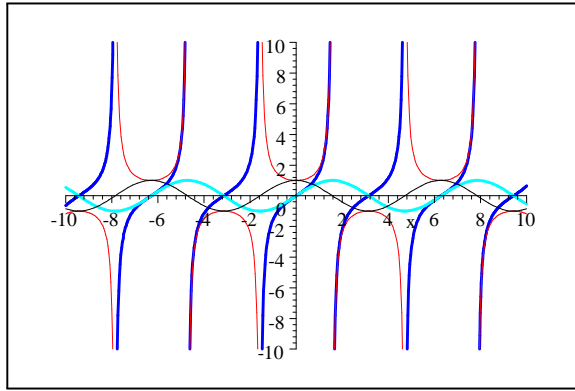
$y = e^x(x^2 - 1)$ Dazu Tangenten bei $x=0$ und $x=-1$.
 $e^{-1}(-2)(x+1) \quad -x-1$



$x \sin x \quad x \quad -\pi(x - \pi)$

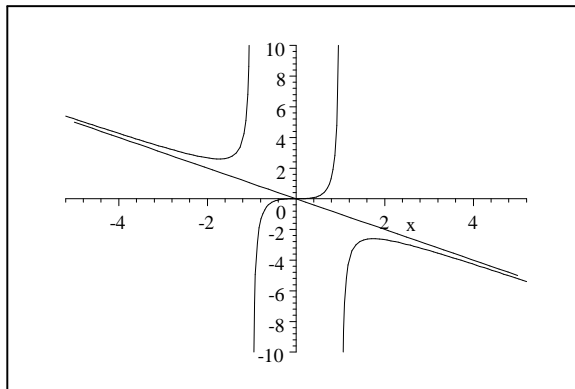


$\frac{1}{\cos x} \quad \cos x \quad \sin x \quad \frac{\sin x}{\cos x}$

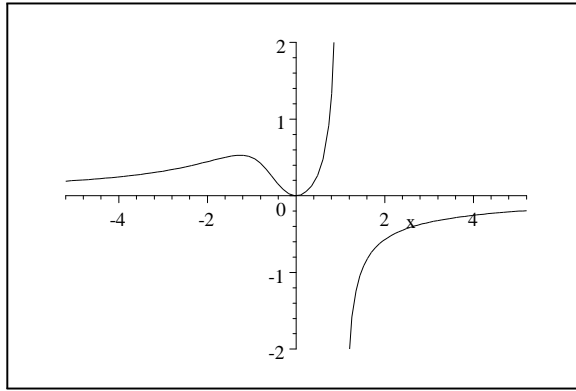


Zu $\frac{x^3}{1-x^2}$

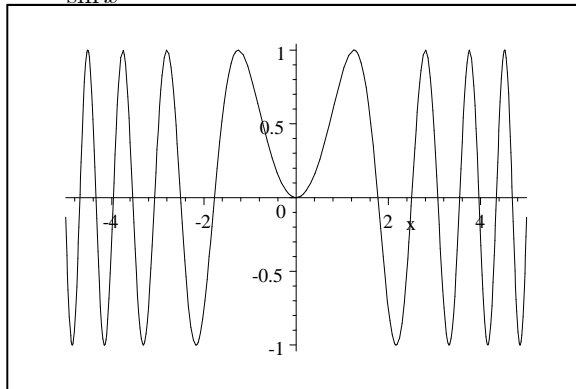
Zum Vorgehen: Rechenausdruck inspizieren und Liste der Beobachtungen machen. Diese u.U. präzisieren. (Beispiel: Nullstelle bei $x=0$. Genauerer Verhalten in der Nähe von $x=0$ bestimmen. Im Beispiel $y \approx 1 \cdot x^3$)
 Dann Einzelbeobachtungen in Skizze eintragen und interpolieren! Was für Unklarheiten bleiben? GEzielt nach Antwort suchen!



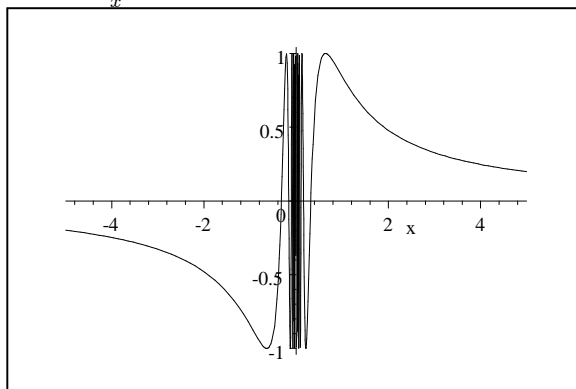
$$\frac{x^2}{1-x^3}$$



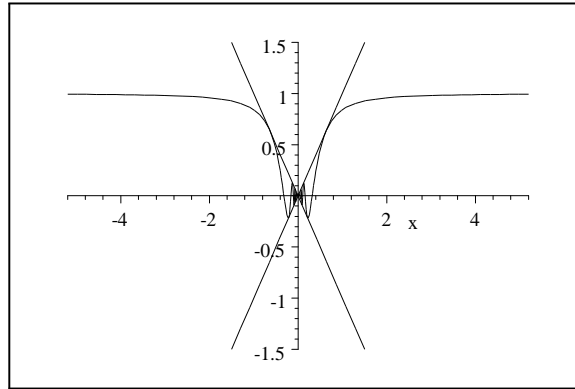
$$\sin x^2$$



$$\sin \frac{1}{x}$$



$$x \sin \frac{1}{x}$$



Morgen:

- **8.4 Hilfen bei der Verhaltensanalyse**

- 8.4.1 Kleine Transformationen
- 8.4.2 Umformungen des Rechenausdrucks
- 8.4.3 Kurvenscharen
- 8.4.4 Geometrische und einheitenfreie Größen
 - * 8.4.4a Periodische Funktionen und Oszillationen
- 8.4.5 Konstruktions- und Verlaufsdiagramme
- 8.4.6 Elementar konstruierbare Funktionen
- 8.4.7 Beschreibung geometrischer Figuren durch Funktionen

Und Beginn Kapitel 9!

29.9.09

Lehren aus der Probeklausur **Lösungen jetzt nach den Fragen!**

- Angebotene Hilfen im Studium sollten genutzt werden (es sei denn, man ist extrem gut). 30-50% taten dies nicht.
- Zu denen, die (erfreulicherweise) abgegeben haben: Man sieht, was jeweils zu tun ist und wieviel. Nicht besonders gut, aber doch so **dass es** (nach bisherigen Erfahrungen) **bei weiterer Anstrengung machbar sein sollte**. (Nochmals mein Zahlbeispiel: 240 / 140 / 40 .)

Aber

- **Die Fähigkeit, sich Wichtiges zu merken, muss deutlich verbessert werden!** (Beispiel: Klammern und Skalarprodukt. **Furchtbar!** Ortsvektor / Koordinatenvektor)
 - Mit eigenständigen sinnvollen Konsolidierungsmaßnahmen wie Rekonstruktion, Rechnen von einfachen Beispielen und **Nachfragen**.

- Wichtige Formeln - wie die für die parallele Komponente oder die Punkt-Richtungsform der Geradengleichung - sollten stets verfügbar / gegenwärtig sein.
- Genauigkeit: "Zeichne die Ortsvektoren" besagt nicht "Zeichne die Punkte"!

- Begründete Rechenschemata sollten eingehalten werden (Beispiel: Flugparabel (die **Resultate der Hausmacherlösungen: OhWeh!!**), nicht durch Null dividieren...)
- Fragen, wenn etwas nicht verstanden wurde.
- **Nacharbeiten** im Skript: Die einen die zentralen Regeln und Aussagen, die anderen auch gerade das, was nicht behandelt wurde!

$$f(x)=x^{-1} \quad (x_0 + \Delta x)^{-1} = x_0^{-1} - x_0^{-2}\Delta x + \Delta x R$$

$$\begin{aligned} \Delta x R &= \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} + \frac{\Delta x}{x_0^2} \\ &= \frac{x_0^2 - x_0(x_0 + \Delta x) + \Delta x(x_0 + \Delta x)}{x_0^2(x_0 + \Delta x)} \\ &= \frac{(x_0^2 - x_0^2) + \Delta x(-x_0 + x_0) + \Delta x^2}{x_0^2(x_0 + \Delta x)} \end{aligned}$$

$$R(x_0, \Delta x) = \frac{x_0(-1 + \Delta x) + \Delta x^2}{x_0^2(x_0 + \Delta x)}$$

$$\boxed{R(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta x}{x_0^2(x_0 + \Delta x)}} \text{ für } m = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\boxed{f(x)=x^2 - 2 \quad f'(x) = 2x}$$

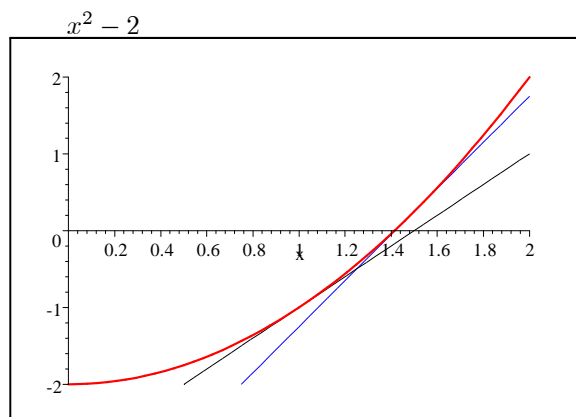
$$\text{Start: } \quad f(1)=-1 \quad f'(1) = 2 \quad \text{Also } \boxed{\Delta x_1 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad f(x_1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad \boxed{\Delta x_2 = -\frac{\frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{12}}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1.4167$$

$$-1 + 2(x - 1) \quad \frac{3}{4} + 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$



30.9.09
Schwerpunkt Kap. 9.3 "Ableitungskalkül"

Nutzung für die 2. Denkfigur: Bestimme die Ableitung einer Funktion in x_0 und schreibe die Tangentenerlegung um x_0 als gültige Gleichung hin.

$$\Delta x \mapsto f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x) \quad \text{mit } \dots R_f(x_0, \Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \dots$$

a) Rekonstruktion b) Was ist (in welcher Reihenfolge) vorgegeben? c) Das abstrakte Problem c) TZ als Umschreibung des Rechenausdrucks d) Wie erfolgt die entscheidende Informationsreduktion???

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 0.1\right) = 0.77417$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.1 = 0.77782$$

(9.1.45) Insgesamt erhält man so die Ableitungen für alle Funktionen der Grundausstattung. Im Falle der Exponentialfunktion \exp ist noch eine Zusatzannahme erforderlich, die wir bei der zweiten Denkfigur besprechen. Es folgt die wichtige Liste von Ableitungen der Funktionen der Grundausstattung:

$f(x_0)$	$h_0(x_0) = 1$	$h_n(x_0) = x_0^n \quad n=1,2,\dots, \underline{n \in \mathbb{N}}$	$\sin(x_0)$	$\cos(x_0)$	$\exp(x_0) = e^{x_0}$
$f'(x_0)$	$h_0'(x_0) = 0$	$h_n'(x_0) = n h_{n-1}(x_0) = n x_0^{n-1}$	$\cos(x_0)$	$-\sin(x_0)$	$\exp(x_0)$

Rekursive Konstruktionen - die Ableitungsregeln:

$F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$	$F'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$	
$F(x) = f(x)g(x)$	$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$\frac{\dots g(x) - \dots}{g^2(x)}$
$F(x) = g(f(x))$	$F'(x) = f'(x)g'(f(x))$	$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g(y)$ $f'(x) \dots \dots \dots g'(y)$
$F(x) = f^{-1}(x)$	$F'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$	

Beispiele:

Linearität	$F_1(x) = 3x^4 + 5 \sin(x)$	$F'(x) =$
Produktregel	$F_2(x) = 3x^4 \sin(x)$	$F'(x) =$
Quotientenregel	$F_3(x) = \frac{\sin(x)}{x^5}$	
Kettenregel	$F_4(x) = \sin(x^5)$	
	$F_5(x) = \sin^5(x)$	
	$F_6(x) = \frac{e^x}{x^2 + e^x} = \frac{1}{x^2 e^{-x} + 1}$	$F'_6(x) =$
	$F_7(x) = x \sin(x^2)$	
	$F_8(x) = \sin(x) + \sin(x + \cos(x))$	

Das Problem der scheinbaren Wasserbeckentiefe durchgesprochen. Kap. 1.7. Zunächst als Anwendung der zweiten Denkfigur die Herleitung der Formel für Brennpunkte (9.1.56-58). Danach das physikalische Problem.

Danach Beginn Kapitel 10:

- Wann wird man eine Funktion "nach oben beschränkt" nennen? ($f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn (genau wenn) es eine Zahl S gibt mit $f(x) \leq S$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)
- " ... heißt monoton wachsend, wenn für alle $u, v \in D$ mit $u \leq v$ gilt $f(u) \leq f(v)$.
- Usw.

Danach: $f'(x) = 0$ liefert die Kandidaten für glatte Extremwerte.
 Und das Orientierungsschema zur Kurvendiskussion aus Kap. 10.

Zuerst das Beispiel (10.2.6) mit $y = e^{-x} \sqrt{x^2 - 1}$ mit zusätzlicher Bestimmung der zweiten Ableitung!

$$y = e^{-x} \sqrt{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = (-e^{-x})\sqrt{x^2 - 1} + e^{-x} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 1}} (-x^2 + 1 + x)$$

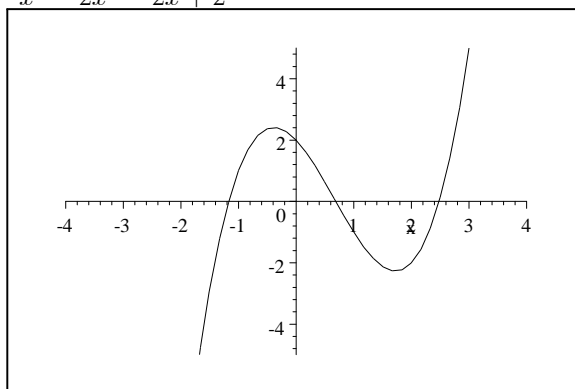
Das gibt zwei Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
 oder $x_1 = 1.618$ und $x_2 = -0.61803$

Nur x_1 liegt im Definitionsbereich! Die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[-e^{-x}(-x^2 + x + 1) + e^{-x}(-2x + 1)] \sqrt{x^2 - 1} - \frac{e^{-x}(-x^2 + x + 1)x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} \\ &= \frac{e^{-x}}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} ((x^2 - 3x)(x^2 - 1) + (x^2 - x - 1)x) \\ &= \frac{e^{-x}x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} (x^3 - 2x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind daher die Nullstellen von
 $y = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

Fordert erneute Kurvendiskussion! Der zugehörige Graph:
 $x^3 - 2x^2 - 2x + 2$



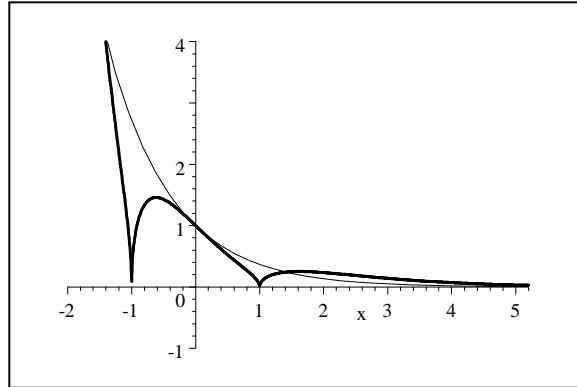
Hiermit kann man die Lage der Wendepunkte abschätzen!

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 1}} (-x^2 + 1 + x) = e^{-x} x \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Extremwert und Pol außerhalb des Definitionsbereiches gehören zur überall definierten Funktion

$$y = e^{-x} \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Mit Graphen: (Zum Vergleich ist noch e^{-x} eingezeichnet)



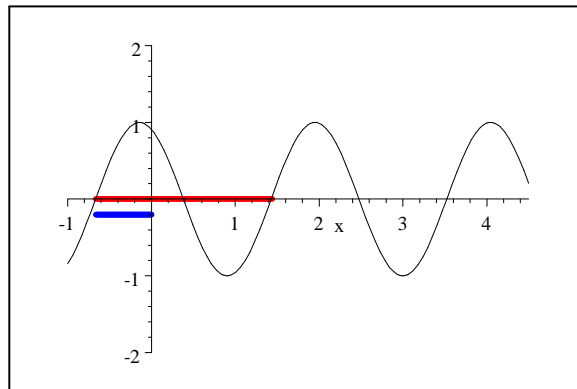
1.10.09

- Die Nullstellen und Extremwerte von $y = \sin(x^2)$ bestimmen

Dazu geht man aus von der Bedingung $x^2 = n\pi$, die man aus der Sinusfigur abliest. Auflösen gibt für die Lage der Nullstellen $x_{n+-}^N = \pm\sqrt{n\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für die Maxima hat man entsprechend $x^2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ als Bedingung. Das gibt $x_{n+-}^M = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ wobei wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist.

Kurvendiskussion, Stichwort "kleine Transformationen": $\sin(\omega(t - t_0))$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $T =$

- $y = \sin(3x+2) = \sin(3(x - (-\frac{2}{3})))$ Also $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2.1$. Erläutern Sie das folgende Bild:



Aus dem Beispiel von gestern: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

- Bestimmen die Tangente zum Punkte $x=1$ (genauer zum Punkte $(1, f(1))$ des Graphen)

- $|x|$ groß $f(x) \approx x^3$, / x nahe Null: $f(x) \approx -2x + 2$
- $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$ gibt Nullstellen über $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$$x_{e1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{6}{9}} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}$$

$$x_{e1} \approx 1.7 \quad \text{und} \quad x_{e2} = -0.4$$

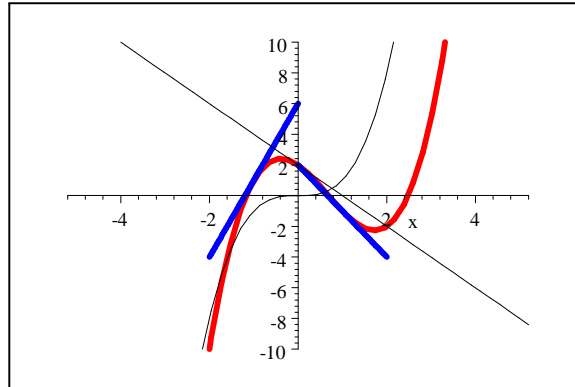
$$f(x_{e1}) \quad f(x_{e2}) \dots$$

- Nullstellen: Offenbar kein ganzzahliger Wert! Tangenten bei $x = \pm 1$:

$$y = -1.0 + (-3)(x - 1) \quad \text{zu } x=1$$

$$y = 1 + 5(x + 1)$$

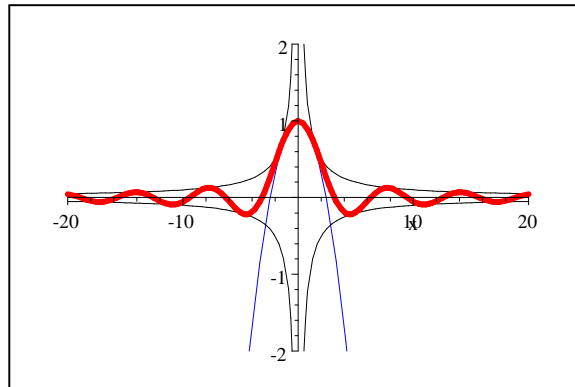
$$-2x + 2$$



$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$$

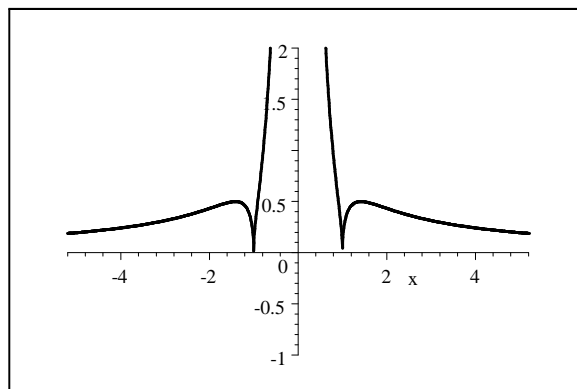
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Man sieht sofort: $f(x)$ ist gerade, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ / Nullstellen bei $n\pi$ (über Sinus) / Da $-1 \leq \sin x \leq 1$ ist, liegt die Funktion stets zwischen den Graphen von $\pm \frac{1}{x}$. Berührung bei den Maxima bzw. Minima / $x=0$ ist Unstimmtheitsstelle, ersetzt man $\sin x$ durch x folgt der Grenzwert 1. / Noch genauer: Ersetzt man $\sin(x)$ durch $x - \frac{1}{6}x^3$, so folgt $1 - \frac{1}{6}x^2$ als bessere Näherung $1 - \frac{1}{6}x^2$ um $x=0$



$$\text{Diskutiere } F(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Nullstellenverhalten, Dominanz usw. ergeben eine Form, die dem tatsächlichen Graphen weitgehend entspricht.



Offen bleibt die Lage der Maxima und der Wendepunkte. Bei der Bestimmung der Ableitung ist es sinnvoll mit der Quotientenregel zu arbeiten:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)}}{x^2} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ für } x^2 > 1 \\ \varepsilon = -1 \text{ für } x^2 < 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\frac{\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} x^2 - \sqrt{\varepsilon(x^2-1)}(2x)}{x^4} \\ &= \frac{1}{x^3 \sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} (\varepsilon x^2 - 2\varepsilon(x^2-1)) \\ &= \frac{\varepsilon(2-x^2)}{x^3 \sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} \quad \begin{array}{l} \text{Extremwerte bei} \\ x_{12}^e = \pm\sqrt{2} \end{array} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung (als Übung für das Vorgehen):

$$\begin{aligned} F''(x) &= \varepsilon \frac{d}{dx} \frac{(2-x^2)}{x^3 \sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} \\ &= \varepsilon \frac{(-2x)x^3 \sqrt{\varepsilon(x^2-1)} - (2-x^2) \frac{\varepsilon x^2(4x^2-3)}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}}{x^6 \varepsilon(x^2-1)} \\ &= \frac{\varepsilon x^2 (-2x^2 \varepsilon(x^2-1) - (2-x^2)\varepsilon(4x^2-3))}{x^6 (\varepsilon(x^2-1))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-\varepsilon^2 (2x^2(x^2-1) + (2-x^2)(4x^2-3))}{x^4 (\varepsilon(x^2-1))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(+2x^4 - 9x^2 + 6)}{x^4 (\varepsilon(x^2-1))^{\frac{3}{2}}} \quad \begin{array}{l} \text{das gibt für die Wendepunkte!} \\ x_{W12} \approx \pm 1.9 \\ x_{W34} \approx \pm 0.9 \end{array} \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x^3 \sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)} &= (3x^2) \sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)} + \frac{x^3 \varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)}} \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)}} (3\varepsilon(x^2 - 1) + \varepsilon x^2) \\
&= \frac{\varepsilon x^2 (4x^2 - 3)}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)}}
\end{aligned}$$

Mit Kapitel 10 begonnen. Also **Bestimmung der vektoriellen Geschwindigkeit einer Bahnkurve.**

Allgemeiner Weg: Verallgemeinerung der Tangentenzzerlegung auf Bahnkurven / Eindeutigkeitsbeweis / Die beiden Denkfiguren.

Wie sollten zugehörige Ableitungsregeln aussehen? (Immer darauf achten: Zahl oder Vektor???)

- Linearität
- Produktregel: $\frac{d}{dt} f(t) \vec{r}(t) = \dot{f}(t) \vec{r}(t) + f(t) \dot{\vec{r}}(t)$
- Kettenregel $\frac{d}{dt} \vec{r}(f(t)) = \dot{f}(t) \dot{\vec{r}}(t)$

Für Bahnkurven haben wir drei Typen von Darstellungen:

- Koordinatenfrei wie Flugparabel (1. Denkfigur)
- Über kartesische Koordinaten $\vec{r}(t) = \vec{e}_1 x(t) + \vec{e}_2 y(t) + \vec{e}_3 z(t)$. Es folgt $\vec{v}(t) = \vec{e}_1 \dot{x}(t) + \vec{e}_2 \dot{y}(t) + \vec{e}_3 \dot{z}(t)$
- Über ebene polare Koordinaten (Kreisbewegung)

$$\vec{r}(t) = R \cdot \vec{e}_r(\varphi(t)) \quad \text{mit} \quad \vec{v}(t) = R \dot{\varphi}(t) \vec{e}_t(\varphi(t))$$

Wobei

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r(\varphi) &= \vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi) \\
\vec{e}_t(\varphi) &= \vec{e}_1 (-\sin(\varphi)) + \vec{e}_2 \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Dafür gelten folgende Ableitungsregeln:

$$\frac{d}{d\varphi} \vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_t(\varphi) \quad \frac{d}{d\varphi} \vec{e}_t(\varphi) = -\vec{e}_r(\varphi)$$