★ Rekonstruktion Vektorprodukt - Zwei Formeln / eine Aussage
★ Rekonstruktion Skalarprodukt

■ Es sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ aus V_0^3. Lösen Sie die beiden Gleichungen $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$ sowie $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ in $\vec{x}$. D.h. beschreiben/bestimmen Sie die geometrische Figur, die durch die jeweilige Lösungsmenge festgelegt wird. Denken Sie daran: In beiden Fällen liegt eine lineare Gleichung vor, da die Produktbildungen bilinear sind. Denken Sie an den jeweiligen k-Wert.

Lösung zu $\boxed{\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}}$. Die gleichung ist linear, also gelten die Resultate von Kap. 5.3. Die zugeordnete homogenr Gl $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ löst man sofort geometrisch. Es muss $\sin(\theta) = 0$ sein, wenn θ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{x}$ ist. Also k=1 und $\vec{x}_L(\alpha_1) = \alpha_1 \vec{a}$ liefert alle Lösungen. Jetzt benötigt man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, sofern diese lösbar ist.

Da das Vektorprodukt auf jedem seiner Faktoren senkrecht steht, ist $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ höchstens dann lösbar, wenn $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Für diesen Fall suchen wir die spezielle Lösung $\vec{x}_S$!

Wir versuchen es mit einer, bei der alle drei Vektoren ($\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}_S$) aufeinader senkrecht stehen. Jetzt fürhren wir ein Koordinatensystem ein, bei dem ain 1-Richtung, $\vec{x}_S$ in 2-Richtung und $\vec{b}$ in 3-Richtung zeigt. DAmit bekommt man:

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^K \times \vec{x}^K = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ax \end{pmatrix} \quad \text{Also} \quad \boxed{\text{x}=\tfrac{b}{a}}$$

$$\vec{b}^K \times \vec{a}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ba \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unser Ansatz liefert also tatsächlich eine Lösung, die sich koordinatenfrei wie folgt schreiben läßt:

$$\boxed{\vec{x}_S = \tfrac{1}{a^2}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)}$$

Das gibt für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung im lösbaren Fall $\vec{a} \perp \vec{b}$:

$$\boxed{\vec{x}_L(\alpha_1)=\tfrac{1}{a^2}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)+\alpha_1\vec{a}}$$

Paralleverschiebung der von $\vec{a}$ erzeigten Ursprungsgeraden mit kürzestem Abstand $\dfrac{b}{a}$.

Fingerübungen komplexe Zahlen:

Für $z = 2 - 3i \quad u = 5 + i \quad w = -2 + \frac{2}{3}i \quad v = 3i$
berechne kartesisch:

$$zu = 13 - 13i = 13(1 - i)$$
$$z(u + w) = 11 - \tfrac{17}{3}i = \tfrac{1}{3}(33 - 17i)$$
$$(u + w)^2 = \tfrac{56}{9} + 10i$$
$$(vz + u)^2 = 147 + 196i$$
$$iu + w^2 = \tfrac{23}{9} + \tfrac{7}{3}i$$

$\frac{u}{z} = \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i = \frac{1}{13}(7+17i)$

Wandle jetzt z,u,w und v in die polare Form um:

$z = \sqrt{13}e^{-i\arctan\frac{3}{2}} \qquad u = \sqrt{26}e^{i\arctan\frac{1}{5}}$

$w = \frac{2}{3}\sqrt{10}\exp\left(i\left(-\arctan\frac{1}{3}+\pi\right)\right)$

$v = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

Und berechne abschließend

$\sqrt{z} = \sqrt{2-3i} = \sqrt[4]{13}e^{-\frac{i}{2}\arctan\frac{3}{2}}$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2-3i} = \sqrt[6]{13}e^{-\frac{i}{3}\arctan\frac{3}{2}}$

$\sqrt{z+u} = \sqrt{7-2i} = \sqrt{\sqrt{53}e^{-i\arctan\frac{2}{7}}} = \sqrt[4]{53}e^{-\frac{i}{2}\arctan\frac{2}{7}}$

Ein Beispiel für das Lösen einer Gleichung im Komplexen. Man geht vor wie im Reellen. Dazu kommt immer wieder das Problem "i-s aus dem Nenner fortzuschaffen".

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-i} + \frac{2i}{z+i} &= 3+i \\
(z+i) + 2i(z-i) &= (3+i)(z^2+1) \\
(1+2i)z + (2+i) &= (3+i)(z^2+1) \\
\frac{1+2i}{3+i}z + \frac{2+i}{3+i} &= z^2+1 \\
z^2 - \frac{1+2i}{3+i}z + 1 - \frac{2+i}{3+i} &= 0 \\
z^2 - \frac{1+2i}{3+i}z + \frac{1}{3+i} &= 0 \\
z^2 - \left(\frac{1+i}{2}\right)z + \left(\frac{3-i}{10}\right) &= 0 \quad \text{Normalform.}
\end{aligned}$$

Jetzt p-q-Formel $\frac{1+i}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1+i}{4}\right)^2 - \frac{3-i}{10}}$

$z_{12} = \frac{1+i}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1+i}{4}\right)^2 - \frac{3-i}{10}} = \frac{1+i}{4} \pm \sqrt{-\frac{3}{10} + \frac{9}{40}i}$

$\boxed{z_{12} = \frac{1+i}{4} \pm \frac{1}{2\sqrt{10}}\sqrt{-12+9i}}$

Beide Lösungen sind zulässig

Morgen komplexe Widerstände!

22.9.09

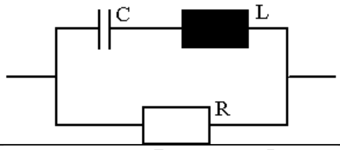
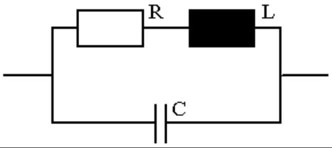
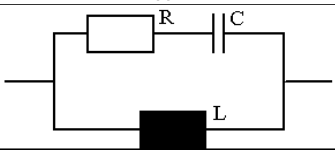
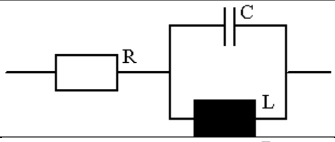
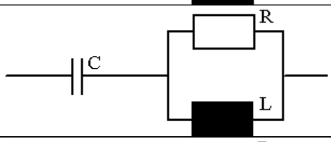
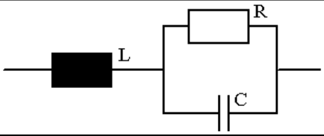
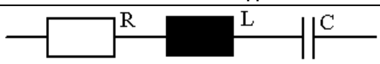
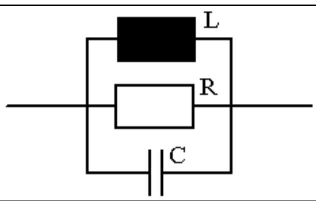
- Zu der Mehrzahl der Wochendfragen ist jetzt die Antwort/Lösung hinzugefügt.
- **Freitag findet keine Veranstaltung statt! I**ch werde dazu Donnerstag ein Probeklausur ins Netz stellen.
- Heute wurden die komplexen Zahlen wiederholt. Danach wurde die Anwendung der komplexen Widerstände behandelt.
- Nachmittags noch den L-C-Schwingkreis gerechnet
- Morgen beginnt der zweite Teil der Vernastaltung mit Kap. 7. Also möglichst schon einmal hineinschauen. Wie fast immer bauen die späteren wichtigen Nutzungsresultate (zum Differenzieren und Integrieren) auf diesem allgemeinen Teil auf.
- Unten die Liste mit den möglichen Schaltungen mit genau je einem R,L,C-Glied.

Dabei werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$P^2 = \frac{R^2C}{L} \qquad \mathrm{P{=}R}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \text{einheitenfrei}$$

$$x = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Über Bedeutung und Nutzen der Einführung solcher Größen sollten Sie sich noch Gedanken machen.

	$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R}\frac{(1-x^2)+ixP}{1-x^2}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = R\frac{\lvert 1-x^2\rvert}{\sqrt{(1-x^2)^2+x^2P^2}}$
	$\frac{1}{Z} = \frac{P}{R}\frac{P+ix(P^2+x^2-1)}{P^2+x^2}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{P^2+x^2}{(1-x^2)^2+x^2P^2}}$
	$\frac{1}{Z} = \frac{P}{R}\frac{Px^3-i(1-x^2+x^2P^2)}{x(1+x^2P^2)}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = R\frac{x}{P}\sqrt{\frac{1+x^2P^2}{(1-x^2)^2+x^2P}}$
	$Z = \frac{R}{P}\left[\frac{P(1-x^2)+ix}{1-x^2}\right]$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = \frac{\sqrt{P^2(1-x^2)^2+x^2}}{\lvert 1-x^2\rvert}$
	$Z = \frac{R}{P}\frac{Px^3+i(P^2(x^2-1)-x^2)}{x(x^2+P^2)}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{P}\frac{\sqrt{P^2(x^2-1)^2+x^2}}{x\sqrt{x^2+P^2}}$
	$Z = R\frac{\left[(1-x^2)+x^2P\right]+ix\left[1-P(1-x^2)\right]}{1+x^2P^2}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{P^2(x^2-1)^2+x^2}{1+x^2P^2}}$
	$Z = \frac{R}{P}\frac{\left[Px+i(x^2-1)\right]}{x}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = \frac{R}{Px}\sqrt{(1-x^2)^2+P^2x^2}$
	$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R}\frac{x+iP(x^2-1)}{x}$ $\boxed{??}$	$\lvert Z\rvert = R\frac{x}{\sqrt{x^2+P^2(x^2-1)^2}}$

23.9.2009

Freitag findet keine Veranstaltung statt! Ich werde dazu Donnerstag ein Probeklausur ins Netz stellen.

Fragen und Übungen zu Kap. 6

Skalarprodukt

■ 0) Aufwärmen: Den Winkel zwischen $\vec{e} = (1,1,2)$ und $\vec{f} = (3,1,1)$ bestimmen. / Was versteht man unter Bilinearität des Skalarproduktes? / Wie erkennt man mit Hilfe des Skalarproduktes, ob der Winkel (wozwischen) spitz oder stumpf ist? / Bestimmen Sie alle zu (1,2,3) senkrechten Vektoren einmal rechnerisch und einmal über die Nutzung allgemeiner Resultate! / Den *Cosinussatz* vektoriell herleiten! / $(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})(4\vec{a} + 2\vec{b}) = ...$

Und: Beweise: In einem Rhombus (=Raute=Parallelogramm mit gleichlangen Seiten) stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht.

■ 1) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(1) = (2,2,1)$ und $\vec{v}(1) = (0,1,3)$. Unter welchem Winkel trifft die Flugbahn die x-y-Ebene? (Immer "Winkel zwischen zwei Vektoren", hier zwischen momentaner Geschwindigkeit und $\vec{e}_3$). $\vec{g}$ =(0,0,-10)

a) Umkehrung: Der Winkel zwischen momentaner Geschw. und $\vec{e}_3$ (der gegebenen Flugparabel) sei bekannt. Kann man daraus die zugehörige Höhe z=H bestimmen?

■ 2) Es seien g und h zwei Geraden im Raum. Dann sind der "kürzeste Abstand" zwischen den Geraden und der "Winkel zwischen den Geraden" wichtige Bestimmungsstücke der Konfiguration.

Beide lassen sich mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen. Wie sah die zugehörige Strategie aus?

Was den kürzesten Abstand betrifft, so sollte der **Vektor** des kürzesten Abstandes bestimmt werden, samt der Lage dieses Vektors relativ zu den beiden Geraden.

Rechnen Sie als konkretes Beispiel $\vec{x}_g(a) = a(1,2,3)$ und $\vec{x}_h(b) = (2+b, 3b, 1)$.

■ 3) 3x+$\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 2$ beschreibt eine Ebene im Raum. Als Skalarprodukt schreiben ($\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b}$) und in die verschiedenen in (6.1.40) gegebenen Formen bringen und interpretieren!

■ 4) Gegeben zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^3_K$. Wie erhält man einen zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrechten Vektor mit Hilfe des Skalarproduktes?

Vektorprodukt

■ 5) Nochmals Aufwärmen: Geometrische Form des Vektorproduktes? / Normale zur Ebene E durch P aus E? Lot von Q auf die Ebene E?

Rechenübungen:

Sei $\vec{a} = (1,3,0)$ und $\vec{b} = (0,3,-1)$ und $\vec{c} = (\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{5}) = \frac{1}{30}(15,40,-12)$.

a)Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times (\vec{a} - \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{a})$, $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 5\vec{c})$.

b) Zerlegen Sie $\vec{a}$ in die zu $\vec{b}$ parallele und senkrechte Komponente.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einmal mit Hilfe des Skalarproduktes und einmal mit Hilfe des Vektorproduktes.

d) Welche Orientierung haben die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

■ 6) Sei E Ebene mit Parametrisierung $\vec{x}_E(u,v) = (1+u, 2+v, 3+u+2v)$. und P der durch $\vec{x}_E(2,1)$ bestimte Punkt auf E. Weiter sei Q der Punkt mit Ortsvektor $\vec{x}_Q = (4,4,4)$.

a) Bestimmen Sie die Normale von E im Punkte P.

b) Bestimmen Sie den Vektor des kürzesten Abstandes von Q und E.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Verbindungsstrecke von P mit Q un d der Ebene E.

■ 7) Ein Fluid ströme mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}^K = (0,10,0)$. Eine Parallelogrammfläche in der Stömung werde durch die beiden Kantenvektoren $\vec{a}^K = (2,0,1)$ und $\vec{b}^K = (1,0,-3)$ festgelegt. Wie groß ist das Volumen, das pro Zeiteinheit durch die Fläche strömt?

Komplexe Zahlen

■ 8) Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die komplexe Multiplikation (mit der Tunnelmethode und der kart. Darstellung!)

■ 9) Sei $z_1 = 3-i$ und $z_2 = 3+3i$. Bestimmen Sie für die folgenden Rechenterme die kartesische Endform u+iv. Meist gibt es mehrere Rechenwege. Bemühen sie sich jeweils, einen kurzen zu finden.

$z_1 z_2$	$(z_1+z_2)^2$	$(z_1-z_2)(z_1+z_2)$	$(z_1+iz_2)^2$
$(1+z_1)^2$	$1+z_1+z_1^2$	$2z_1-3z_2$	$(i+z_1)(i-z_2)$

■ 10) a) Wandeln Sie in die polare Darstellung um (mindestens geistige Skizze!):

3+3i	3+4i	3-4i	-3+4i	-3i

b) Wandeln Sie in die kartesische Darstellung um:

$3e^{2i}$	$5e^{-2i}$	$3e^{4i}$	$2e^{i\pi}$	$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-5e^{i\frac{\pi}{4}}$	$e^{-\frac{\pi}{2}+2}$

c) Umwandeln mit Taschenrechner oder Computerprogramm!

■ 11) Sei z=3-4i. Bestimmen Sie dazu z^2, $\sqrt{z}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{i-z}$, (i-z)(z+1) und $\sqrt{i+z}$ sowohl in polarer als auch in kartesischer Form. (Das Resultat möglichst effizient in einer geeigneten Darstellung ansteuern, dieses umwandeln.)

■ 12) Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke:

$\frac{3-4i}{2+i}+\frac{5+i}{2-i}$	$\frac{i+\frac{2-i}{2+3i}}{1-\frac{2+5i}{2-3i}}$	$i+\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2}$	$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}$

■ 13) Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Lösungen für z von

$$(1+i)z^2-3iz+2=3i.$$

■ 14) Bestimmen Sie alle komplexen z, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{i}{(1+i)+\frac{1}{i(z+1)}}=\frac{1}{3+i}$$

a) Dasselbe für

$$\frac{1}{z+i}+\frac{2}{z-i}=3+4i$$

■ 15) Bestimmen Sie alle 7 Lösungen von $z^7=i$.

■ 16) Sei a=u+iv (u,v$\in\mathbb{R}$) eine komplexe Zahl. Bestimme $\sqrt{a}$ a) über einen polaren Ansatz und b) über einen kartesischen

---

Kap.7 Abbildungen

- Defintion und Bezeichnungen (Kap. 7.??? und 2. Übung)
- Beispiele und Vielfalt (Kap.7.??? und 1. Übung unten)
- Zugeordnete Megen. Sei f=(A,x$\longmapsto f(x), W$). Dann:

$$\begin{aligned} Bild f &= \{ \quad \mid \quad \} \subset ... \\ Graph f &= \{ \quad \mid \quad \} \subset ... \end{aligned}$$

- Neue Abbildungen: g=($A_g, y \longmapsto g(y), W_g$) und f=($A_f, x \longmapsto f(x), W_f$). / Weiter sei $W_f = A_g$. Dann kann man die "zusammengesetzte" Abbildung "g-nach-f" bilden

$$g \circ f = (A_f, x \longmapsto g(f(x)), W_g)$$
$$\boxed{\text{g}\circ\text{f(x)=g(f(x))}}$$

- Wann kann man die Zuordnung "umdrehen"? Die"inverse Abbildung" bilden? Zu jedem y$\in W$ muss es dann genau ein x mit f(x)=y geben. Oder die Bestimmungsgleichung f(x)=y in x muss für jedes y$\in W$ eindeutig lösbar sein.

  – Bezeichnung für die zu f inverse Abbildung ist dann $\overset{-1}{f}$. Also

  $$\overset{-1}{f} = (W, y \longmapsto \overset{-1}{f}(y), A).$$

  – Weiter gelten folgende Beziehungen:

  $$\begin{array}{lll} \overset{-1}{f}(f(x)) = x & \overset{-1}{f} \circ f(x) = x & \text{für alle x} \in A \\ f(\overset{-1}{f}(y)) = y & f \circ \overset{-1}{f}(y) = y & \text{für alle y} \in W \end{array}$$

  Das sind in der Regel sehr viele zu erfüllende Gleichungen. Oder amders interpretiert eine Gleichung mit äußerem Parameter. Man kann sie jedoch auch als Gleichung zwischen Abbildungen interpretieren.

  $$\begin{array}{ll} \overset{-1}{f} \circ f = id_A & \text{wobei } id_A = (A, x \longmapsto x, A) \\ f \circ \overset{-1}{f} = id_B & \text{wobei } id_B = (B, y \longmapsto y, B) \end{array}$$

Erste Aufgaben zum Abbildungsbegriff

■ 1) **Typ einer Abbildung**: Umgangssprachliche Herkunft - Festlegung bei Abbildungen?
Was bedeuten die folgenden Begriffe? Präzisieren Sie die Begriffe durch Angabe eines Abbildungstyps (also Urbildmenge, Wertemenge) und möglichst eines konkreten Beispiels in Form einer Abbildung:

Größenmaß	Spiegelung	Projektion	Alter	Vektorfolge	Anzahl

.

■ 2) **Vertrautmachen mit Abbildungen:** Vervollständigen Sie zu einem jeweils naheliegenden Abbildungstripel. Was läßt sich jeweils (mit erträglichem Aufwand) über Bild und Graph sagen? (Möglichst in Mengenschreibweise!) Sofern nichts anderes gesagt ist, sind die Variablen reell. Punkte, in denen der Rechenasudruck nicht definiert ist, sind auszuschließen.

y=1-x^2	y=$\frac{1}{1-x^2}$	y=sin($\frac{1}{x}$)	y(x)=$\sqrt{a^2-x^2}$	y(a)=$\sqrt{a^2-x^2}$
z$\mapsto$ $\overline{z}$ z$\in \mathbb{C}$	(x,y,z)$\mapsto$ (x,z)	(x,y,z)$\mapsto$ $(0,x,z)$	(x,y,z)$\mapsto$ (x,z,y)	(x,y,z)$\mapsto$ (x^2,z^2,y^2)
z(x,y)=x$^2-y^2$	r(x,y)=$\frac{xy}{x^2+y^2}$	s(x,y)=$\frac{xy}{x^2-y^2}$	q(x,y)=$\frac{x-y}{x+y}$	y(x)=$\sqrt{a^2-x}$
$z(t)=te^{it}$				z(t)=cos(t)+isin(πt)
T(x,y,z)=x$^2+y^2+z^2$	$\vec{F}(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{\lvert\vec{x}\rvert}$			

a) Konstruieren Sie aus den gegebenen Beispielen drei Beispiele zusammengestzter Abbildungen und versuchen Sie darunter Beispiele zu finden, für die die inverse Abbildung existiert und bilden Sie diese.

■ **Ein Tischtennisball wird zur Zeit t=0 in der Höhe H über einem Tisch losgelassen. Er fällt senkrecht auf den Tisch und springt wieder hoch. Zur Zeit t habe er die Höhe h(t) und die Geschwindigkeit v(t). Letztere hat ein Vorzeichen.**

Skizzieren Sie die Graphen von t$\mapsto$h(t) und t$\mapsto v(t)$ für einige Sprünge.
Können Sie die exakten Rechenausdrücke angeben? (Flugparabel)

■ **Vorstellungskizze**: Betrachten Sie ein (ebenes) Pendel mit einer festen Stange. Die Lage des Pendels soll durch den zugehörigen Ausschlagswinkel α bestimmt werden. Dabei soll $\alpha = 0$ zur negativen y-Achse gehören . Die Schwerkraft zeige in Richtung der negativen y-Achse. Zur Zeit t=0 erhält das Pendel einen Stoß, der ihm eine Anfangsgeschwindigkeit gibt, der es bis zu einem maximalen Winkel α_m hochtreibt. Skizzieren Sie (wieder über die Vorstellung und damit verbundene Erfahrungen) die Zuordnung t$\mapsto \alpha(t)$, wobei t die Zeit ist. Wählen Sie für α_m die folgenden Werte: $\alpha_m = 0.1$ und 0.2 ("kleine Ausschläge") dann 0.8 ("mittlerer Ausschlag") und 1.5 ("großer Ausschlag"). Die Skizze sollte so angelegt sein, daß man die Fälle vergleichen kann. Skizzieren sie dann noch zwei Fälle mit "Überschlag", einen bei dem dieser ganz knapp gelingt und einen mit großer Geschwindigkeit.

24.9.09

Einsetzübung:

Abbildung und Wert auseinander halten!

Schulung der Wahrnehmungsfähigkeit und Regelanwendung

Sei f=$\big(\mathbb{R}, x \longmapsto (x)^2+2, \mathbb{R}\big)$ und g=$(\mathbb{R}, x \longmapsto \sin(x), \mathbb{R})$ und $\vec{r} = (\mathbb{R}, t \longmapsto (t^2, t+1, \sin(t), \mathbb{R}^3)$.

Bestimmen Sie folgende Werte:

f(3)=11...	f(3a)=9a$^2+2$..	f(a+3)=(a+3)$^2+2$...
f(3)+a=11+a	f(3)+f(a)=13+a^2+..	f(f(3+a))=$\big((3+a)^2+2\big)^2+2$..
f($\frac{1}{f(3)}$) =	$\frac{1}{f(3)}$ =	f(2f(3))=
f(g(3))=sin$^2 3+2$	f(3)g(3)=	g(f(3))=
g$\circ f \circ g(1) =$	$\frac{f(g(1))}{g(1)}$	$\vec{r} \circ f(1)$
$\vec{r} \circ g(f(1))$	$\vec{r}(1+f(1))$	$\lvert\vec{r}(f(1))\rvert$

Eine interessante zusammengesetzte Abbildung!

$$\boxed{f(x) = ax(1-x)}$$

$$f \circ f(x) = a\,(ax(1-x))\,(1-ax(1-x)) = a^2x - a^3x^2 + 2a^3x^3 - a^2x^2 - a^3x^4$$

$$\boxed{f(f(x)) = a^2x\,(1-x)\,\big(1-ax+ax^2\big)}$$

$$a^3x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x))\,\big(1-a^2x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x))\big) =$$

$$f(f(f(x))) =$$

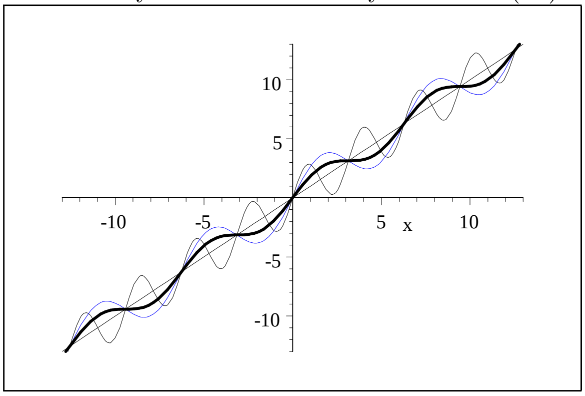
$$\boxed{a^3x\,(1-x)\,\big(1-ax+ax^2\big)\,\big(1-a^2x+a^3x^2-2a^3x^3+a^2x^2+a^3x^4\big)}$$

Erste Bilder zur Gaphenanalyse

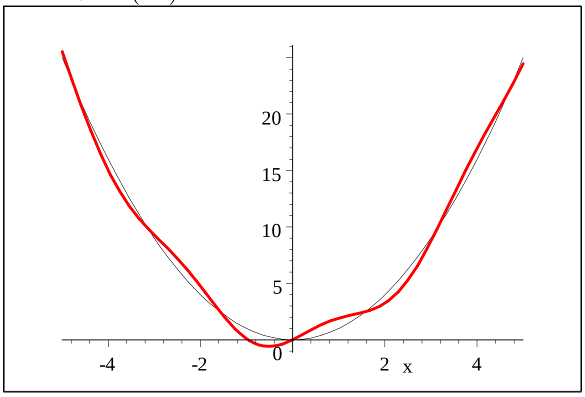
Dominanz bei x=0:

sinx$\approx x$	cosx$\approx 1-\frac{1}{2}x^2$	e$^x = 1+x$	Polynom: Untere Potenzen

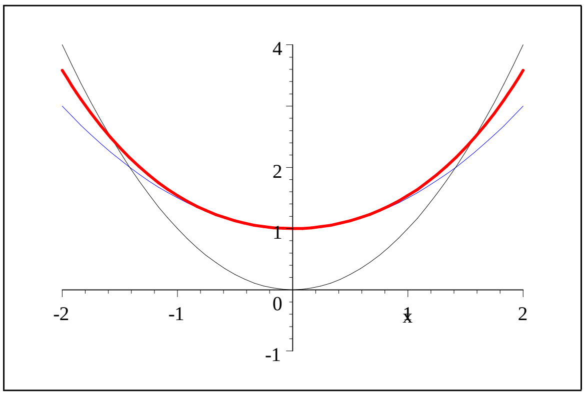
y=x und y=x+sinx und y=$x + 2\sin x$ und y= $x + 2\sin(2x)$



$x^2 + \sin(2x)$



y=$x^2 + \cos x$ hat bei x=0 dasselbe Verhalten wie y= $1 + \frac{1}{2}x^2$
(Über x$^2 + (1 - \frac{1}{2}x^2)$)



Weiter geht es: Rest Kap 8 / Beginn Kap. 9