16.9.2009

Heute Kap. 5.3 und Kap. 6.1

Ein Gleichungssystem mit äußerem Parameter:

(*Was ist zu beachten - merken wenn äußere Parameter in M oder $\vec{b}$ auftreten???* **Es sind Verzweigungen des Lösungsweges zu erwarten**)

a) $\boxed{\begin{array}{ll} 2x+7y=3 & (-3) \\ 4ax+3y=4 & (7) \end{array}}$ b) Geometrische Interpret: $\begin{array}{l} y=-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7} \\ y=-\frac{4a}{3}x+\frac{4}{3} \end{array}$

a) $\boxed{(28a-6)x+0y=19}$

Fall 1) $14a-3\neq 0$: $x=\frac{19}{2(14a-3)}$

$7y=3-\frac{19}{(14a-3)}=14\frac{3a-2}{14a-3}$ $\boxed{\vec{x}_L=\frac{1}{2(14a-3)}\begin{pmatrix} 19 \\ 4(3a-2) \end{pmatrix}}$

Fall2) 14a-3=0. Die letzte Gleichung:

$\boxed{0x=19}$ Unlösbar!!! /Keine Lösung

♦Jetzt noch etwa abgeändert (anderes $\vec{b}$!)

$\boxed{\begin{array}{ll} 2x+7y=7 & (-3) \\ 4ax+3y=3 & (7) \end{array}}$ gibt: $\boxed{(28a-6)x=0}$

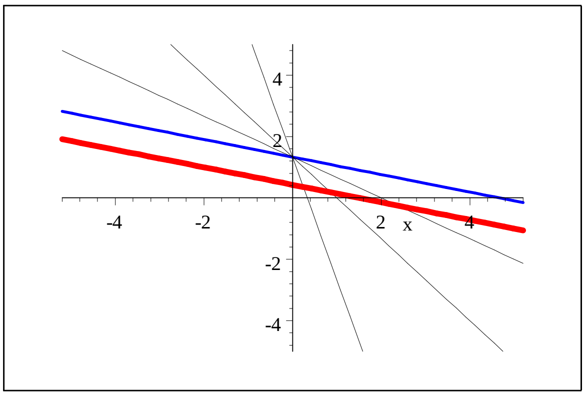
▼Fall $14a-3\neq 0$: x=0 und y=1 (also k=0)

▼ Fall 14a-3=0 d.h. $\boxed{0x=0}$ Also x frei und $y=1-\frac{2}{7}x$. Also k=1.

Und jetzt b) Geometrische Interpretation des ersten Falles:

$\begin{array}{l} y=-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7} \\ y=-\frac{4a}{3}x+\frac{4}{3} \end{array}$ Schnitt zweier Geraden in der Ebene

Rot die erste Gerade, schwarz oder blau die zweite für verschiedene a-Werte. Blau für $a=\frac{3}{14}$



Beachte $\boxed{y-0=-\frac{4a}{3}(x-\frac{1}{a})}$ 0der $\boxed{y-\frac{4}{3}=-\frac{4a}{3}(x-0)}$

Beispiel im Skript: (5.2.12) und Kap 4.6c

Das Elimnationsschema (5.2.7) nochmals durchgehen!:

Heute: Kap 5c Allgemeine Resultate für die Lösungsmenge

- Bisherige Erfahrungen zur Form von IL zusammenstellen
- Homogener und inhomogener Fall (Begriffsfestlegung)
- Herleitung des Resultates für den homogenen Fall, also von (5.3.12).
- Dasselbe für den inhomogenen Fall, also (5.3.24)
- Die Beziehung k+$\ell = n$. Dabei ist ℓ die Zahl der **nicht fortlassbaren Bedingungen** und vielfach durch Inspektion zu erkennen. Damit folgt die wichtige Größe k.
- Allgemeine Lösung des $2\times 2 - Systems$. k=0 immer dann, wenn die Determinante ad.bc$\neq 0$ erfüllt!

Bestimmt man die Lösungsmenge etwa mit dem Eliminationsverfahren, so entsteht am Ende die von den allgemeinen Sätzen vorhergesagte Struktur. Man liest daraus k ab und muss bei Proben ur Aufpunkt- und Richtungsvektoren testen!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

x+y+2z-3w=7
-2x+y-4z+w=5

$$3x + 6z - 4w = 2$$

z,w frei x=$\frac{1}{3}(2 - 6z + 4w)$

y=7-x-2z+3w=$7 - \frac{1}{3}(2 - 6z + 4w) - 2z + 3w = \frac{19}{3} + \frac{5}{3}w$

$$\vec{x}_L(z, ws) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 - 6z + 4w) \\ \frac{1}{3}(19 + 5w) \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Probe: Ok

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2a \\ a^2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 - a \end{pmatrix}$$

x+ay+z+2aw =a -
$a^2 + 2y + z + 3w$ =2-a +

$$\boxed{(a^2 - 1)x + (2 - a)y + (3 - 2a)w = 2 - 2a}$$

Z.B. x,w frei, dann Falluntersch. a=2 und a$\neq$ 2

Fall a=2: 3x+(-1)w=-2 usw.

Zwei Ebenen im Vierdimensionalen

Die Parametrisierungen:

$$\vec{x}_E(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_F(u,v) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Die Schnittpunktsgleichungen

$$\begin{array}{lll} 1+ & 2\alpha+0\beta & =\text{u+0v} \\ \text{-1+} & \alpha+0\beta & =\text{0u+1v} \\ 1+ & 0\alpha+1\beta & =\text{1u+2v} \\ \text{-1+} & 0\alpha+1\beta & =0 \end{array} \qquad \text{Inspektion:} \quad \underline{\beta=1}$$

Restsystem

$$\begin{array}{llll} 1+ & 2\alpha & =\text{u+0v} & (1) \\ \text{-1+} & \alpha & =\text{0u+1v} & (\text{-2}) \\ 2+ & 0\alpha & =\text{1u+2v} & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{3=u-2v} & \text{1=-4v} \\ \text{2=u+2v} & \end{array}} \quad \text{Also v=}\frac{-1}{4} \quad \text{und } \alpha=\frac{3}{4} \quad \text{und u=}\frac{5}{2}$$

Nachmittags: Kap. 6.1 Skalarprodukt:

★Vorgehen: Wie im Skript beschrieben.
★ Methodisches: ⧫ Nochmals Tunnelmethode (6.1.21) und zuvor ⧫ Vollständige Fallunterscheidung

★ Was ist zum Skalarprodukt zu merken?

1. Komponentenform und geometrische Form des Skalrproduktes
2. Die Rechenregeln für das Skalarprodukt. Siehe (6.1.25)!
3. Die Zerlegungsformel $\vec{b} = \vec{p} + \vec{s}$ wobei $\boxed{\vec{p} = \vec{a}\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{a}^2}}$. Vorgehen beim Anwenden der Formel ($\vec{a}\underset{\dots}{-}$ hinschreiben usw.)

Dinge, die man mit Hilfe des Skalrproduktes beherrscht: Einheitsvektor, Betrag eines Vektors ($|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$), senkrecht, Winkel zwischen zwei Vektoren

Trick:

Gegeben ein Vektor in $\mathbb{R}^3$ sagen wir $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Dann kann man ohne Rechnung sofort einige dazu senkrechte Vektoren hinschreiben. Sagen wir $\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\-c\\b\end{pmatrix}$. Klar wegen Skalarprodukt Null!

Als wichtige Anwendung:
6.1.4a Gleichungsbeschreibung von (Ebenen im Raum)

Morgen: Rest Kap. 6.14a und 6.2 Vektorprodukt!

17.9.2009

Rekonstruktion der Hauptformeln und Resultate zum Skalarprodukt:

Komponentenform	$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.	Geom. Form	$\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\alpha$
Rechenregeln (6.1.26)	xxx	Projektionsf.	$\vec{p} = \vec{a}\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{a}^2}$...

xxx Nach den heutigen Erfahrungen: Keine Klammern bei $(\vec{a}\vec{b})$ fortlassen!

■ Fingerübungen zum Skalarprodukt

$$\vec{a} = (1,3,0) \quad \vec{b} = (2,-1,3) \quad \vec{c} = (1,-1,-3)$$

	$(\vec{a}\cdot\vec{b})$	=		$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} + \vec{c}^2\vec{b}$	=
	$\|\vec{a}\|$	=		$\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$	=
Winkel zw. $\vec{a}$ u. $\vec{b}$	$\cos(\alpha)$	=	Proj. von $\vec{c}$ in Richt. $\vec{b}$	$\vec{c}_{\vec{b}}$	=
	$\vec{b}^2\vec{c}$	=	Best. 3		=
Einheitsv. in Richt. $\vec{a}+\vec{b}$	$\vec{e}$	=	Vektoren senk. $\vec{a}+\vec{b}$		= =

■ Der Abstand der Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$? Antwort $\vec{a}-\vec{b}$ bzw. $|\vec{a}-\vec{b}|$

$\vec{a}, \vec{b}, ...$ jetzt wieder allgemein aus V^3_O bzw. $\mathbb{R}^3_K$.

■ Es sei $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Zeigen Sie, dass $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$ gilt. Was haben Sie damit bewiesen? Antwort: Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinader senkrecht.

■ Vereinfachen Sie mit distributivem Rechnen:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2(\vec{c}-\vec{d}) + (\vec{a}-\vec{b})^2(\vec{c}+\vec{d})$$

■ Im Einheitskreis $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ einzeichnen!

■ Beweisen Sie den "Cosinussatz für Dreiecke" vektoriell.

Antwort: $c^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

■ Was für eine Figur wird im $\mathbb{R}^3_K$ durch die Punkte beschrieben, deren Koordinaten die Gleichung $\boxed{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1}$ erfüllen? Kürzester Vektorabstand dieser Figur vom Ursprung?

■ Ein Massenpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig mit der Bahnkurve $\vec{r}^K(t) = (1,3,7) + (2,3,-6)t$. Welchen Winkel hat die Bahn zur der 3-Achse?

■ Was ist das:

$\{g | g \subset E^3$, es gibt eine Parametris $\vec{x}_g(u) = \vec{a} + u\vec{e}$ von g mit $\vec{a}, \vec{e} \in V^3_O\}$Antwort: Menge aller Geraden in E^3.

$P_g = \{P \mid P \in E^3,$ $\boxed{\text{Es gibt Par. } \vec{x}_g \text{ und. g und ein } u \in \mathbb{R}\text{, so dass } \vec{x}_P = \vec{x}_g(u)}$ $\}$

Die Menge der Punkte auf der Geraden g.

■ g und h$\subset E^3$ seien zwei nicht paralle Geraden im Raum. Bestimme den Vektor des kürzesten Abstandes der beiden Geraden und die Verbindungspunkte auf g und h..

Hinweis: Es sei $\vec{n}$ ein Richtungsvektor, der auf beiden Geraden senkrecht steht. Dann muss der Abstandsvektor die Richtung von $\vec{n}$ haben. Und: $(\vec{n}\cdot\vec{e}) = (\vec{n}\cdot\vec{f}) = 0$

D.h. man je eine Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \vec{x}_g(u) &= \vec{a} + u\vec{e} \\ \vec{x}_h(v) &= \vec{b} + v\vec{f} \end{aligned}$$

sowie $\vec{n}$.

Geometrisch überlegt man

$$\begin{aligned} \vec{x}_h(v_S) + \lambda_S\vec{n} &= \vec{x}_g(u_S) && \text{d.h. und Index S weglassen)} \\ \left(\vec{b} + v\vec{f}\right) + \lambda\vec{n} &= \vec{a} + u\vec{e} && \text{Gleichungsumformung} \\ (\vec{b} - \vec{a}) + v\vec{f} + \lambda\vec{n} &= u\vec{e} && \text{mit } \vec{D} = \vec{b} - \vec{a} \text{ Abstandsv. der beiden..} \end{aligned}$$

Endform: Zu lösen ist die Vektorgl. mit $\square$-ten Unbestimmten.

$$\vec{D} + \boxed{v}\vec{f} + \boxed{\lambda}\vec{n} = \boxed{u}\vec{e}$$

Neue Idee: Multipliziere diese Gl. mit gut gewählten bekannten Vektoren skalar!!!

$$\begin{aligned} \left(\vec{D} + v\vec{f} + \lambda\vec{n}\right)\cdot\boxed{\vec{n}} &= u\vec{e}\cdot\boxed{\vec{n}} \\ (\vec{D}\cdot\vec{n}) + v0 + \lambda\vec{n}^2 &= u0 \\ & \boxed{\lambda = -\frac{(\vec{D}\vec{n})}{\vec{n}^2}} \end{aligned}$$

Jetzt wird skalar mit $\vec{e}$ und dann mit $\vec{f}$ multipliziert! Ergebnis

$$\begin{aligned} (\vec{D}\vec{e}) + v(\vec{e}\vec{f}) &= u\vec{e}^2 && \vec{f}^2 && \vec{e}\vec{f} \\ (\vec{D}f) + v\vec{f}^2 &= u(\vec{e}\vec{f}) && (-\vec{e}\vec{f}) && -\vec{e}^2 \end{aligned}$$

$$\left((\vec{D}\vec{e})\ \vec{f}^2 - (\vec{D}f)(\vec{e}\vec{f})\right) = u\left(\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2\right)$$

$\boxed{u = \frac{(\vec{D}\vec{e})\ \vec{f}^2 - (\vec{D}\vec{f})(\vec{e}\vec{f})}{\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2}}$ zulässig, da $\vec{e}$ und $\vec{f}$ nicht parallel

Analog: $\left((\vec{D}\vec{e})(\vec{e}\vec{f}) - (\vec{D}\vec{f})\vec{e}^2\right) + v\left((\vec{e}\vec{f})^2 - \vec{e}^2\vec{f}^2\right) = 0$

$$\boxed{v = \frac{(\vec{D}\vec{e})(\vec{e}\vec{f}) - (\vec{D}\vec{f})\vec{e}^2}{\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2}}$$

Beachte $\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2 = \mathrm{F}^2$, wo F der Flächeninhalt des von $\vec{e}$ und $\vec{f}$ aufgespannten Parallelogrammes ist.
F$\neq 0$, da g und h nicht parallel sind.

Wir haben noch mit Kap. 6.2 begonnen. Insbesondere Komponentenform Kreuzprodukt und Rchenregeln!

18.9.2009

Vormittags wurde Kap. 5.2 durchgegangen (ohne reziproke Basis). Nachnittags nur Übung

---

- Interpretieren und Verstehen von Rechenausdrücken mit Vektor- und Skalrprodukt.
- Aufbau und zulässige Termumformungen, alles Dinge, die vor dem Einsetzen eventueller Werte geschehen sollten

Nachfolgend dazu einige Beispiele:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\left(\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + (\vec{a}\vec{b})\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

$$\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\left(\vec{b} \times \vec{b}\right) = \vec{a}$$

Nach Vereinfachung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zyklisches Vertauschen der Faktoren im Spatprodukt $\square \cdot (\square \times \square)$

Die Faktoren seien: $(\vec{a} \times \vec{b})$ $\vec{c}$, $\vec{d}$ Das gibt:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{d} \cdot \left(\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}\right) = \vec{c} \cdot (\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right)$$

Wie erkennt man, ob drei Vektoren (im Raum) abhägig sind, also in einer Ebene liegen? Bei nachfolgendem Beispiel hat man drei (und mehr) Methoden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Inspektion. Man sieht hier $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Sofern sie geht, ist das die einfachste Methode.
2. Man berechnet das Spatprodukt. Etwa $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 45 - 45 = 0$.

3. Man untersucht, ob $\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{0}$ nichttriviale Lösungen besitzt.In unserem Fall ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

x+4y+5z=0	+1		9x+9z=0
2x-y+z=0	+4	+2	7x+7z=0
3x+2y+5z=0		+1	

Also nur eine Gleichung und ein freier Parameter. Man hat k=1.

■ Die Ebene E habe die Parametrisierung $\vec{x}_E(u,v) = \vec{a} + u\vec{e} + v\vec{f}$.
Die Gerade g habe $\vec{x}_g(\alpha) = \vec{b} + \alpha\vec{g}$.

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}^K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{g}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Schnittpunkt von g und E
2. Winkel zwischen g und E
3. Wo schneidet die Normale zu E durch den Schnittpunkt die x-y-Ebene $\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$
4. Spatprodukt aus $\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$
5. Kürzester Abstand von E zum Ursprung

Ging ganz gut durch.

Eine Flugparabel gehe durch den Ursprung mit Geschwindigkeit $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Unter welchem Winkel trifft sie die Ebene E mit $\vec{x}_E(u,v) = u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? im Aufschlagpunkt Es sei $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

Aufstellen der Flugparabel und schneiden mit E

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 5t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \ldots.. \quad \vec{v})t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 - gt \end{pmatrix} \ldots \vec{x}_E(u,v) = \begin{pmatrix} u - v \\ 2u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2t = u - v \\ 2t = 2u \\ 5t - \frac{1}{2}gt^2 = v \end{pmatrix} \qquad \text{v=u-2t=-t}$$

Aus der letzten Gleichung v hinauswerfen. Gibt:

$$5t - \frac{1}{2}gt^2 = -t$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + 6t = 0 \qquad t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{12}{g} \qquad \vec{v}(t_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man den gesuchten (Vorüberlegung) Winkel bestimmen!

$$\cos\epsilon = \frac{-12}{3\sqrt{57}} = -0.529\,81$$

Noch eine etwas andere Flugparabelaufgabe:

Eine Flugp. gehe durch den Ursprung mit Geschw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ w \end{pmatrix}$. Weiter sei $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$.

Wie groß ist w zu wählen, damit die Flugbahn die Höhe H>0 erreicht?

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \\ wt - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad \text{z(t)} \geq H \text{ verlangen. Grenze =H..}$$

$wt - \frac{1}{2}gt^2 = H \qquad \frac{1}{2}gt^2 - wt + H = 0 \qquad t^2 - \frac{2w}{g}t + \frac{2H}{g} = 0$

$t_{12} = \frac{w}{g} \pm \sqrt{\frac{w^2}{g^2} - \frac{2H}{g}}$ Erreichen heißt "reelle Lösungen".

Also $\frac{w^2}{g^2} \geq 2H/g \qquad \boxed{w \geq \sqrt{2Hg}}$

Wochenendübungen 18.9.

(mit Antworten. 22.8./ Ein Teil der Aufgaben: s. Aufgaben zum Skript)

Jeder Teilnehmer sollte zwei oder drei dieser Übungsaufgaben auswählen.und die Lösung Montag schriftlich abgeben. Die Wahl sollte nicht auf "besonders leicht", sondern auf "gerade noch schaffbar" fallen. Oder auch: "Da muss ich mich noch verbessern". Ich werde dann Kommentare und Hilfen dazu gegen, wie solche Übungsaufgaben aussehen sollten.

Natürlich kann / sollte er sich auch mit den übrigen Aufgaben befassen!

1. Fingerübungen Kap. 1:

   (a) Lösen Sie die quadratische Gleichung $\boxed{2y^2 + 3y - a = 0}$ in y. Für welche Werte von a erhält man reelle Lösungen?

   (b) Eine Gerade gehe durch die Punkte (7,3) und (-1,5) der Ebene. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden und bringen Sie diese in die Achsenabschnittsform.

   (c) Gezieltes Ausklammern:

$$\sqrt{1+a^2+3x} + 2\sqrt{1+a^2} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{1+a^2}\,(? + 2? - ?)$$

a)▼ $y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{a}{2} = 0$ (Normalform) $y_{12} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{a}{2}}$

$\underline{y_{12} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{9+8a}}$ (Endform). Für $a \geq -\frac{9}{8}$ reelle Lösungen! ▲

b)▼ Zweipunkteform: y-3=m(x-7) mit m=$\frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$. Also

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{19}{4} \quad \text{und} \quad \frac{y}{\left(\frac{19}{4}\right)} + \frac{x}{19} = 1$$

▲

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+a^2+3x} + 2\sqrt{1+a^2} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ = \quad &\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1 + \frac{3x}{1+a^2}} + 2 - \frac{1}{1+a^2}\right) \end{aligned}$$

▲

c)

2 Fingerübung Kap. 2: Fertigen Sie eine (ordentliche) Skizze eines Tetraeders mit Koordinatensystem im Schwerpunkt. Bestimmen Sie dann (Pythagoras usw.) die Koordinatenvektoren der vier Eckpunkte sowie den Tetraederwinkel.

3 Es sei $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (1, 0, 7)$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden, die durch die Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt wird.

(b) Liegt der Punkt Q mit $\vec{x}_Q^K = (4, 9, -15)$ auf dieser Geraden?

(c) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt nicht auf dieser Geraden liegt. Bestimmen sie dann eine Parametrisierung der Ebene E, die durch den Nullpunkt geht und g enthält.

(d) Wo schneidet E die x-y-Ebene.

▼ Zweipunkteform

$$\boxed{\vec{x}_g(u) = (2, 3, -1) + u(-1, -3, 8) = (2 - u, 3 - 3u, -1 + 8u)}$$

Gibt Gleichungssystem

4=2-u	Die ersten beiden Gleichungen
9=3-3u	verlangen u=-2. Das erfüllt die
-15=-1+8u	dritte nicht. Q liegt nicht auf g.

Auch der Nullpunkt liegt nicht auf g (u=2 erfüllt die weiteren Gl. nicht!). Die gesuchte Ebene wird z.B. durch

$$\vec{x}_E(u, v) = u\vec{a} + v(\vec{b} - \vec{a}) = (2u - v, 3u - 3v, -u + 8v)$$

z=0 verlangt u=8v. Also $\boxed{\vec{x}_{z=0}(v) = (15v, 21v, 0) = 3v(5, 7, 0)}$ ▲

4 Ein bewegter Körper befinde sich zur Zeit $t_1 = -2$ am Orte A und zur Zeit $t_2 = 5$ am Orte B mit Koordinatenvektoren $\vec{r}_A = (-3, 5, 7)$ und $\vec{r}_B = (0, -4, 13)$.

(a) a)Wie groß ist die mittlere vektorielle Geschwindigkeit in diesem Zeitraum?

(b) b) Angenommen, der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit: Wo befindet er sich zur Zeit t=5?

(c) c) Wann schneidet er die x-y-Ebene (bei konstanter Geschwindigkeit)?

▼ $\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1} = \frac{(3,-9,6)}{5-(-2)} = \frac{3}{7}(1, -3, 6)$. / Am Orte $\vec{r}_B$ / Bahnkurve:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_A + \vec{V}_m(t+2) = (-3, 5, 7) + \frac{3}{7}(1, -3, 6)T \\ &= \left(-3 + \frac{3}{7}T, 5, -\frac{9}{7}T, 7 + \frac{18}{7}T\right) \end{aligned}$$

Schnitt z=0 für T=t+2=$-\frac{18}{49}$. Also t=$-\frac{98}{49} - \frac{18}{49} = -\frac{116}{49}$ ▲

5 **Flugparabeln**. (Achtung: $\vec{r}^K(t)$ und $\vec{v}^K(t)$ müssen immer zuerst in beiden Formen vollständig angegeben werden! An T=t-$t_0$als Hilfsgröße denken.) Bestimmen Sie die Flugparabel, die wie folgt festgelegt ist: $\vec{r}^K(-3) = (1, 2, 2)$, $\vec{v}^K(-3) = (0, 2, 3)$ und $\vec{g}^K = (0, 0, -10)$.

(a) $\vec{r}^K(0)$ und $\vec{v}^K(0)$? $\vec{r}^K(1) =$?

(b) In welcher Ebene verläuft die Flugbahn?

(c) Wann und wo wird die x-y-Ebene getroffen, wo liegt der Scheitel?

▼ $\vec{r}^K(t) = (1,2,2) + (0,2,3)T + (0,0,-5)T^2 = (1, 2+2T, 2+3T-5T^2)$
mit T=t+3 und $\vec{v}^K(t) = (0,2,2-10T)$.
$\vec{r}^K(0) = (1,8,-34)$ usw. Die Bahn liegt in der um (1,2,2) verschobenen y-z-Ebene!. 2+3T-5T^2 $= 0$ gibt die Schnittzeiten. Usw. Der Scheitel hat $v_z = 0$. Zeitpunkt $T_S = \frac{1}{5}$ oder $t_s = -\frac{14}{15}$. Also Scheitel bei $\vec{r}^K(-\frac{14}{15})$. Usw.▲

6 **Flugparabel:** Spezialisieren Sie auf den Fall des "senkrechten Wurfes" und leiten Sie daraus die üblichen Formeln für die Fallzeit ("Loslassen in der Höhe H") und die Auftreffgeschwindigkeit ab.
▼ $\vec{r}_0 = (0,0,H)$ und $t_0 = 0$. $\vec{v}_0 = (0,0,0)$ und $\vec{g} = (0,0,-g)$. Also

$$\vec{r}^K(t) = (0,0,H - \frac{1}{2}gt^2) \text{ und } \vec{v}^K(t) = (0,0,-gt)$$

Aufschlag (z=0) zur Zeit $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ und zugehörige (skalare) Geschwindigkeit $v_A = \sqrt{2Hg}$. ▼

7 Ein Strahl verläßt den Ursprung mit der Richtung $\vec{n}^K = (1,1,2)$. In der Ebene z=H wird der Strahl reflektiert. Die Richtung des reflektierten Strahles ist $\vec{r}^K = (1,2,-3)$. Wo trifft der reflektierte Strahl die x-y-Ebene?

▼ Bis zur Reflektion $\vec{s}(\alpha) = \alpha(1,1,2)$. Für $2\alpha = H$, also $\alpha = \frac{H}{2}$ wird dir Ebene z=H im Punkte $\frac{H}{2}(1,1,2)$ getroffen. Das gibt für die Parametrisierung des reflektierten Strahles

$$\vec{x}_r(u) = \frac{H}{2}(1,1,2) + u(1,2,-3) = \left(\frac{H}{2} + u, \frac{H}{2} + 2u, H - 3u\right)$$

Man hat z=0 für U=$\frac{H}{3}$. Der gesuchte Auftreffpunkt ist H$(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, 0)$.▲

8 Ein Mensch bewegt sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich die Spitze seines Schattens? (Bezeichnungen, Rollenverteilung, gesuchte Form des Resultates- dann Lösung.)

9 Wir betrachten die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \text{ in der Unbestimmten x.}$$

Diese Gleichung soll auf zwei Weisen gelöst werden.

(a) a) Machen Sie den Ansatz x=$\frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie dies in die Gleichung für x ein. Bestimmen Sie α so, dass Sie die entstehende Gleichung in y lösen können. Zuerst y^3 bestimmen, damit dann $(\alpha/y)^3$ berechnen und dann erst die dritten Wurzeln bilden. Das ergibt x. (Erste Methode.)

(b) b) Machen Sie den Ansatz x=u+v. Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man die Gleichung $(u^3+v^3)+(u+v)(3uv+p)+q = 0$. Das ist erfüllt, wenn man 3uv+p=0 und $u^3+v^3+q=0$ verlangt. Aus der ersten Gleichung folgt 27u$^3v^3 = -p^3$. Aus beiden Gleichungen folgt v$^6 + qv^3 - (p/3)^3 = 0$. Das ist lösbar. Analog für u. Es folgt:

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ und } u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Erneut folgt eine Lösung (der drei) Lösungen. (Zweite Methode.)

10 Bestimmen Sie die Lösungsmengen und interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Resultate von Kap. 5.3.

x+2y+3z+4w=1	x+y/2+z/3+w/4=1
x+3y+5z+7w=2	x+y/3+z/5+w/7=2

11 Überprüfen und konkretisieren Sie an den nachfolgenden Beispielen die Regel "Allgemeine Lösung der inhomog. Gl. = spezielle. Lösung der inhom. + allgemeine der homogenen". Welche Werte haben jeweils k und ℓ ? Kap. 5.3

-x+2y+z-3w=7	x+y+z+w=3 2x-y+3z-2w=-1	x+y+z+w=3 2x-y+3z-2w=-1 y-z=2

12 Lösen Sie (a,b und c äußere Parameter) Hier ist sorgfältige und konzentrierte Arbeit angebracht::

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + ay = c \\ bx + 2y = c \end{array}}$$

▼ Ein Eliminationschritt 2(1)-a(2) liefert:

$$(4 - ab)x = c(2 - a)$$

Fallunterscheidung 1a): $4 \neq ab$. Wir dürfen dividieren und erhalten $\boxed{x=\frac{c(2-a)}{4-ab}}$. Elimiert man stattdessen x, so folgt (4-ab)y=c(2-b). Dh. insgesamt im Fall ab$\neq$ 4:

$$\boxed{\vec{x}_L=\frac{c}{4-ab}\,(2-a, 2-b)}$$

1b) Fall ab=4: Jetzt lautet die Gleichung für x aber $\boxed{0x=c(2\text{-}a)}$

Unterfall 1b1): ab=4 und c=0: Es folgt x frei und y=-$\frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}(c - bx)$.

Unterfall 1b2): ab=4 und c$\neq$ 0. Man beachte: Entweder sind a,b beide gleich zwei oder beide sind ungleich zwei. Im letzten Fall ist ds System unlösbar. Im ersten (a=b=2,c$\neq$ 0) haben wir wieder x frei und y=$\frac{1}{2}(c - bx)$.

Also: Für a,b$\neq$ 2, ab=4 und c$\neq$ 0 ist das System unlösbar. Für die restlichen Fälle aus ab=4 hat man k=1 mit

$$\vec{x}_L(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}(c - bx) \end{pmatrix} = \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -b \end{pmatrix}$$

▲

13 **Die Zykloide**: Ein Kreis mit Radius R rolle geradlinig auf einer Ebene. Auf dem Kreisrand sei ein Punkt P markiert. Bestimmen Sie die Bahnkurve t$\mapsto \vec{r}^K(t)$ dieses Punktes. Denken Sie daran, mit der Wahl eines günstigen Koordinatensystems zu beginnen!

14 Eine Zahlfolge c_n (n=1,2,3,....) erfüllt die Rekursionsformel $c_{n+1} = c_n + n$. Weiter sei $c_1 = 1$.

(a) Bestimmen Sie $c_1, c_2, ..., c_5$.

(b) Bestimmen Sie α, β, γ so, dass $c_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ für n=1,2,3. (Dazu ist ein einfaches lineares $3\times 3 - System$ zu lösen.)

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass das Resultat aus b) c_n für alle n liefert!

▼ Beweis: Wir haben $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + 1 = 2$, $c_3 = 2 + 2 = 4$, $c_4 = 7$ und $c_5 = 11$. Also (1,2,4,7,11,......). Das zu lösendes Gleichungssystem ist

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1\alpha+1\beta+1\gamma\ =1 & - & \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 2 & + & - \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = 4 & & + \end{array}}\ \boxed{\begin{array}{ll} 3\alpha + \beta = 1 & - \\ 5\alpha + \beta = 2 & + \end{array}}\quad 2\alpha = 1$$

Es folgt $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$ und $\gamma = 1$. D.h.wir haben $c_n = \frac{1}{2}(n^2 - n) + 1$ für n=1,2 und 3. Jetzt nehmen wir an, wir hätten dies bereits für n=1,2,....,N bewiesen. Insbesondere ist $c_N = \frac{1}{2}N(N - 1) + 1$.

Gilt das dann auch für N+1? Zu beweisen ist: $c_{N+1} = \frac{1}{2}(N+1)N+1$. Wir haben laut Rekursionsformel

$$\begin{aligned} c_{N+1} &= c_N + N = \left(\frac{1}{2}N(N-1)+1\right) + N \\ &= \frac{1}{2}\left(N^2 - N + 2N\right) + 1 = \frac{1}{2}\left(N^2+N\right)+1 \\ &= \frac{1}{2}N(N+1)+1 \quad \text{wie gewünscht.} \end{aligned}$$

D.h. die Gleichung ist für alle n=1,2,3,... gültig.▲

15 Sei $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass dann gilt:

$$(x_1 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

▼ Für n=1 besagt die Ungleichung $x_1\frac{1}{x_1} \geq 1$, was sicher korrekt ist. Wir setzen $S_n = (x_1 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}\right)$ - das ist abkürzende Bezeichnug - und nehmen an, dass die Ungleichung bereits bis N (also für n=1,2,...,N) bewiesen ist. Insbesondere gilt stets $S_N \geq N^2$. Wir müssen jetzt $S_{N+1} \geq (N+1)^2$ beweisen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= (x_1 + ... + x_N + x_{N+1})(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_N} + \frac{1}{x_{N+1}}) \\ &= S_N + (x_1 + ... + x_N)\frac{1}{x_{N+1}} + x_{N+1}(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_N}) + 1 \\ &= S_N + \left(\frac{x_1}{x_{N+1}} + \frac{x_{N+1}}{x_1}\right) + ... + \left(\frac{x_N}{x_{N+1}} + \frac{x_{N+1}}{x_N}\right) + 1 \end{aligned}$$

Zwischen S_N und 1 stehen N Summanden! Nun werden wir gleich beweisen, dass für a,b>0 stets $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ gilt. Laut Induktionvoraussetzung ist $S_N \geq N^2$. Das gibt zusammen:

$$S_{N+1} \geq N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$$

was zu zeigen war.

Nun zum Beweis der Hilfsaussage. Sicher ist $(a-b)^2 \geq 0$. Es folgt

$a^2 + b^2 \geq 2ab$. Da a,b> 0 ist, dürfen wir die Ungleichung durch ab teilen. Also $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ oder $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ wie behauptet!▲

$\sin(4x) + \frac{1}{2}\sin(8x)$