Häusliche Probeklausur Vorkurs Mathematik 24.9.2009

Zeit: 2 Stunden (plus ev. 10 Minuten).

Beantworten Sie die Fragen möglichst in der gegebenen Reihenfolge, die in etwa der Anordnung des Stoffes entspricht. Lesen Sie den Text genau und beantworten Sie die gestellten Fragen, keine selbst ausgedachten. Notieren Sie eventuelle Zusatzbeobachtungen kurz, z.B. auch, wenn Sie entdecken, dass Ihre Lösung falsch ist.

Viel Erfolg!

■ 1) Multiplizieren Sie (mit Hilfe der Distributivgesetze) den folgenden Ausdruck aus. (Endform)

$$(a^3 + 3a^2 + a - 3)^2.$$

■ 2) Was ergibt der Binomialatz für den Ausdruck $\boxed{(2 - x^2)^4}$? (Die Binomialkoeffizienten für n=4 wissen oder über das Pascalsche Dreieck bestimmen)

■ 3) Lösen Sie die quadratische Gleichung in x (mit a als äußerem Parameter) $\boxed{x^2 + 6ax = 7a^2.}$

■ 4) Was versteht man unter dem *Ortsvektor*, was unter dem *Koordiantenvektor eines Punktes* ? Welche Beziehung besteht zwischen beiden? Was muß jeweils noch zusätzlich vorgegeben sein?

■ 5) Gegeben drei Punkte P,Q und R aus E^3 mit Koordinatenvektoren $\vec{x}_P^K = (2, 0, 0)$ und $\vec{x}_Q^K = (2, 0, 2)$ und $\vec{x}_R^K = (0, 3, 1)$.

a) Skizzieren Sie die drei Vektoren (räumliche Lage soll sichtbar werden!).

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S (für gleiche Massen) dieser drei Punkte.

c) Es sei E die Ebene, die von P,Q und R aufgespannt wird. Geben Sie eine Parametrisierung von E an. Wie lauten die Parameterwerte, die zum Schwerpunkt gehören.

d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K$. (Angabe im Bogenmaß.)

e) Berechnen Sie das Vektorprodukt $(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)$ sowie dessen Betrag. Welche geometrische Größe innerhalb der Ebene E haben Sie mit diesem Betrag bestimmt?

■ 6) Es seien $\vec{d}_1$ und $\vec{d}_2$ die beiden Diagonalen eines Parallelogramms in V_0^3. Diese seien gegeben. Bestimmen Sie die beiden Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Parallelogramms.

■ 7) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(-3) = (0, -2, 0)$ und $\vec{v}(-3) = (0, 7, 8)$. Weiter sei $\vec{g} = (0, 0, -10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel?

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt.

c) Wo und wann trifft die Flugbahn die Horizontalebene (z=0)?

c) Wo wird die z-Achse getroffen und unter welchem Winkel ?

d) Geben Sie die skalare Geschwindigkeit als Funktion der Zeit an.

■ 8) Lösen Sie (x,y Unbestimmte, a äußerer Parameter, Aufpassen!):

$$\boxed{\begin{array}{l} 2ax + 3y = 3a \\ 2a^2x + 4y = 3a \end{array}}$$

■ 9) Es sei $\vec{a}^K = (0, 3, 1)$ und $\vec{x} = (0, 3, 3)$. Zerlegen Sie $\vec{x}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und zeichnen Sie die gesamte Konfiguration.

a) Sei $\vec{g} = (0, 0, -g)$ und $\vec{N} = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$. Zerlegen Sie $\vec{g}$ in eine zu $\vec{N}$ parallele und senkrechte Komponente. Fertigen Sie eine Skizze.

■ 10) Berechnen Sie distributiv $((\vec{a} + \vec{b})^2)^2$

■ 11) Bringen Sie die folgende komplexe Zahl in die kartesische Endform:

$$\frac{1}{4+i} + \frac{i}{1 + \frac{1}{3+i}}$$

■ *12) Sei z=x+iy (x,y$\in \mathbb{R}$) eine komplexe Zahl. Berechnen Sie das Produkt Z=$e^{i\alpha} z$ =u+iv kartesisch. Durch Vergleich können Sie u und v durch x und y ausdrücken.

Setzen Sie weiter $\vec{z}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{Z}^K = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$. Schreiben Sie $\vec{Z}^K$ in Matrixform $\boxed{\vec{Z}^K = R.\vec{z}^K}$. Wie lautet die 2×2−Matrix R=R(α)?

a) Berechnen Sie dann gemäß der Regel *Zeile×Spalte* das *Matrixprodukt* $R(\alpha)R(\beta)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Kommentierte Lösungen!

■ 1) Multiplizieren Sie (mit Hilfe der Distributivgesetze) den folgenden Ausdruck aus. (Endform)

$$(a^3 + 3a^2 + a - 3)^2.$$

▲ $(a^3 + 3a^2 + a - 3)^2 = a^6 + 6a^5 + 11a^4 - 17a^2 - 6a + 9.$
Fehler bei den mittleren Termen.

####

■ 2) Was ergibt der Binomialatz für den folgenden Ausdruck? (Die Binomialkoeffizienten für n=4 wissen oder über das Pascalsche Dreieck bestimmen): $\boxed{(2 - x^2)^4}$

▲ $(2 - x^2)^4 = 16 - 32x^2 + 24x^4 - 8x^6 + x^8$
Häufig Fehler beim Vorzeichen $\sum \binom{4}{k} 2^{4-k} \boxed{\left(-x^2\right)^k}$

$$\left(-x^2\right)^k = (-1)^k x^{2k}$$

######

■ 3) Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in x (mit a als äußerem Parameter) $\boxed{x^2 + 6ax = 7a^2.}$
▲ $x_{12} = -3a \pm \sqrt{9a^2 + 7a^2} = -3a \pm 4|a|$

p-q-Formel beherrschen, **Kürzen** $\frac{6}{2} = 3$!!! , Achtung $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$.

######

■ 4) Was versteht man unter dem *Ortsvektor,* was unter dem *Koordiantenvektor eines Punktes* ? Welche Beziehung besteht zwischen beiden? Was muß jeweils noch zusätzlich vorgegeben sein?

> ▲ Der *Ortsvektor des Punktes (bezüglich des Ursprungs)* ist der geometrische Pfeil, der vom gegebenen Ursprung zum Punkt zeigt. *Der Koordinatenvektor des Punktes (bezüglich K)* ist ein Zahltupel, das einen achsenparallen Weg vom Ursprung zum Punkt beschreibt.

Formulierungsschwächen und unvollständig! *Geometrischer Pfeil, Koordinaten im achsenparallelen Weg sollten angesprochen sein! Dass die Elemente von* $\mathbb{R}^3_K$ achsenparalle Wege in K beschreiben, wurde kaum angesprochen und war wohl vielfach nicht verstanden worden!

#####

■ 5) Gegeben drei Punkte P,Q und R aus E^3 mit Koordinatenvektoren $\vec{x}^K_P = (2, 0, 0)$ und $\vec{x}^K_Q = (2, 0, 2)$ und $\vec{x}^K_R = (0, 3, 1)$.
a) Skizzieren Sie die drei Vektoren (räumliche Lage).
Räumliche Lage von Q vielfach nicht zu erkennen!
b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S (für gleiche Massen) dieser drei Punkte.
▲

$$\vec{x}^K_S = \frac{1}{3}(\vec{x}^K_P + \vec{x}^K_Q + \vec{x}^K_R) = \frac{1}{3}(4, 3, 3).$$

Einfachste Formelanwendung. Vielfach extrem umständlich.

c) Es sei E die Ebene, die von P,Q und R aufgespannt wird. Geben Sie eine Parametrisierung von E an. Wie lauten die Parameterwerte, die zum Schwerpunkt gehören.

▲ Etwa

$$\vec{x}_E(u,v) = (2,0,0) + u((0,0,2) + v(-2,3,1) = (2-2v, 3v, 2u+v)$$

Inspektion: 3v=$\frac{3}{3}$ gibt $\boxed{v=\frac{1}{3}}$ und 2u+v=$\frac{3}{3}$ gibt dann $\boxed{u=\frac{1}{3}}$.

d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K$. (Angabe im Bogenmaß.)

▲

$$\cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Kürzen!!

e) Berechnen Sie das Vektorprodukt $(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)$ sowie dessen Betrag. Welche geometrische Größe innerhalb der Ebene E haben Sie mit diesem Betrag bestimmt?

▲

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Bettrag}=\sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Der Betrag liefert den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. *Der letzte Teil vielfach schwach. Betrag der Normalen ist ungeheurer Quatsch. Bezug zur geometrischen Form des Vektorproduktes wurde erwartet.* **Die Normale liegt nicht innerhalb der Ebene!**

####

■ 6) Es seien $\vec{d_1}$ und $\vec{d_2}$ die beiden Diagonalen eines Parallelogramms in V_0^3. Diese seien gegeben. Bestimmen Sie die beiden Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Parallelogramms.

▲

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{e} &= \vec{a} - \vec{b} \end{aligned} \qquad \text{das gibt sofort} \qquad \begin{aligned} \vec{a} &= \tfrac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}) \\ \vec{b} &= \tfrac{1}{2}(\vec{d} - \vec{e}) \end{aligned}$$

Elementare Rechnung. Vielfach viel zu lang.

####

■ 7) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(-3) = (0,-2,0)$ und $\vec{v}(-3) = (0,7,8)$. Weiter sei $\vec{g} = (0,0,-10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Achtung: Was ist an dieser Stelle alles sorgfältig anzugeben?)

▲ Wir haben $\boxed{T = t+3 \text{ und } t = T-3}$ für den Informationszeitpunkt. Damit

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (0,-2,0) + (0,7,8)T + \frac{1}{2}(0,0,-10)T^2 = (0,-2+7T, 8T-5T^2) \\ \vec{v}(T) &= (0,7,8-10T). \end{aligned}$$

. *Im Skriptum vgl. das in (4.5.32) Gesagte. Alle nachfolgenden Fragen beziehen sich auf diese drei Zeilen.*

Nachfolgend in Klammern gesetzte Teile dienen der erneuten Erläuterung und sollten in der Antwort nicht aufgeschrieben werden! Es gibt kein ausgelassenen Zwischenrechnungen!

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt.

▲ $\boxed{v_3(t_S) = 0}$ (das ist die Bedingung für den zugehörigen Zeitpunkt t_S.). Also $T_s = \frac{4}{5}$ und $t_S = T_S - 3 = -\frac{11}{5}$. Der Ort (folgt durch Einsetzen des Zeitwertes):

$$\vec{r}(-\frac{11}{5}) = (0, -2+7\left(\frac{4}{5}\right), 8\left(\frac{4}{5}\right) - 5\left(\frac{4}{5}\right)^2) = (0, \frac{18}{5}, \frac{16}{5}) = \frac{2}{5}(0,9,8)$$

.

c) Wo und wann trifft die Flugbahn die Horizontalebene (z=0)?

▲ z-Koortdinate Null setzen: $\boxed{8T\text{-}5T^2 = 0}$. Hat 2 Lösungen $T_1 = 0$ und $T_2 = \frac{8}{5} = 2T_S$. Damit folgt $\vec{r}(t_1) = (0, -2, 0)$ und $\vec{r}(t_2) = (0, \frac{46}{5}, 0)$.

c) Wo wird die z-Achse getroffen und unter welchem Winkel ?

▲ $\boxed{x\text{=}0 \text{ und } y\text{=}0}$ gibt $T_z = \frac{2}{7}$ $t_Z = -\frac{19}{7}$ und $\vec{r}(t_Z) = (0, 0, \frac{92}{49})$ und $\vec{v}(t_Z) = \left(0, 7, \frac{36}{7}\right) = \frac{1}{7}(0, 49, 36)$. Das gibt den Winkel mit $\vec{e}_3$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{36}{7}}{1 \cdot \frac{1}{7}\sqrt{49^2 + 36^2}} = \frac{36}{\sqrt{3697}} \,(= 0.592\,08)$$

$\sqrt{1296} = 36$

d) Geben Sie die skalare Geschwindigkeit als Funktion der Zeit an.

▲

$$v(t) = \sqrt{49 + (8 - 10T)^2} = \sqrt{49 + (22 + 10t)^2}$$

Einige wenige hielten sich an das empfohlene Vorgehen und machte auf etwa 1/2 Seite viele Punkte. Die anderen rechneten wieder chaotisch und sehr lang los mit meist falschen REsultaten!

■ 8) Lösen Sie (x,y Unbestimmte, a äußerer Parameter, Aufpassen!):

$$\boxed{\begin{matrix} 2ax + 3y = 3a \\ 2a^2x + 4y = 3a \end{matrix}}$$

▲ "y raus" gibt: $\boxed{2a(4\text{-}3a)x\text{=}3a.}$. (Faktorisieren!) Jetzt ist eine Fallunterscheidung nötig.

- Fall A: a(4-3a)$\neq$ 0. Dann folgt $\underline{x\text{=}\frac{3}{2(4-3a)}}$. und 3y=$3a - 2a\frac{3}{2(4-3a)} = 9a\frac{-1+a}{-4+3a}$ $\underline{y\text{=}3a\frac{a-1}{3a-4}}$. Oder $\underline{\vec{x} = \frac{1}{2(4-3a)}(3, 6a(a-1))}$
- Fall B: a=0. Das gibt folgende Bedingung: $\boxed{0x\text{=}0.}$. Also x frei und y=0 (in der ersten Gleichung 2ax+3y=3a ist a=0 zu setzen. Also $\boxed{0x\text{+}3y\text{=}0}$. Geht nur für y=0!) . Lösung $\boxed{\underline{\vec{x}_L(x) = x(1,0).}}$
- Fall C: a=$\frac{4}{3}$. Jetzt hat man die Bedingung $\boxed{0x\text{=}4}$. D.h. die Gleichung ist unlösbar.

Das war schwach. Besonders das Lösen der Gleichung im Kontext $\boxed{8a\text{-}6a^2 = 0}$ *bereitet enorme Schwierigkeiten der üblichen Art. D.h. es wurde nicht faktorisiert! Schwer war das nicht.*

■ 9) Es sei $\vec{a}^K = (0, 3, 1)$ und $\vec{x} = (0, 3, 3)$. Zerlegen Sie $\vec{x}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und zeichnen Sie die gesamte Konfiguration.

▲

$$\vec{p} = \frac{12}{10}\vec{a} = \frac{6}{5}(0, 3, 1) \qquad \vec{s} = \vec{x} - \vec{p} = (0, 3, 3) - \frac{6}{5}(0, 3, 1) = \frac{1}{5}(0, -3, 9).$$

Hier war die Zerlegungsformel $\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{\vec{x}^2}\vec{x}}$ *anzuwenden. Und das Skalarprodukt war in Koordinaten auszurechnen!*

a) Sei $\vec{g} = (0, 0, -g)$ und $\vec{N} = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$. Zerlegen Sie $\vec{g}$ in eine zu $\vec{N}$ parallele und senkrechte Komponente. Fertigen Sie eine Skizze.

▲

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{-g\sin\alpha}{1}(0, \cos\alpha, \sin\alpha) \quad \vec{s} = -\vec{p} \\ \vec{s} &= \vec{g} - \vec{p} = (0, 0, -g) + g\sin\alpha(0, \cos\alpha, \sin\alpha) \\ |\vec{p}| &= g\sin\alpha \qquad (\text{da } \cos^2 + \sin^2 = 1, \quad |\vec{p}| \textit{ wird häufig benötigt)} \end{aligned}$$

Zerlegung zur schiefen Ebene

■ 10) Berechnen Sie distributiv $((\vec{a}+\vec{b})^2)^2$.

▲ Innen Skalarprodukt, außen reelles Produkt, von innen beginnen. **Die Klammer bei $(\vec{a}\vec{b})$ durfte nicht fortgelassen werden.** Nur zwei haben das beachtet!

$$\begin{aligned} ((\vec{a}+\vec{b})^2)^2 &= \Big((\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\Big)^2 \\ &= \Big(\vec{a}^2+2(\vec{a}\vec{b})+\vec{b}^2\Big)^2 \\ &= \Big(\vec{a}^2\Big)^2+4(\vec{a}\vec{b})^2+\Big(\vec{b}^2\Big)^2+4\vec{a}^2(\vec{a}\vec{b})+2\vec{a}^2\vec{b}^2+4(\vec{a}\vec{b})\vec{b}^2 \end{aligned}$$

*Leider **viel Unverständnis** über den Aufbau dieses Termes.* $\vec{a}^2(\vec{a}\vec{b})=\vec{a}^3\vec{b}$ usw.

Oder auch: Hier haben fast alle den "Kampf gegen das Vergessen" verloren und brutal die Klammern fortgelassen und frohgemut Unsinn produziert!

■ 11) Bringen Sie die folgende komplexe Zahl in die kartesische Endform:

$$\frac{1}{4+i}+\frac{i}{1+\frac{1}{3+i}}$$

▲

$$\begin{aligned} \frac{1}{4+i}+\frac{i}{1+\frac{1}{3+i}} &= \frac{1}{4+i}+\frac{i(3+i)}{4+i} \\ &= \frac{3i}{4+i}=\frac{3i(4-i)}{17}=\frac{3+12i}{17} \\ &= \frac{1}{17}(3+12i) \end{aligned}$$

Relativ gut, sofern bis hierhin gekommen, nur auch hier viel zu lang!

■ *12) Sei z=x+iy (x,y$\in\mathbb{R}$) eine komplexe Zahl. Berechnen Sie das Produkt Z=e$^{i\alpha}z$ =u+iv kartesisch. Durch Vergleich können Sie u und v durch x und y ausdrücken.

Setzen Sie weiter $\vec{z}^K=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{Z}^K=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$. Schreiben Sie $\vec{Z}^K$ in Matrixform $\boxed{\vec{Z}^K=R.\vec{z}^K}$. Wie lautet die 2×2−Matrix R=R(α)?

a) Berechnen Sie dann gemäß der Regel *Zeile×Spalte* das *Matrixprodukt* R(α)R(β) und interpretieren Sie das Ergebnis.

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}z &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy) \\ &= (\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y)+i(\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \vec{Z}^K &= \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathrm{R}=\mathrm{R}(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
R(\alpha)R(\beta) &\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&\overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \overset{(4)}{=} R(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

(1) und (4) Bezeichnung einsetzen bzw. Rückeinsetzen. (2) Zeile mal Spalte und (3) Additionstheoreme!
Kommentar: Wir wissen: Komplexe Multiplikation mit $e^{i\alpha}$ bedeutet Drehung aller komplexer Zahlen um α. Schreibt man dies vektoriell im $\mathbb{R}^2_K$, so erhalten wir die Matrixabbildung für die Drehung um α. Die letzte Rechnung bestätigt dann für diesen Fall, dass das Hintereinanderausführen von solchen Abbildungen durch die Matrixmultiplikation gegeben wird. Interessant ist dies als Methode, die Drehmatrix zu gewinnen.

Punkteverteilung

							x				
		x			x	x	x				
		x		x	x	x	x		x		
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60