Tagebuch Vorkurs Mathematik 2006

11.9. 2006

Merken einer wichtigenDefinition oder Ergebnisses:

1) Allgemeine Defintion genau verstehen und in persönlich optimale Merkform bringen
Beispiel:

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)....(n-k+1) & \text{für k} \geq 1 \\ 1 & \text{für k=0} \end{cases} \qquad \text{n,k} \in \mathbb{N}$$

1a) Verbalisiert: "Starte mit n, also [...] , schreibe k(=Index) Faktoren" / Mathematisch: Passender Sonderfall des leeren Produktes"
2) Formel abdecken und rekonstruieren. Vergleichen.. Dann (oder zuvor)
2a) Teste die Definition selbsttätig an einigen Beispielen (Konzeptblatt). Etwa:

$$\begin{aligned} [a+b]_2 &= (a+b)(a+b-1) \\ [3]_4 &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ [3]_3 &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \end{aligned}$$

Zweites Beispiel: Der Binomialsatz (mit Summenzeichen)

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k \quad \text{und} \quad \binom{N}{k} = \frac{[N]_k}{k!}$$

Die Gebrauchsregel *Jeder mit Jedem* in Schreibweise mit dem Summenzeichen

$$\left(\sum_{i=1}^{M} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{N} b_k\right) = \sum_{i,k=1}^{i=M,j=N} a_i b_k$$

Und: Man setzt in der Regel hierfür keine direkten Zahlen ein, sondern zahlwertige Rechenausdrücke (Terme).

Rechenmethoden:

- Gleichungsumformung: Unterscheide Reihenfolge bei heuristischer Arbeit und bei Beweisargumentation.
- Unterscheide Gleichungsumformung und Termumformung
- Gezieltes Ausklammern

- Heraussuchen eines speziellen Beitrages in einem zu entwickelnden Produkt
- Spezialisierung desBinomialsatzes. (Beispiel $2^N = \sum \binom{N}{k}$)

Erste Übungen:

Text genau lesen
Bezeichnung
Endergebnis
Verstehen und Erläutern einer Rechnung!

■ Betrachten Sie die periodische Dezimalzahl $1.123\overline{456}$. Aufgabenziel: Darstellung dieser Zahl als rationale Zahl (d.h. Bruch ganzer Zahlen). (Schreibweise 1.3 statt 1,3!!!)

> Anleitung: Zerlegen Sie die Zahl in eine Summe, deren einer Summand s_1 gerade den rein periodischen Anteil ausmacht. Stellen Sie nun für s_1 eine naheliegende Gleichung auf (denken Sie an die Form: $\alpha s_1 = \beta + s_1$). Aus der Lösung dieser Gleichung erhalten Sie leicht das gewünschte Resultat.

Lösen Sie nunmehr ganz allgemein die Aufgabe, eine periodische Dezimalzahl der Form z=$m_1 ... m_r . n_1 ... n_s \overline{p_1 ... p_t}$ als Bruch darzustellen. (Mit m_i, n_j, p_k sind hier die Ziffern bezeichnet, mit r, s, t die Längen der jeweiligen Blöcke. - Bei Verständnisschwierigkeiten sollten Sie die Sache am obenstehenden Beispiel konkretisieren.)

$1.123\overline{456} = 1.123 + s_1$
$s_1 = 0.000\overline{456} = 0.000456456...$
$1000 \cdot s_1 = 0.456 + s_1$
$s_1 = \frac{0.456}{999} = \frac{456}{999000} = \frac{19}{41\,625}$
$1.123\overline{456} = 1.123 + \frac{19}{41\,625} = \frac{1123}{1000} + \frac{19}{41\,625} = \frac{374\,111}{333\,000}$
$\boxed{1.123\overline{456}=\frac{374\,111}{333\,000}}$ Die gesuchte Darstellung als Bruch

---

□ Setze $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Das ist die *Heronsche Formel* für den Flächeninhalt F eine Dreiecks mit Seitenlängen a,b und c, auf die wir noch zurückkommen werden. Rechnen Sie jetzt den Ausdruck für F^2 distributiv als Funktion von a,b und c aus. Es entsteht eine einfache und interessante Endform, die man mit S^2 aus (1.2.6) vergleichen sollte. Faktorisieren Sie dann - sofern verfügbar - das Ergebnis mit einem Computeralgebraprogramm.
Siehe erste Übungsaufgabe zu Kap.1

Betrachte

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4).$$

a) Bestimmen nur den Term proportional x^5 : $(5+4+3)x^5$
b) distributiv Ausrechnen. Bezeichne das Produkt mit P(x):
Bilanzschema:

1	2x	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$			
	x	$2x^2$	$3x^3$	$4x^4$	$5x^5$		
		x^2	$2x^3$	$3x^4$	$4x^5$	$5x^6$	
			x^3	$2x^4$	$3x^5$	$4x^6$	$5x^7$

Insgesamt:

$$P(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 12x^5 + 9x^6 + 5x^7$$

Zusammenfassung Binomialsatz:
Wertet man den $(a+b)^N$ mit Hilfe der Regel *Jeder mit Jedem* - also distributiv - aus, so ergibt sich folgende Form:

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k \quad .$$

Dabei ist $\binom{N}{k}$ zunächst eine Bezeichnung für die vor $a^{N-k}b^k$ stehende eindeutug bestimte natürliche Zahl.

Mit Hilfe der Gleichung $(a+b)^{N+1} = (a+b)(a+b)^N$ leitet man folgende (zum Pascalschen Dreieck gehörige) **Rekursionsformel** für die *Binomialkoeffizienten* her:

$$\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}.$$

Mit Hilfe dieser Formel folgt (noch nicht ausgeführt!) dann die **explizite Formel** für die Koeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{n,k} \in \mathbb{N}.$$

Für a und b sind in der Regel geeignete Terme einzusetzen.
Idee und Frage: Kann man auf nicht ganzzahliges n verallgemeinern?

12.9.

Fragen zum Aufwärmen

- Die beiden wichtigen Formeln zum Binomialsatz?
  - bisherige Argumentation zum Binomialsatz
- Zulässige Werte für n?
- Was für a=b=$\frac{3}{2}$?
- Was ergibt sich für a=1 und b=-x? Also für $(1-x)^n$?
- Was ist $[-1]_k$? (Nacheinander k=1,2,3,...und dann allgemein! Man findet $[-1]_K = (-1)^k k!$
- Es gilt $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Unzulässiger n-Wert. aber man kann es einmal versuchen.

- Was könnte man im Zusammenhang mit dem Binomialsatz vermuten???

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!}(-1x)^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

- Aber wir wissen

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + ... + x^N &= \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad \text{Es folgt (Gleichungsumf)} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ... + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} \end{aligned}$$

- Kommentar????

Aussagen:

- Wahre und falsche Aussagen. (Ein Problem - etwa eine Bestimmungsgleichung - ist keine Aussage. Andere Gleichungen sind vielfach Aussagen.)
- (Heuristische) Suche nach einer wahren Aussage, also nach einem Kandidaten für eine wahre Aussage.
- (Mathematischer) Beweis einer wahren Aussage! Vorsicht: Beispiel Faktorisierung 1-x^n! Erst für n=105 falsch.
  - Fehler und Lücken in Beweisen
  - Bisherige Beispiele von Beweisen
  - Beweis einer gültigen/wahren Gleichung: Heuristische Richtung läuft meist anders als die Beweisrichtung!!!
- Wichtige allgemeine Beweismethoden (Schamata, die auf viele Fälle anwendbar sind).
  - **Vollständige Induktion** (*Jetzt*!) Schema und Beispiel in den Besipielaufgaben zum gesamten Text.
  - Indirekter Beweis
  - Vollständige Fallunterscheidung
- Unterschied *Beweis* und *Problemlösung*

Einige Beispiele der Methode:
■ Beweise, dass es n! Permutationen von n Objekten gibt.
Vorbereitung: Wir haben n Kästen für je ein Objekt. die Objekte sind alle unterscheidbar. Jetzt muss man die Objekte auf die Kästen verteilen. Sei P$_n$ die Anzahl dieser Verteilungen.
Es ist P$_1$ $= 1 = 1!$ und P$_2$ $= 2 = 2!$. Für n=3 und die drei Objekte a,b,c gibz es 6 Permutationen, nämlich

abc bca cab acb bac cba .

- Unsere zu beweisende Gleichung: P$_n$ $= n!$
- Verankerung: Siehe oben. Bis n=3 gezeigt.
- Sei jetzt bereits P$_n$ $= n!$ für n=1,2,...,N bewiesen.

Zu zeigen ist $P_{N+1} \stackrel{?}{=} (N+1)!$

Wir starten mit P_{N+1}. Seien $a_1, ..., a_N, a_{N+1}$ die zu verteilenden Ojekte und p_{N+1} irgendeine zugehörige Permutation. Jetzt nehmen wir das Element a_{N+1} fort samt zugehörigen Kasten. Das gibt uns eine Permutation p_N von N Elementen. Jetzt fragen wir: Auf wieviel Weisen kann man das letzte Element a_{N+1} samt Kasten wieder hinzufügen, um eine Permutation von N+1 elemente zu bekommen? Offenbar auf genau N+1 Weisen.

Beispiel. Betrachten wir die Permutation bac von drei Elementen. Jetzt soll d hinzugefügt werden. Das gibt folgende 4 Möglichkeiten:

dbac bdac badc bacd

Also: Jede Permutation von N Elementen erzeugt so N+1 neue Permutationen von N+1 Elementen. Das gibt sicher alle Permutationen und sie sind auch alle verschieden. Entweder befindet sich a_{N+1} an verschiedener Stelle oder aber der die beiden entstehenden $p_N - s$ müssen verschieden sein. Damit sind wir fertig. Denn wir haben $P_{N+1} = (N+1)P_N$. Laut Vorraussetzug ist $P_N = n!$ bereits bewiesen. Einsetzen gibt $P_{N+1} = (N+1)!$.

Damit ist $P_n = n!$ für alle n ab n=1 bewiesen!

Beweise:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

. Die drei Vorbedingungen:

- Die Gleichung $1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ist für jedes n (n=1,2,3,....) eine Aussage. Ist sie auch für alle n wahr???
- Verankerung: Für n=1 besagt die Gleichung $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$. Das ist offensichtlich wahr Ebenso leicht prüft man die Fälle n=2 und n=3
- Wir nehmen jetzt an, die gleichung sei berits für n=1,2,.....,N bewiesen.

Zu zeigen: Sie gilt dann auch für N+1 (Die Gleichung für N+1 hinschreiben. Zu beweisen ist $1 + 2 + .. + N + (N+1) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$)

Jetzt rechnen wir wie folgt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + .. + N + (N+1) &= \underbrace{(1 + 2 + .. + N)}_{n=N,\text{ Gl. gilt.}} + (N+1) \\ &= \frac{1}{2}N(N+1) + (N+1) \\ &= \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \end{aligned}$$

Damit ist der gesuchte Beweis erbracht! Die Gleichung gilt für alle n.

Weitere Aufgabe als Herausforderung:
Zeige

$$\begin{aligned} [a+b]_1 &= [a]_1 + [b]_1 \\ [a+b]_2 &= [a]_2 + 2\,[a]_1\,[b]_1 + [b]_2 \\ [a+b]_3 &= [a]_3 + 3\,[a]_2\,[b]_1 + 3\,[a]_1\,[b]_2 + [b]_3 \end{aligned}$$

Vermutete Verallgemeinerung:

$$[a+b]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [a]_{n-k}\,[b]_k$$

Beweis???

Beweise $\boxed{1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad n=1,2,..}$

1+2+...+n=$\frac{1}{2}n(n+1)$ n=1,2,..
n=1 stimmt
Gleich gilt für n=1,..,N
$(1+2+...+N)$+(N+1)=$\frac{1}{2}N(N+1)+(N+1)$
=$\frac{1}{2}N(N+1)+\frac{2}{2}(N+1)$ $\sum_{k=1}^{N+1} k \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$
=$\frac{1}{2}(N+1)\,(N+2)$

Bruchrechnung:

Skript durchgegangen´.

- Defintion eines Termes wie $\frac{a}{b}$ oder $\sqrt{a}$ als eindeutige Lösung einer Bestimmungsgleichung.
- Die Gebrauchsregeln für Bruchrechnen: Erweitern und Kürzen / Beseitigen von Doppebrüchen / Hauptnennerbildung
- Umgang mit Bruchgleichungen

Quadratische Gleichungen

- Definiere und unterscheide *quadratischer Term* und *quadratisches Polynom*
- Einführung des Begriffs *äußerer Parameter*
- Quadratische Gleichungen (Bestimmungsgleichung! x Unbestimmte)und deren Lösung
  - Sonderfall, der die Lösung sofort liefert
  - Normalform $x^2+px+q=0$: Lösung mit der p-q-Formel. Wie schreibt man das Resultat möglichst effizient hin?
  - Beweis der p-q-Formel mit quadratischer Ergänzung
  - Gleichungen, die durch eine Substitution auf eine quadratisch Gleichung führen.
- Unterschiedliche Formen quadratischer Terme: Allgemeine Form / Normalform / Linearform / Scheitelüunktsform.
- Die Interpretation der quadratischen Polynome als Figuren (Parabeln) in der x-y-Ebene
  - Die geometrische Interpretation der Parameter x_1, x_2, a, b und A an den Figuren.
- Die p-q-Ebene

Die Herleitung der p-q-Formel

▼ Man startet mit $\boxed{x^2+px+q=0}$ und nimmt nacheinander folgende zulässige Gleichungsumformungen vor. Dabei handelt es sich zunächst um Termumformungen (T). Einmal wird der Binomialsatz benutzt. Am Ende um eine Gleichungsumformung, die auf eine Gleichung mit bekannten Lösungren führt, eben die p-q-Formel:

$x^2+px+q=0$	
$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+q=0$	T
$\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)+\left(q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)=0$	T
$(x+\frac{p}{2})^2-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)=0$	T
$(x+\frac{p}{2})^2=\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$	G
$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	p-q-Formel

---

Beispiele:

Bestimme die Nullstellen:

$$\begin{aligned} x^2-4x-17 &= 0 \\ x_{12} &= 2\pm\sqrt{21} \end{aligned}$$

Besipiel für quadratische Ergänzung

$$(x\text{-}a)^2+b=\boxed{x^2-2ax+a^2+b=x^2-4x-17}$$

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot 2+4\right)-4-17=(x-2)^2-21$$

Die Linearfaktordarstellung von $x^2-4x-17$ ist:

$$(x-2-\sqrt{21})(x-2+\sqrt{21})$$
$$=x^2-4x-17$$

Löse in x:

$$(a+b)x^2-3(a^2-b^2)x-(a^3+b^3)=0$$

$$x^2-3(a-b)x-\frac{a^3+b^3}{a+b}=0$$
$$x_{12}=\frac{3}{2}(a-b)\pm\sqrt[2]{\frac{9}{4}\frac{(a-b)^2(a+b)}{a+b}+\frac{4}{4}\frac{a^3+b^3}{a+b}}$$
$$=\frac{3}{2}(a-b)\pm\frac{\sqrt{9(a-b)^2(a+b)+4(a^3+b^3)}}{2\sqrt{a+b}}$$

Das CAP Maple liefert uns folgende Faktorisierung

$$\begin{aligned} & 9(a-b)^2(a+b)+4(a^3+b^3) \\ = \; & 13a^3-9a^2b-9ab^2+13b^3 \\ & (a+b)\left(13b^2-22ab+13a^2\right) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\boxed{x_{12}=\frac{3}{2}(a-b)\pm\frac{1}{2}\sqrt{13b^2-22ab+13a^2}}$$

Beispiele mit Substition:

$$x^4 + 4x^2 - 16 = 0$$
$$u=x^2$$

$$u^2 + 4u - 16 = 0$$
$$u_{12} = -2 \pm \sqrt{4+16} = -2 \pm 2\sqrt{5}$$
$$x=\pm\sqrt{-2 \pm 2\sqrt{5}} \quad 4\text{Lösungen}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{-x} = 5$$
$$(2^x)^2 + 3=5\cdot 2^x$$
$$u=2^x$$
$$u^2 - 5u + 3 = 0$$

13.9.

Zum Warmdenken: Bruchrechnung / Quadr. Gleichungen Zugehörige Arbeitstechnik

$$\frac{b}{\left(\frac{a+b}{2a}\right)} + \frac{3-a}{\left(\frac{a-b}{3b}\right)} = \frac{b(...)}{a+b} + \frac{(3-a)....}{a-b} = \frac{......}{a^2-b^2}$$
$$= ....(Endform)$$

Bringen Sie $x^2 - 4x + 3$ in die Linearfaktorform.

$$x^2 - 4x + 3 = ...$$

Kurzer Lösungsweg! Wieso?

$$x^2 + 7x + 9 = 3(x+3)$$

Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = 3$$

☐ Bestimmen Sie die Nullstellen von $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. In der Endform kann man die doppelten Wurzeln beseitigen. Beweisen Sie dazu mit Hilfe des binomischen Satzes $\boxed{\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. Wie sieht die Linearfaktordarstellung des Polynoms aus?

▼ $x_{12}^2 = 5 \pm \sqrt{24} = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Nun ist $5 - 2\sqrt{6} = 0.101.. > 0$, so dass man 4 reelle Lösungen findet. $x_{12} = \pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ und $x_{34} = \pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Gilt die behauptete Vereinfachung der Doppelwurzeln? Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2} \quad \text{behauptet} \quad (1)$$
$$\left(\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)^2 \quad (2)$$
$$5 \pm 2\sqrt{6} = 2 \pm 2\sqrt{2 \cdot 3} + 3 \quad \text{Stimmt!} \quad (3)$$

Wir sind hier argumentativ von (1) nach (3) gelangt. Benötigt wird jedoch der Rückweg. Aus der wahren Ausage (3) soll (1) folgen. Von (3) nach (2) kommen wir durch reine Termumformung. Von (2) nach (1) ist ein Gleichungsumformung durch Wurzelziehen. Das gibt nur $\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. (+ oder -.) Da aber beide Seiten positiv sind, ist die negative Wurzel unbrauchbar und die behauptete Gleichung ist korrekt.

Zum Vorgehen: Man rechnet von oben nach unten, um eine Verbindung zwischen der behaupteten Beziehung und einer gültigen Gleichung zu bekommen. Der Beweis verlangt die umgekehrte Richtung. Man geht dazu die Schritte rückwärts durch. Somit hat man folgende erstaunliche Linearfaktordarstellung

$$\boxed{x^4-10x^2+1=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

▲

Vollständige Induktion:

Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)n}{2} \qquad \text{A(n)}$$

Inspektion zeigt: $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$

Die ersten Fälle in n (ab n=1)

n=1	$(-1)^1 1^2 = (-1)^1 \frac{2\cdot 1}{2}$	stimmt
n=2	$(-1)^1 1^2 + (-1)^2 2^2 = (-1)^2 \frac{3\cdot 2}{2}$	stimmt
n=3	....	

Das Induktionsschema:

(1) Gleichungen liefern für n=1,2,3,... je eine Aussage A(n).
(2) A(1) und A(2) sind wahr
(3) Sei jetzt bereits A(1),...,A(N) bewiesen.
Problem: Gilt dann auch A(N+1)??? **Also** $\boxed{\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{N+1}\binom{N+2}{2} = (-1)^{N+1}\frac{(N+2)(N+1)}{2}}$
Beweis: (Starte mit der linken Seite:)

$$\begin{array}{ll}
\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^k k^2 & \\
=\sum_{k=1}^{N}(-1)^k k^2 + (-1)^{N+1}(N+1)^2 & \sum -Def \\
=(-1)^N \frac{(N+1)N}{2} + (-1)^{N+1}(N+1)^2 & \text{Vorauss.(3)} \\
=(-1)^N \frac{(N+1)}{2}[N-2(N+1)] & \text{Ausklammern!} \\
=(-1)^N \frac{(N+1)}{2}[N-2(N+1)] = & \\
=(-1)^N \frac{(N+1)}{2}[-(N+2)] & \\
=(-1)^{N+1}\frac{(N+1)(N+2)}{2} & \text{Wie behauptet!}
\end{array}$$

Also gilt A(n) für n=1,2,3,.... für alle n$\in \mathbb{N}$ ab n=1.

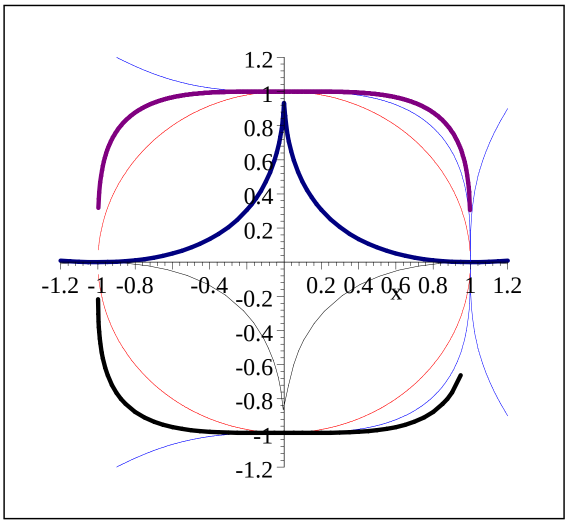
☐ Kann man die Gleichung auch für n=0 retten? Wie müsste man $\sum_{k=1}^{0} a_k$ definieren, damit die Gleichung für n=0 gültig bleibt?

Bestimmung von Figuren durch Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten der Punkte
Beispiele:

- Geraden $(\text{y-y}_1 = m(x-x_1)$ Für Gerade durch (x_1, y_1) mit Steigung m
- Parabeln y-b$= A(x-a)^2$
- Kreise, Ellipsen, Ovale $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ oder $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$

Verschiedene Formen der Geradengleichung (allgemein, normal, Achsenabschnittsform ...)

(1.6.15-16) besprochen
Die Bilder zu $\left(\frac{|x|}{a}\right)^n + \left(\frac{|y|}{b}\right)^n = 1$ für n=2,3,4 und n=$\frac{1}{2}$.



■ (1.6.18) korrigierte Aufgabe! Bestimme alle Punkte der Parabel y=x^2, für die die Normale die x-Achse mit einer x-Koordinate trifft, die das $\alpha - fache$ der x-Koordinate des Fußpunktes des Berührungspunktes der Tangente ist. $(\alpha > 0)$

▼ Der Fußpunkt der Tangente liege bei x=a. Eine Gleichung der zugehörigen Tangente ist y-a^2=(2a)(x-a), also y=2ax-a^2. Dann ist die zugehörige Normale gegeben durch y-a^2 $= \frac{-1}{2a}(x-a)$. Also y=-$\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$. Die Normale schneidet die x-Achse bei x_N mit $-\frac{1}{2a}x_N + a^2 + \frac{1}{2} = 0$ also $\text{x}_N = 2a(a^2 + \frac{1}{2})$.

Die geforderte Bedingung ist $\text{x}_N = \alpha a$. Also αa=2a(a$^2 + 1$). Rollenwechsel! a ist jetzt Unbestimmte, gesucht! Die Lösung a=0 ist trivial und nicht brauchbar. Es bleibt a^2 $= \frac{1}{2}\alpha - 1$. Das ist lösbar für $\alpha \geq 2$ mit $\text{a}_{S12}(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\alpha - 1}$. Für diese x-Werte ist die gestellte Bedingung erfüllt!▲

Eine andere Aufgabenkorrektur könnte so aussehen:

■ (1.6.18) korrigierte Aufgabe! Bestimme alle Punkte der Parabel y=x^2, für die die Normale die x-Achse mit einer x-Koordinate trifft, die das $\alpha - fache$ der x-Koordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der x-Achse ist.$(\alpha > 0)$

Kapitel 2

Konfigurationsraum und seine konstituierenden Eigenschaften
Der Punktraum E^3

- Figurbeschreibung
- Bewegung von Punkten und Figuren
- Felder.

Winkel und das zugehörige Bogenmaß $\quad (\frac{\pi}{2} \approx 1.58$ gibt rechten Winkel
Raumwinkel und das zugehörige Raumwinkelmaß $\quad (4\pi$ gibt vollen Raumwinkel)
Polardarstellung in der Ebene und im Raum

Kartesisches Produkt zweier Mengen A und B

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$$

Insbesondere $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$.
Mengeneinführung über $\{.....|.......\}$.

Anzahl der Freiheitsgerade ...

Quantifzierung: Erfordert in unserem Fall Festlegung eines Koordinatensystems, und einer Vorschrift, die aus einem Zahltupel einen eindeutigen Weg vom Ursprung zu einem Endpunkt im E^3 festlegt. Gilt für Punkte und kartesische Pfeile!

- P$\in E^3$
- Zugehöriger Ortsvektor nach Festlegung eines Usprungs: $\vec{x}_P \in V_0^3$
- Zugehöriger Koordinatenvektor nach Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems! $\vec{x}_P^K \in \mathbb{R}^3_K$. Das ist der $\mathbb{R}^3$, wobei die Elemente zusätzlich als Wegkkodierung in K zu interpretieren sind.

14.9

Zum Aufwärmen:
■ Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden q**uadratische Gleichungen**: Gleichungen:
a) $3x^2 + 4x - 5 = 0$
b) $a^2(x-5)^2 + 5x = 25$ Unbestimmte a und x ist äußerer Parameter.
c) $a^2(x-5)^2 + 5x = 25$ Unbestimmte x und a ist äußerer Parameter.
d) $(3x+2)x + 2(5x-2) + 4 = 0$ $\quad d)$
e) b) erneut mit 2 statt 25. Was zeigt das Beispiel?

▼

a) $\boxed{3x^2 + 4x - 5 = 0}$ $\quad x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \quad x_{12} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{3}} \quad = \underline{-\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{19}}$

b) Fallunterscheidung: i) x$\neq$ 5 und x=5. Im ersten Fall folgt $a^2 = \frac{25-5x}{(x-5)^2} = \frac{5}{5-x}$. Also

$$a = \pm\sqrt{\frac{5}{5-x}} \qquad \text{für x<5.} \quad \text{Reell unlösbar für x>5.}$$

Zweiter Fall gibt die Bedingung $a^2 0 + 25 = 25$. Erneut ist jedes a Lösung.
c) Jetzt ist x Unbestimmte. Eine Abkürzung bietet sich an:

$$\boxed{a^2(x-5)^2 + 5(x-5) = 0 \qquad \text{x gesucht}}$$

$$\begin{aligned}
(x-5)\left[a^2(x-5)+5\right] &= 0 \\
x &= 5 \text{ oder } a^2x - 5(a^2-1) = 0 \\
&\underline{x_1 = 5} \text{ und } \left(\underline{x_2 = 5\frac{a^2-1}{a^2}} \quad \text{für a} \neq 0\right)
\end{aligned}$$

Für a=0 gibt es keine zweite Lösung.
d)

$$\begin{aligned}
(3x+2)x + 2(5x-2) + 4 &= 0 \text{ (Zusammenfassen)} \\
x^2(3+10) + x(2-4) + 4 &= 0 \\
x^2 - \frac{2}{13}x + \frac{4}{13} &= 0 \qquad x_{12} = \frac{1}{13} \pm \sqrt{\frac{4-4\cdot 13}{13^2}}
\end{aligned}$$

Keine Reellen Lösungen!
e) $a^2(x-5)^2 + 5x = 2$ / $a^2(x-5)^2 = 2-5x$ / Für x$\neq$ 5 gibt das $a^2 = \frac{2x-5}{(x-5)^2}$ Und für $\boxed{x \geq \frac{5}{2} \text{ und } x \neq 5 \text{ folgt } a = \pm\frac{\sqrt{2x-5}}{(x-5)}}$. Für x=5 gibt es keine Lösung.
▲

Und nochmals **Induktion**: Zu beweisen ist die sog. *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für n=0,1,2,...} \quad \text{und x>-1.}$$

- Wie lauten die drei zunächst kurz zu formulierenden Rahmensachverhalte hier? Sind sie in Ordnung? (kurz)
- Was ist jetzt noch zu beweisen? (kurz)
- Es bleibt der eigentliche Beweisteil, der wie folgt aussehen könnte:

$$(1+x)^{N+1} = (1+x)^N(1+x) \geq (1+Nx)(1+x) \geq (1+(N+1)x).$$

Erläutern Sie die Rechenschritte! Wieso wird x>-1 gefordert? Bzw. wo geht dies Voraussetzung in die Rechnung ein?? Wie lautet der Schluss? ist er tatsächlich erbracht? .

▼*Der* erste Schritt ist eine reine Termumformung, daher zulässig. Die Ungleichun g gilt bereits für N. Man multipliziert sie mit 1+x>0. Das ergibt erneut eine gültige Ungleichung und damit den zweiten Schritt. Die rechte Seite wird jetzt distributiv ausmultipliziert:

$$(1+Nx)(1+x) = 1 + (N+1)x + Nx^2$$

Addiert man zur gültigen Aussage $Nx^2 \geq 0$ auf beiden Seiten $1+(N+1)x$ hinzu so folgt der letzte Schritt. Insgesamt die Ungleichung für N+1. Damit ist die Ungleichung für alle n bewiesen

Zusammenfassung

Der Konfigurationsraum E^3
Massenpunktidealisierung
Beschreibung geometrischer und physikalischer Größen im Konfigurationsraum sollte quantitativ möglich sein.

Dabei treten häufig Größen auf, **die zur Festlegung mehr als eine Zahlangabe benötigen ´** (*vektorielle Größen, Zahl der Freiheitsgrade)*
Eingeführt wurde *Ortsvektor* und *Koordinatenvektor (für volle Quantifizierung)*
Drei typische und wichtige Beispiele (derartiger physikalischer Größen):

1. . (Konstante Vektorielle) Geschwindigkeit $\vec{v}$ bzw $\vec{v}^K$.
   - Zugehöriges Problem: Ein Massenpunkt befindet sich zur Zeit t_0 am Orte P$\in E^3$. Er hat die konstante Geschw. $\vec{v}$. Wo befindet er sich eine Zeiteinheit später, wo allgemein Δt Zeiteinheiten später?? $\boxed{\vec{x}^P + \vec{v}\Delta t.}$
   - Die Geschw. eines Bootes im Fluss relativ zum Ufer bestimmen! $\boxed{\vec{v}_{Fluss} + \vec{v}_{Boot}}$
2. Eine Kraft (die auf einen Massenpunkt wirkt)
   - Zugehöriges Problem: Eine Lampe hängt (unter dem Einfluss der Schwerkraft) an zwei Fäden an der Decke. Wie groß ist die Fadenspannung in den beiden Fäden, die an unterschiedlichen Punkten der Decke beginnen?
   - Fensterputzerproblem:
3. Winkelgeschwindigkeit
   - Ein Körper rotiert um eine Achse. Wie groß ist seine kinetische Energie.

     $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{Achse}$ $\quad$ ω Winkelgescheindigkeit
     $\vec{e}_{Achse}$ Einheitsvektor in Richtung Drehachse!
4. Geometrisches Beispiel: Lage eines Dreiecks im Raum!

In allen Fällen erfolgt die Beschreibung über einen geometrischen Pfeil (oder auch mehrere). Zunächst hat man eine sachbedingte Festlegung über **Richtung und Betrag. . Quantitatives Rechnen verlangt meist eine kartesische Festlegung!**
Graphische Darstellung (in kartesischen Koordinaten):
Konventionen

- **Bedeutung!**
- **Forderung:** $\boxed{\textit{Die räumliche Lage der Pfeile muss erkennbar sein!}}$ Siehe Übungsaufgabe!
- Voller Quader - Minimalskizze!

Was braucht man jeweils:

- Ein Koordinatensystem samt Konstruktion zugehöriger Wege vom Ursprung zum Endpunkt des Pfeiles.

- Die Konkretisierung des Weges erfolgt duch Zahltupel, die zugehörigen Koordinatenvektoren oder Koordinatentupel, die die einzelnen Wegstücke eindeutig festlegen.
- Sofern möglich sollte man mit den Pfeilen selbst arbeiten.

Eingeführte **Mengen und Mengensymbolik:**

$$\begin{array}{ccc} E^3 & \longleftrightarrow & V_0^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}_K^3 \\ & & V^3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M &= \{....|......\} \\ K_3 &= \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, x^2+y^2=9\} \subset \mathbb{R}_K^2 \\ ..P_+ &= \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, x>0, y-x^2=0\} \subset \mathbb{R}_K^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^n$$

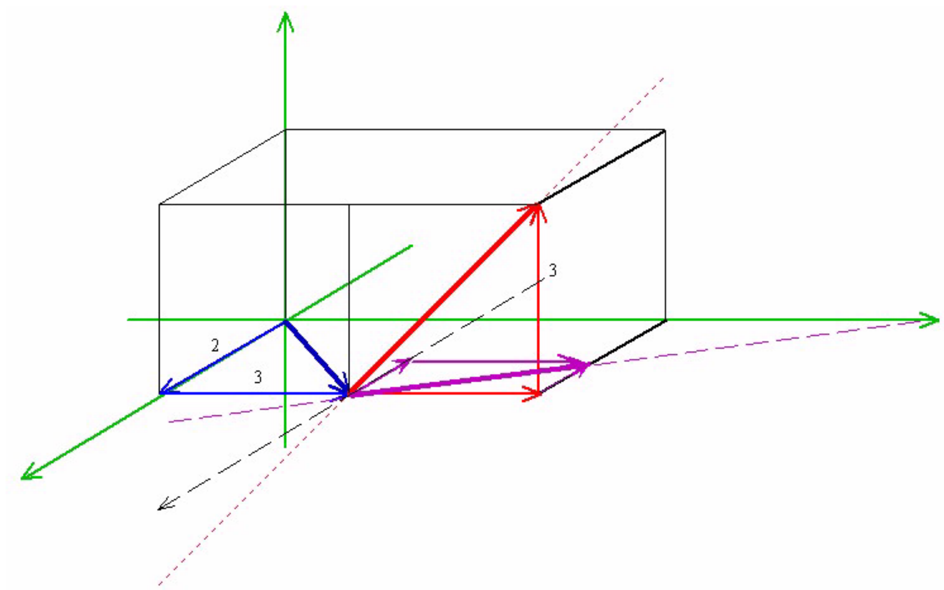
Weitere Beispiele Seien A,B zwei Mengen. Bilde einigeneue Mengen:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x|x \in A \text{ oder } x \in B\} \\ A \cap B &= \{x|x \in A \text{ und } x \in B\} \\ A \times B &= \{(a,b)|a \in A, b \in B\} \end{aligned}$$

□ Zeichnen (Skizzieren) Sie die folgende räumliche Konfiguration:

Ein Massenpunkt befindet sich zur Zeit t=2 an einem Ort P mit Koordinatenvektor $\vec{x}_P^K = (2,3,0)$. Er hat die konstante Geschwindigkeit $\vec{v}^K = (0,2,3)$. Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=3? Bestimmen Sie den zugehörigen Koordinatenvektor $\vec{x}_Q^K$ zeichnerisch. Lesen Sie seine Koordinaten über die Zeichnung ab.

Jetzt habe er in P die Geschwindigkeit $\vec{w}^K = (-1,2,0)$. Zeichnen Sie die Konfiguration erneut. Wann und wo trifft er die $\boxed{\text{y–z-Ebene}}$?



☐ Beweisübung: Sei x,y>0. Beweisen Sie $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.
▼

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$	Mit xy>0 mult.	
$x^2+y^2\geq 2xy$	zulässig	zulässig, mit $\frac{1}{xy}>0$ multipl.
$x^2+y^2-2xy\geq 0$		Termumformung
$(x\text{-}y)^2\geq 0$	Gültig	Start

Zunächst der hauristische Weg von der gesuchten zu einer sicher wahren Aussage. Alle Schritte sind umkehrbar, wie die rechte Spalte andeutet! ▲

☐ Was für geometrische Figuren werden in $\mathbb{R}^3_K$ - also x,y,z imm aus $\mathbb{R}$ - durch die folgenden drei Mengen beschieben :

$$
\begin{aligned}
Z_{R,H} &= \{(x,y,z)|x^2+y^2\leq R^2, 0\leq z\leq H\} \quad \text{mit R,H>0}\\
K_R &= \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=R^2\}\\
E &= \{(x,y,z)|\frac{x^2+y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1\}
\end{aligned}
$$

Sei M_n eine Menge mit n Elementen und $P(M_n)$ die zugeh. Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von M_n. Weiter sei p_n die Anzahl von Elementen von $P(M_n)$. Beweisen Sie, dass $p_n = 2^n$ gilt.

▼ Von Ihrer Seite wurde ein schöner Beweis ohne Induktion vorgeschlagen, der soger etwas nehr liefert!

Sei M Menge mit n Elementen $a_1,..,a_n$. Ordne jedem Element in dieser Reihenfolge einen Faktor (a+b) zu. Und beschreibe jetzt jede Teilmenge $T\subset M$ wie folgt:

- Gilt a_1 in T wird b aus dem ersten Faktor gewählt. Gilt $a_1\notin T$ wählt man a.
- Das gibt insgesamt ein "Wort" mit N Buchstaben a oder b.
- Zu jedem Wort gehört genau eine Teilmenge und umgekehrt.
- Also gibt es genausoviel Worte wir Teilmengen.
- Die Worte mit k Buchstaben b gehören genau zu den Teilmenge von M mit k Elementen.
- Interpretiert man das Wort als Produkt seiner Buchstaben gibt das in der Binomialentwicklung einen Beitrag zu $a^{n-k}b^k$.
- Die Konstruktion des Binomialsatzes zeigt: Das sind genau $\binom{n}{k}$ Stück.
- Wir wissen: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$. Also gibt es insgesamt wie behauptet 2^n Teilmengen.

Kap. 2 ist beendet.
Morgen Kap. 3. Möglichst bereits etwas vorher anschauen! ■

15.9.2006

■Aufwärmen:
Zwei Punkte P und Q seien durch ihre Polarkoordinaten (r,θ, φ) gegeben. Für P sei dies (1,1,1) und für Q sei es (2,2,2). **Schätzen Sie** grob die zugehörigen kartesischen Koordinaten und fertigen Sie eine **Skizze** der beiden zugehörigen Ortsvektoren! (Reihenfolge: Ihre Wahl , Skizze zuerst *im Kopf! Welche Aussagen über die Längen eingezeichneter nicht achsenparaleler Strecken kann man machen ?*)

■ Lösen Sie die folgende Gleichung für die Unbestimmte x. Dabei ist a äußerer Parameter:

$$\frac{a}{x-a} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{3}$$

Formulieren Sie kurz die **Vorgehensstrategie**!
Was ist am Ende zu beachten? Wie sollte das Endergebnis aussehen?

Nenner beseitigen - Beiträge sortieren - Normalform quadratischer Gleichung. Mit der p-q-Formel lösen und kontrollieren, ob für alle a-Werte reelle Lösungen vorliegen

$$\begin{aligned}
a(x-1) - 2(x-a) &= \frac{1}{3}(x-a)(x-1) \qquad \text{x} \neq 1, a!!! \\
3\left((a-2)x + a\right) &= x^2 - (a+1)x + a \\
x^2 - (4a-5)x - 2a &= 0 \\
x_{12} &= \frac{1}{2}(4a-5) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(4a-5)^2 + \frac{8}{4}a} \\
&= \frac{1}{2}(4a-5) \pm \frac{1}{2}\sqrt{16a^2 - 32a + 25} \\
16a^2 - 32a + 25 &= 16(a^2 - 2a + 1) - 16 + 25 \\
&= 16(a-1)^2 + 9 \\
& \boxed{x_{12} = \tfrac{1}{2}(4a-5) \pm \sqrt{16(a-1)^2 + 9}}
\end{aligned}$$

Beispiel für die Technik der quaratischen Ergänzung, wenn ein Beitrag Ax^2 statt $1x^2$ vorliegt!

Kap. 3 Der mathematische Weg zu den Vektoren
Projekt: **Rechnen, Formelbildung, Bestimmungsgleichungen für Vektoren**

Hierzu wurden die folgenden Punkte gemäß Kap. 3 besprochen und beantwortet:

- Was sind "die reellen Zahlen"?
- Unterscheide und kläre: Term und Zuordnung
- Schreibweisen, Verlaufsdiagramme
- Algebraische Verknüpfungen / Zuordnungen / Kompositionen
  - einschränkende Regeln / Aciome. Zugehörige mathematische Folgerungen
  - Beispiel: Addition der reellen Zahlen
  - Die Axiome einer kommutativen Gruppe
  - Beispiel: Konsequenzen des Assoziativgesetzes!
    - Zwei Herausforderungen!
  - Körperaxiome (K,+,·)

- Ausdehnung der Addition auf die Räume $\mathbb{R}^n$, V_0^3 und V^3
  - Konsequenz
- Das Multiplikationsproblem
  - Ersatz: Multiplikation Vektor mit Skalar
  - Die Vektorraumaxiome
  - Das Verifikationsproblem im Falle $\mathbb{R}^n, V_0^3$ und V^3.
- Das Rechnen mit Vektoren

Die Regeln, die die Beziehung zwischen V_0^3 und $\mathbb{R}_K^3$.bestimmen:

$$(\vec{a}+\vec{b})^K = \vec{a}^K + \vec{b}^K \quad \text{und} \quad (\alpha\vec{a})^K = \alpha\vec{a}^K$$

Ein erstes Beispiel für eine Vektorformel ist die Formel zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Systems von N Massenpunkten (aus Kap.4):

$$\vec{x}_S = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{x}_i}{M} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}_S^K = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{x}_i^K}{M} \quad \text{wobei} \quad \mathrm{M}=\sum_{i=1}^M m_i$$

Dazu zwei Beispiele gerechnet!

Zur Receneffizienz: eien Liste machen mit den Massen, daneben die Koordinatenvektoren, dann kann man ohne Zwischenrechnug sofort das Ergebnis hinschreiben. Beispiel für 4 Massen:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{m}_1 = 4 & \vec{x}_1^K = (0,0,0) \\
\mathrm{m}_2 = 2 & \vec{x}_2^K = (a,0,0) \\
\mathrm{m}_3 = 2 & \vec{x}_3^K = (0,a,0) \\
\mathrm{m}_4 = 1 & \vec{x}_4^K = (0,0,c) \quad \mathrm{M}=9
\end{array}$$

$$\boxed{\vec{x}_S^K = \tfrac{1}{9}(2\mathrm{a}, 2\mathrm{a}, 1\mathrm{c})}$$

Der Schwerpunktvektor ist ein gebundener Vektor. Seine Koordinatenvektor ändert sich, wenn man von einem (kartesischen) Koordinatensystem K zu einem zweiten L mit anderem Ursprunge übergeht. Ist $\vec{a}^K$ der Koordiantenvektor des Ursprung von L, dann gilt für jeden ortsvektor $\vec{x}^L = \vec{x}^K - \vec{a}^K$ wie eine Skizze sofort zeigt. *Gilt* das auch für den nach obiger Formel bestimmten Schwerpunkt S oder liefert jeder Ursprung einen anderen Punkt als Schwerpunkt. Wir beweisen die Konsistenz durch folgende Rechnung, deren Schritte wir besprochen haben. Dies war zugleich ein Beispiel für **typisches Rechnen mit dem Summenzeichen**:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_S^L &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i\vec{x}_i^L = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i(\vec{x}_i^K - \vec{a}^K) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i\vec{x}_i^K - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i\vec{a}^K \\
&= \vec{x}_S^K - \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^N m_i\right)\vec{a}^K = \vec{x}_S^K - \frac{M}{M}\vec{a}^K \\
&= \vec{x}_S^K - \vec{a}^K
\end{aligned}$$

Die Umformungen waren zu erläutern.

D.h. die Formel liefert über jedes Koordinatensystem **denselben** Punkt S$\in E^3$ als Pfeilendpunkt.

Wie sehen Rechenausdrücke der Vektorechnung aus, welche Rechenregeln sind erlaubt, welche verboten

Man rechnet wie mit Zahlen. Aber jeder Summand (der Endform) muss genau einen Vektor als Faktor enthalten. Und man darf nie durch einen Vektor teilen.

Zur Schulung des Blickes haben wir eine Reihe von Termen inspiziert, bei denen die Unterscheidung zwischen Vektor ($\vec{x}$) und Zahl (a) typographisch kenntlich gemachwird.
Aber es sind auch andere Unterscheidungsmethoden üblich:

☐ Welche der folgenden Gleichungen ist unzulässig und wieso? Alle Größen mit Pfeil sind als Vektoren (desselben Raumes) zu interpretieren, alle ohne Pfeil als Zahlen.

$2\left(3\vec{x}+\vec{a}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)=\vec{x}-7$	$3\vec{x}(7-\vec{b})=\vec{a}$
$3(\vec{x}7-\vec{b})=\vec{a}$	$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2}=\frac{\vec{a}}{x}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2}=\frac{a}{\vec{x}}$	$(2+a)(3-b)(\vec{x}-\vec{a})=\frac{\vec{x}}{(2-a)}$

Bei den korrekten Gleichungen: Welche Umformungen und Vereinfachungen liegen nahe?

$2\left(3\vec{x}+\vec{a}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)=\vec{x}-7$	Die rechte Seite ist unsinnig, da eine Zahl nicht von einem Vektor subtrahiert werden kann.
$3\vec{x}(7-\vec{b})=\vec{a}$	Hier ist die linke Seite unsinnig, da der distibutiv entstehende Beitrag $21\vec{x}\vec{b}$ zwei Vektorfaktoren enthält.
$3(\vec{x}7-\vec{b})=\vec{a}$	In Ordnung. Endform z.B. $21\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2}=\frac{\vec{a}}{x}$	In Ordnung. Endform z.B. 2x$\vec{x}=(1+2x^2)\vec{a}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2}=\frac{a}{\vec{x}}$	Unfug! Rechts Division durch einen Vektor
$(2+a)(3-b)(\vec{x}-\vec{a})=\frac{\vec{x}}{(2-a)}$	In Ordnung. $\left((2+a)\,(3-b)-\frac{1}{2-a}\right)\vec{x}=(2+a)(3-b)\vec{a}$

Das Lösen einfacher Gleichungen mit Vektoren

Auch hierzu wurden einige Beispiele gerechnet. Das lief bereits recht gut!

Etwa: Löse die folgende Gleichung nach $\vec{x}$ auf:

$$\begin{aligned}2(\vec{x}-4\vec{a})+a(\vec{x}-2\vec{a}) &= 4(\vec{x}-2\vec{a})\\(2+a)\vec{x}+(-8+a)\vec{a} &= 4\vec{x}-8\vec{a}\\(a-2)\vec{x} &= a\vec{a}\\\vec{x} &= \frac{a}{a-2}\vec{a}\qquad \text{für a} \neq 2\end{aligned}$$

Für a=2 ist die Gleichung unlösbar.

Dazu kamen noch eine Reihe anspruchvollerer Leistungen, für die das Skript Details enthält:

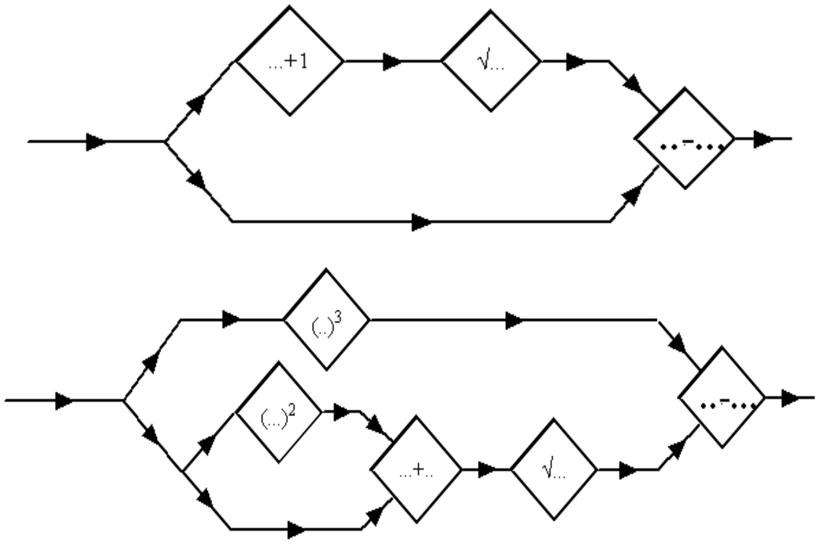
- Einfache Beispiele von Verlaufsdiagrammen, die Terme beschreiben:

•

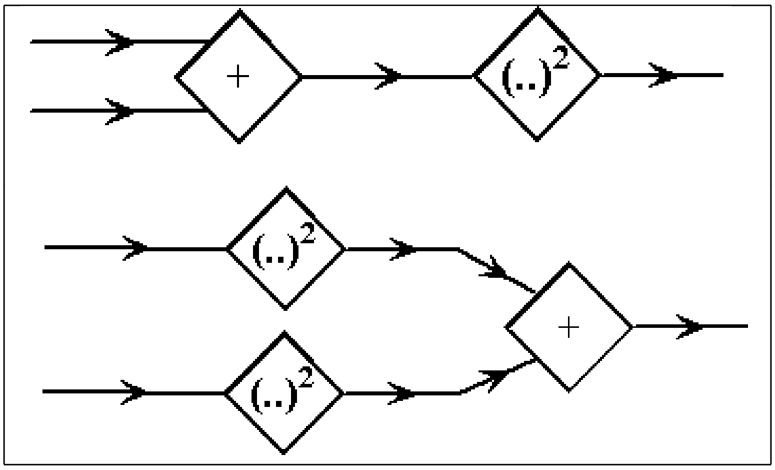
Zwei zugehörige Beispiele aus dem Fundus der Aufgaben:

☐ (3.1.11) Skizzieren Sie ein Verlaufsdiagramm für $x \mapsto \sqrt{1+x} - x$ und für $x \mapsto x^3 - \sqrt{x^2+x}$ Welches Problem taucht auf, wie wird man es zeichnerisch lösen?

▼ Man benötigt den Wert von x mehrfach, muss ihn speichern bzw. auf zwei parallelen Wegen verarbeiten. Hierzu "verzweigen" wir in der Figur das hereinlaufende x-Signal!



☐ (3.1.11) h(x,y)=(x+y)^2 und k(a,b)=a^2 + b^2. In beiden Fällen hat man zwei Eingabegrößen. Wie wird man das als Verlaufsdiagramm darstellen? ▼



▲

- Was ist (in der Mathrmatik) ein Körper? (K,+,$\cdot$)

Was ein Vektorraum (über einem Körper)? (V,+,$\circ$)

-
  - Man startet mit den Axiomen einer kommutativen Gruppe und arbeitet sich damit jeweils in die Höhe. In beiden Fällen treten die Distributivgesetze auf.
  - Begründung, dass $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^3_K, V_0^3$ und V^3 alles Vektorräume sind. Dazu muss man jeweils die beiden Verknüpfungen definieren und nachweisen, dass sie die Vektorraumaxiome erfüllen. Vgl .Skript.
  - Folgen des Assoziativgesetzes als Herausforderung:
    - 1) Wieviel zulässige Beklammerungen eralubt eine Summe aus N summanden bei fester Reihenfolge
    - 2) Das Assoziativgesetz (für drei Summanden) bewirkt, dass man bei beleibig großen Summen die Klammern fortlassen kann, denn alle zugehörigen zulässigen Beklammerungen liefern dasselbe Endergebnis! (Beweis über Induktion!)

Es wurden einige einfache Resultate ausschließlich mit Hilfe der Vektorraumaxiome bewiesen wie $0\vec{x} = \vec{0}$ und (-1)$\vec{x} = -\vec{x}$ und: Die Gleichung $\alpha\vec{x} = \vec{a}$ hat für $\alpha \neq 0$ die eindeutige Lösung $\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{a}$. (Auch das sah meist hoffnungsvoll aus.)
