Probeklausur Vorkurs Mathematik für Physiker
29.9.2006

Beantworten Sie die Fragen möglichst in der gegebenen Reihenfolge. Lesen Sie den Text genau und beantworten Sie die gestellten Fragen, keine selbst ausgedachten. Die Aufgaben 8 und 9 sind etwas anspruchsvoller. Zeitrahmen 2-3 Stunden in einem Stück

■ 1) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{a-b} + 2 + \frac{2a+3b-2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$$

■ 2) Berechnen Sie (mit Hilfe der Distributivgesetze) den folgenden Ausdruck für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_0^3$, wobei $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{c}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$ gelten soll:

$$\left((\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2\right)^2 .$$

■ 3) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (mit Unbestimmten x,y in $\mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} 2ix + 1y &= 3+i \\ -x + iy &= 1-i \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lage der Lösungen x und y in der komplexen Ebene und geben Sie deren Polardarstellung an.

■ 4) Gegeben drei Punkte P,Q und R aus E^3 mit Koordinatenvektoren $\vec{x}_P^K = (1,1,0)$ und $\vec{x}_Q^K = (2,0,2)$ und $\vec{x}_R^K = (0,3,3)$.

a) Skizzieren Sie die drei Vektoren

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S (für gleiche Massen) dieser drei Punkte.

c) Es sei E die Ebene, die von P,Q und R aufgespannt wird. Geben Sie eine Parametrisierung von E an. Wie lauten die Parameterwerte, die zum Schwerpunkt gehören.

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K$. (Angabe im Bogenmaß.)

e) Berechnen Sie das Vektorprodukt $(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)$ sowie dessen Betrag. Welche geometrische Größe innerhalb der Ebene E haben Sie mit diesem Betrag bestimmt?

■ 5) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(3) = (0,-2,0)$ und $\vec{v}(3) = (0,7,5)$. Weiter sei $\vec{g} = (0,0,-10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Achtung: Was ist an dieser Stelle alles sorgfältig anzugeben?)

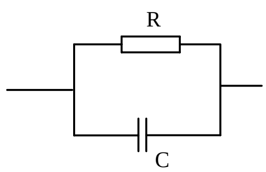
b) Wo liegt der Scheitelpunkt, wo und wann trifft die Flugbahn die Horizontalebene (z=0)?

c) Wo wird die z-Achse getroffen und unter welchem Winkel ?

d) Fertigen Sie eine zusammenfassende Skizze der Konfiguration.

e) Geben Sie die skalare Geschwindigkeit als Funktion der Zeit an.

■ 6) Bestimmen Sie für die folgende Wechselstromschaltung den komplexen Widerstand Z sowie den zugehörigen Betrag.|Z| .



■ 7) Es sei $\vec{a}^K = (0,3,1)$ und $\vec{x} = (0,3,3)$. Zerlegen Sie $\vec{x}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und zeichnen Sie die gesamte Konfiguration.

■8*) Ein Lichtstrahl auf einer Geraden g treffe die Ebene E im Punkte P. Gesucht ist der reflektierte Strahl, also eine Parametrisierung der Strahlgeraden! $\vec{x}_P$ ist gegeben, ebenso je eine Parametrisierung $\vec{x}_g(a) = \vec{A} + a\vec{V}$ und $\vec{x}_E(u,v) = \vec{a} + u\vec{e} + v\vec{f}$. Skalarprodukt verwenden.

■ 9*) Ein Fluss der Breite B fließt mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{W}$. Ein Schwimmer ist in der Lage relativ zum Wasser mit der (skalaren) Geschwindigkeit V zu schwimmen. Er schwimmt so, dass er nicht abtreibt, also das andere Ufer genau am gegenüberliegenden Punkt erreicht. Geben Sie eine Formel für die Zeit, die er benötigt, um das gegenüberliegende Ufer zu erreichen. Hinweis: Mit einem geeigneten Koordinatensystem arbeiten, Skizze mit benötigten Bezeichnungen. Sei $\vec{R}$ die Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Ufer. Welche Bedingung muss $\vec{R}^K$ erfüllen?

Aufgaben mit Lösungen!

1) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$A = \frac{1}{a-b} + 2 + \frac{2a+3b-2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$$

▼

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a-b} + 2 + \frac{2a+3b-2a^2+2b^2}{a^2-b^2} \\ &= \frac{a+b+2(a^2-b^2)+2a+3b-2a^2+2b^2}{a^2-b^2} = \frac{3a+4b}{a^2-b^2} \end{aligned}$$ ▲

Diese Aufgabe wurde weitgehend korrekt gelöst.

■ 2) Berechnen Sie (mit Hilfe der Distributivgesetze) den folgenden Ausdruck für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_0^3$, wobei $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$ gelten soll:

$$\left((\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2\right)^2 .$$

▼

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2 &= \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 9\vec{c}^2 + 4(\vec{a}\vec{b}) - 6(\vec{a}\vec{c}) - 12(\vec{b}\vec{c}) \\ &= 14\vec{a}^2 - 6(\vec{a}\vec{c}) = 2(7\vec{a}^2 - 3(\vec{a}\vec{c})) \\ \left((\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2\right)^2 &= 4(7\vec{a}^2 - 3(\vec{a}\vec{c}))^2 \\ &= 4\left(49(\vec{a}^2)^2 + 9(\vec{a}\vec{c})^2 - 42\vec{a}^2(\vec{a}\vec{c})\right) \\ &= 196(\vec{a}^2)^2 + 36(\vec{a}\vec{c}) - 168\vec{a}^2(\vec{a}\vec{c}) \end{aligned}$$

Trotz aller Bemühungen traten hier die erwarteten üblichen Probleme auf. In etwa 60% der Lösungen wurde mit $(\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$ und $\vec{a}(\vec{a}\vec{c}) = \vec{a}^2\vec{c}$ usw gerechnet. Das Resultat ist schwach.

▲

$$\begin{aligned} 2ix + 1y &= 3 + i \\ -x + iy &= 1 - i \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lage der Lösungen x und y in der komplexen Ebene und geben Sie deren Polardarstellung an.

▼

$$\begin{array}{lll} 2ix + 1y = 3 + i & +\mathrm{i} & +1 \\ -x + iy = 1 - i & -1 & +2\mathrm{i} \end{array}$$

$$\begin{aligned} -x &= 4i - 2 \qquad \underline{x = 2 - 4i} \\ -1y &= 5 + 3i \qquad \underline{y = -5 - 3i} \end{aligned}$$

Nach dem empfohlenen Schema genügten diese zwei Zeilen zur Lösung. Es gab aber wieder "wir haben das immer so gemacht"-Lösungen von über einer halben Seite Länge. Viele der Skizzen waren dürftig. REcht gut dagegen die beiden Polardarstellungen.

$$x = 2\sqrt{5}e^{-iatn(2)} \qquad \text{und} \qquad y = \sqrt{34}e^{i(atn(\frac{3}{5})+\pi)}$$

▲

■ 4) Gegeben drei Punkte P,Q und R aus E^3 mit Koordinatenvektoren $\vec{x}_P^K = (1,1,0)$ und $\vec{x}_Q^K = (2,0,2)$ und $\vec{x}_R^K = (0,3,3)$.

a) Skizzieren Sie die drei Vektoren

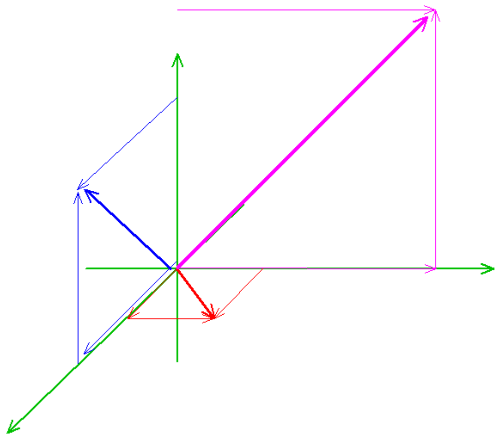
b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S (für gleiche Massen) dieser drei Punkte.

c) Es sei E die Ebene, die von P,Q und R aufgespannt wird. Geben Sie eine Parametrisierung von E an. Wie lauten die Parameterwerte, die zum Schwerpunkt gehören.

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K$. (Angabe im Bogenmaß.)

e) Berechnen Sie das Vektorprodukt $(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)$ sowie dessen Betrag. Welche geometrische Größe innerhalb der Ebene E haben Sie mit diesem Betrag bestimmt?

▼ a)



Viele Skizzen, die die räumliche Lage nicht zeigten. Nach dem Motto, was soll das, da bemühe ich mich nicht drum.

b) Der Schwerpunkt

$$\vec{x}_S = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

Nur wenige, die diese Formel nicht verstanden haben

c)

$$\vec{x}_E(u,v) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+u-v\\1-u+2v\\2u+3v\end{pmatrix}$$

Hier vielfach keine Bemühung, den nützlichen Formalismus korrekt anzuwenden. Statt $\vec{x}_E(u,v) = \ldots$ einfach E=... oder $\vec{x} = \ldots$..

d)

$$\begin{pmatrix}1+u-v\\1-u+2v\\2u+3v\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}'u - v &= 0 & + & \\ -u + 2v &= \tfrac{1}{3} & + & \quad +2 \\ 2u + 3v &= \tfrac{5}{3} & & \quad + \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{3} \qquad 7\text{v}=\frac{7}{3} \qquad \text{u}=\frac{1}{3} \quad \text{alle Bedingungen erfüllt.}$$

d) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \qquad \alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt den Flächeninhalt des von $\vec{e}$ und $\vec{f}$ aufgespannten Parallelogramss! ***Nicht den kürzesten Abstand der Ebene*** *vom Ursprung. (Parametrisierung der Fläche ist nicht Gleichung der Fläche!)*

▲

■ 5) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(3) = (0, -2, 0)$ und $\vec{v}(3) = (0, 7, 5)$. Weiter sei $\vec{g} = (0, 0, -10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Achtung: Was ist an dieser Stelle alles sorgfältig anzugeben?)

b) Wo liegt der Scheitelpunkt, wo und wann trifft die Flugbahn die Horizontalebene (z=0)?

c) Wo wird die z-Achse getroffen und unter welchem Winkel ?

d) Fertigen Sie eine zusammenfassende Skizze der Konfiguration.

e) Geben Sie die skalare Geschwindigkeit als Funktion der Zeit an.

▼

a)

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (0, -2, 0) + T(0, 7, 5) + (0, 0, -5)T^2 = (0, -2 + 7T, 5T - 5T^2) \\ \vec{v}(t) &= (0, 7, 5 - 10T) \qquad \text{mit T=t-3.} \end{aligned}$$

b) Scheitelzeit $T_s = \frac{1}{2}$ also $t_S = \frac{7}{2}$. Das gibt für den Scheitelpunkt:

$$\vec{r}_S = \vec{r}(\frac{7}{2}) = (0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4})$$

Auftreffen auf der Horizontalebene: 5T(1-T)=0 bei T=0 und T=1.

Das gibt $\vec{r}_1 = (0, -2, 0)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(4) = (0, 5, 0)$

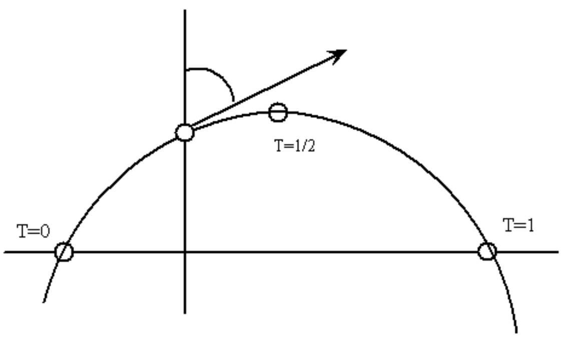
c) Schnitt mit der z-Achse: T=$\frac{2}{7}$. $\vec{r}(\frac{23}{7}) = (0, 0, \frac{50}{49})$

$\vec{v}(\frac{23}{7}) = (0, 7, \frac{15}{7})$

Winkel $\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{49+\frac{15^2}{49}}} = \frac{15}{2626}\sqrt{2626}$

$\arccos \frac{15}{2626}\sqrt{2626} = 1.2737$

d) Skizze



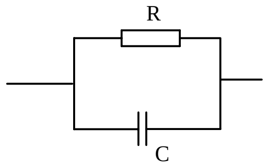
e)

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{7 + 25(1 - 2T)^2} = \sqrt{7 + 25(7 - 2t)^2}$$

Das ging recht gut. Nur einige wollten sich wieder nicht an das Schema halten und rechneten dann mehrere Seiten. sicher fünfmal so lang wie nötig. Das man es dann zeitlich nicht schafft, ist vorherzusehen..

▲

■ 6) Bestimmen Sie für die folgende Wechselstromschaltung den komplexen Widerstand Z sowie den zugehörigen Betrag.|Z| .



▼

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + i\omega C \\
Z &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} = \frac{R}{1 + i\omega RC} = \frac{R(1 - i\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \\
|Z| &= R\frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}
\end{aligned}$$

Akzeptabel, wenn auch in einer Reihe von Fällen jetzt die Zeit und die Konzentration wegzubrechen begann. Hier tauchten auch fehlerhafte Umformungen wie $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ oder $\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ auf.

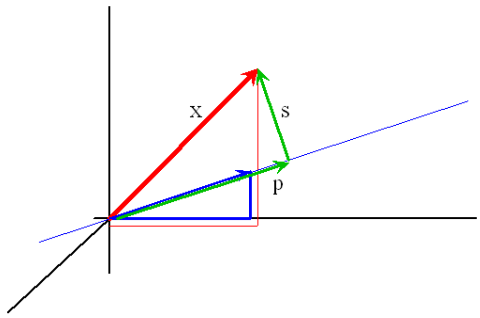
▲

■ 7) Es sei $\vec{a}^K = (0, 3, 1)$ und $\vec{x}^K = (0, 3, 3)$. Zerlegen Sie $\vec{x}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und zeichnen Sie die gesamte Konfiguration.

▼ Mit der allgemeinen formel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\vec{p}^K &= \vec{a}^K \frac{12}{10} = \vec{a}^K \frac{6}{5} \\
\vec{s}^K &= \vec{x}^K - \vec{p}^K = \frac{1}{5}(0, 15, 15) - \frac{6}{5}(0, 3, 1) = \frac{1}{5}(0, -3, 9)
\end{aligned}$$

Als Skizze´



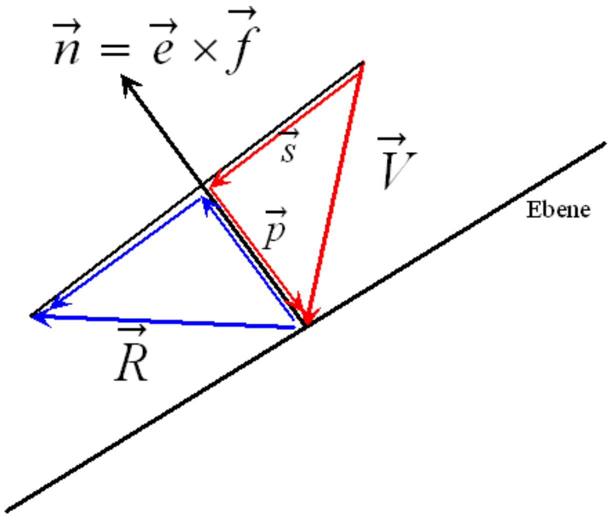
Probe: $\vec{s}^K \cdot \vec{p}^K = \frac{6}{25}(-9 + 9) = 0$
$\vec{s}^K + \vec{p}^K = \frac{1}{5}(0, -3, 9) + \frac{6}{5}(0, 3, 1) = \frac{1}{5}(0, 15, 15) = \vec{x}^K$.

Viele Skizzen hätten besser, insbesondere auch vollständiger sein können. Das gilt auch für die Skizze zur Flugparabel.

▲

■8*) Ein Lichtstrahl auf einer Geraden g treffe die Ebene E im Punkte P. Gesucht ist der reflektierte Strahl, also eine Parametrisierung der Strahlgeraden! $\vec{x}_P$ ist gegeben, ebenso je eine Parametrisierung $\vec{x}_g(a) = \vec{A} + a\vec{V}$ und $\vec{x}_E(u, v) = \vec{a} + u\vec{e} + v\vec{f}$. Skalarprodukt verwenden.

▼ Der Schnittpunkt S von g mit E kann wie üblich bestimmt werden. Dort startet der reflektierte Strahl. Man benötigt noch einen Richtungsvektor $\vec{R}$ des reflektierten Strahles. Der einfallende Strahl hat ja den Richtungsvektor $\vec{V}$. Das Reflexionsgesetz formulieren wir mit Hilfe der Normealen der Ebene E. Ein zugehöriger Normalenvektior ist Das ist $\vec{n} = \vec{e} \times \vec{f}$. Eine Skizze zeigt sofort, wie $\vec{R}$ erhalten werden kann:



Es sei $\vec{V} = \vec{s} + \vec{p}$, wobei $\vec{p}$ die zu $\vec{n}$ parallele Kopmponente von $\vec{V}$ ist. Dann gilt $\vec{R} = -\vec{p} + \vec{s} = \vec{V} - 2\vec{p}$, wobei $\vec{p} = \vec{n}\frac{(\vec{n}\cdot\vec{V})}{\vec{n}^2}$ ist.

Dann hat der reflekierte Halbstrahl die Parametrisierung

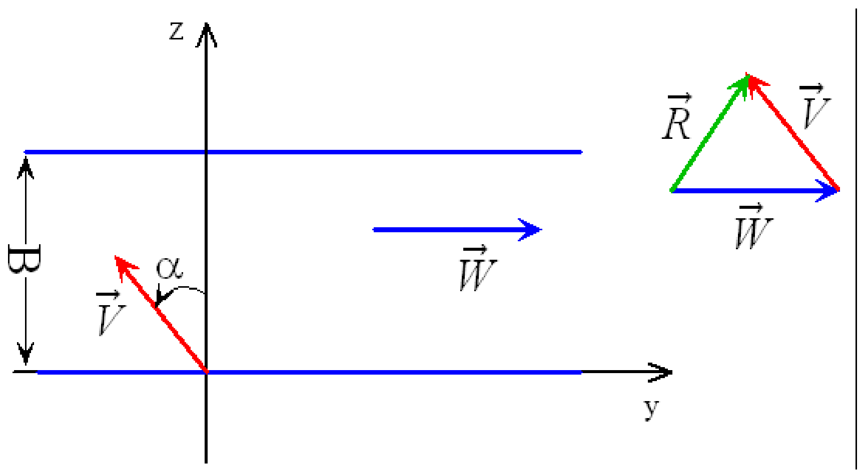
$$\vec{x}_{\mathrm{ref}}(\alpha) = \vec{x}_S + \alpha\vec{R} \quad \text{für } \alpha \geq 0.$$

Die richtige Idee war mehrfach vorhanden. Nur fehlte dann der Versuch, $\vec{R}$ mit den vorhandenen Hilfsmittel auszurechnen! ▲

■ 9*) Ein Fluss der Breite B fließt mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{W}$. Ein Schwimmer ist in der Lage relativ zum Wasser mit der (skalaren) Geschwindigkeit V zu schwimmen. Er schwimmt so, dass er nicht abtreibt, also das andere Ufer genau am gegenüberliegenden Punkt erreicht. Geben Sie eine Formel für die Zeit, die er benötigt, um das gegenüberliegende Ufer zu erreichen. Hinweis: Mit einem geeigneten Koordinatensystem arbeiten, Skizze mit benötigten Bezeichnungen. Sei $\vec{R}$ die Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Ufer. Welche Bedingung muss $\vec{R}^K$ erfüllen?

$\vec{W}$ $\vec{V}$ $\vec{R}$

▼ Wir legen das Koordinatensystem wie in der Skizze:



Dann folgt für die Bootsgeschwindigkeit $\vec{V}$ relativ zum Wasser: $\vec{V}^K = (0, V\sin\alpha, V\cos\alpha)$ wie vielfach geübt. Und $\vec{W}^K = (0, W, 0)$. Damit

$$\vec{R}^K = \vec{W}^K + \vec{V}^K = (0, W + V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

Damit es keinen Abtrieb gibt, muss W+V$\cos\alpha = 0$ gelten. Das legt das bisher noch unbestimmte α fest. Für die Fahrtzeit T gilt dann B=TV$\sin\alpha$. Oder

$$T = \frac{B}{V\sin\alpha} = \frac{B}{V\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{B}{V\sqrt{1-\frac{W^2}{V^2}}} = \frac{B}{\sqrt{V^2-W^2}}$$

Das drückt T durch die gegebenen Größen aus. Ist V<W hat man notgedrungen immer einen Abtrieb.

Mit etwas mehr Bemühung um eine gute Skizze hätten das eine Reihe von Ihnen hinkriegen können.

▲

Das Gesamtergebnis ist nicht schlecht! Traurig ist nur die geringe Teilenhmerzahl. Und wie üblich haben die, für die die Teilnahme wichtig gewesen wäre, nicht teilgenommen. Die Aufgaben ergaben etwa 50 Punkte. Nach den früheren Kriterien hätten alle bis auf einen bestanden. Die Verteilung sieht dann wie folgt aus. x

			x	
			x	
			x	
			x	
			x	x
			x	x
		x	x	x
x		x	x	x
0-10	10-20	20-30	30-40	40-50