Fünfte und letzte Woche

■ Für eine Flugparabel folgt $\boxed{\vec{v}_{mittel}(t, t+\Delta t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t) + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \vec{g}.}$ Was bedeutet das graphisch??

■ Was folgt mit Hilfe des Satzes vom beschränkten Zuwachs aus der Ungleichung sin(x)$\leq x$, die für x$\geq$ 0 gilt?

■ "Ungleichungen darf man nicht ableiten". Was bedeutet das? Beweis? Durch Gegenbeispiel, etwa sin(3x)$\leq$ 1.

■ Sei f(x) eine ungerade Funktion. Was kann man dann über f$'(x)$ sagen? **Vermutung? Beweis? Verallgemeinerung?** Die Ableitung einer ungeraden Funktion ist gerade usw. Beweis über Tangentenzerlegung. Etwa

$$\begin{aligned}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x} &= -\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{(-\Delta x)}\end{aligned}$$

Kap. 12
Integration

Die beiden bisherigen Hauptformeln:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

$$\Delta x \mapsto f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$$

Neu:

$$\boxed{\boxed{\bar{f} \cdot (x-a) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).}}$$

(12.1.1) Beginnen wir mit der Analyse des mittleren Termes.

- Dieser beschreibt offensichtlich eine Aufforderung, den Bestandteilen f, x und a etwas zuzuordnen, das durch den mittleren Term bezeichnet werden soll.

(12.1.2) Das Problem, um das es geht, ist die **Umkehrung des Ableitens.** So wie die Bezeichnung $\sqrt{x}$ die Aufforderung beinhaltet *suche eine (positive) Zahl, deren Quadrat x ist,* beinhaltet der mittlere Term die Aufforderung *suche ein Funktion F, deren Ableitung f ist.* Der Rechenausdruck f(t), der das gegebene f festlegt, ist Bestandteil des Termes.

Zuordnung ist nicht eindeutig - Zusatzbedingung!

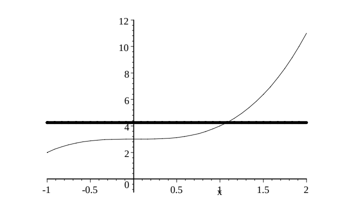
- **(12.1.4) Die rechte Seite** F(x)-F(a) der Gleichung gibt an, wie die vom mittleren Term beschriebene Aufgabe in der Regel gelöst wird. Diese Lösung erscheint zunächst als rein formale Spielerei: Man nimmt irgendeine Funktion, deren Ableitung gleich f ist und bildet die durch den Term gegebene Differenz, also die Änderung des Funktionswertes zwischen x und a.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} dx\underbrace{\cos(x)}_{\sin(x)} = \sin\boxed{\tfrac{\pi}{2}} - \sin\boxed{0} = 1$$

- **(12.1.5) Die linke Seite** liefert schließlich die inhaltliche Interpretation des Resultates, gibt ihm eine Bedeutung, die sich als ausgesprochen wichtig erweist. Das Ergebnis lässt sich schreiben als Produkt aus der Intervallänge (x-a) und dem **Mittelwert der Funktionswerte** zwischen x und a.

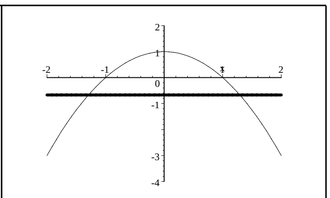
  Das ergibt eine globale Näherung der Funktion durch eine einzige Zahl $\overline{f}$ in dem von x und a festgelegten Intervall. Oder alternativ durch die konstante Funktion $x \mapsto \overline{f}$. **In den Anwendungen koppelt die Problemsituationen meist an diese Bedeutung (der linken Seite) an, wogegen die rechte Seite die Bestimmung und Auswertung der gesuchten Größe erlaubt.**

(12.1.6) Während die Tangentenapproximation eine **lokale** Approximation um einen Aufpunkt lieferte, erhalten wir jetzt ein **globale Approximation** durch eine konstante Funktion für ein vorgebbares Intervall.

$f(x) = 3 + x^3$ $a = -1, x = b = 2$ Berechnet: $\overline{f} = \frac{51}{12}$	

(12.1.7) Selbstverständlich bleibt unsere Interpretation korrekt, wenn f im Integrationsbereich Nullstellen aufweist. Die manchmal an Schulen gelehrte Regel, man dürfe nicht über Nullstellen (von f) integrieren, ist Unfug.

☐ Ist $f(u) \geq 0$ für $a \leq u \leq x$, dann folgt aus unserer Mittelwertinterpretation die übliche "Flächeninhaltsinterpretation des Integrales." Begründen Sie dies.

$f(x) = 1 - x^2$ $a = -2, b = 2$ Berechnet: $\overline{f} = -\frac{2}{3}$	

(12.1.8) Eine zweite Verdeutlichung der Formel erhalten wir, wenn wir sie im kinematischen **Modell der eindimensionalen Bewegung** deuten. Dann übernimmt die Eingabefunktion $t \mapsto f(t)$ die Rolle der momentanen Geschwindigkeit und F(x)-F(a) ist der im Zeitintervall $a \leq t \leq x$ zurückgelegte Weg. Die Handlungsaufforderung des mittleren Termes lautet:

- **Berechne mit Hilfe der (Funktion der) momentanen Geschwindigkeit den zurückgelegten Weg.** Denn die momentane Geschwindigkeit ist ja gerade die Ableitung der Wegkoordinate nach der Zeit. Und die linke Seite besagt:
- **Die infolge der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit möglicherweise sehr komplizierte Bewegung kann ersetzt werden durch eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $\overline{f}$.**
- Eine solche Bewegung ergibt für das durch x und a festgelegte Zeitintervall dieselbe Wegänderung, wie die tatsächliche Bewegung. Denn unter Fortlassen des mittleren Termes, der ja hauptsächlich die Rechenaktionsaufforderung gibt, nimmt unsere Formel die folgende vertraute Gestalt nebst zugehöriger Interpretation an:

$\overline{f} \cdot (x-a) = F(x) - F(a)$	$\overline{v} \cdot (t_2 - t_1) = s(t_2) - s(t_1)$
$\overline{f} = \frac{F(x)-F(a)}{(x-a)}$ für x>a	$\overline{v} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{(t_2-t_1)}$ füt $t_2 > t_1$.

$$\vec{v}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) = s(t_2) - s(t_1)$$

12.1.2 Integration als formale Umkehrung des Differenzierens

(12.1.13) Definition: (**Später** ist eine **Verallgemeinerung erforderlich!**)

⇒	**Sei** f$\in \mathcal{W}$ mit f:I$\to \mathbb{R}$.
!!!	**Dann** heißen die Lösungen der Bestimmungsgleichung Df=g
⊤	Stammfunktionen von g.
	Eine Stammfunktion F zu g erfüllt also $F'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

cos ist Stammfunktion zu sin
f mit $f(x) = 7 + \frac{1}{3}x^3$ ist eine (von vielen) Stamfunktionen zu h_2

⊤ **Um die Symbolik prägnanter zu machen und um Buchstaben zu sparen**, ist es üblich, Stammfunktionen durch korrespondierende Großbuchstaben zu bezeichnen

- F ist also Stammfunktion zu f und G eine zu g usw. Für Funktionen mit fester Bedeutung gilt diese Konvention nicht.
- Auf Bezeichnungen wie h_2 oder cos wendet man die Regel nicht an, schreibt also weder COS für -sin noch H_2 für $\frac{1}{3}h_3$.
- Eine andere Bezeichnungsweise von Stammfunktionen verwendet das Integralzeichen: Auch $\boxed{\int dx f(x)}$ soll einen Rechenausdruck einer Stammfunktion von f bezeichnen. Etwa $\int dx e^x$=e^x oder $\int dx \sin(x) = -\cos(x)$. Wir werden diese Schreibweise vornehmlich dazu verwenden, wenn wir durch Anwendung eines bestimmten Verfahrens nach einer Stammfunktion suchen.
  - Eine zugehörige Konvention ist hierbei, dass die Integrationsvariable ebenso bezeichnet wird, wie die Variable der Stammfunktion. Also
  $$\int dx\, x = \frac{1}{2}x^2$$
  und
  $$\int dt\, (3x + 2t) = \frac{1}{4}(3x + 2t)^2.$$
  Beim bestimmten Integral kommt dagegen der Bezeichnung der Integrationsvariablen außerhalb des Integrationstermes keine Bedeutung zu.

Kann es mehrere Urbilder (eines einzigen Bildes) geben, enden mehrere Zuordnungspfeile in dem Element? Hier also: **Kann eine Funktion g mehrere Stmmfunktionen besitzen? Ja, und daher ist da Symbol** $\int dx f(x)$ u.U. problematisch.

(12.1.15)

- Seien etwa F und G aus $\mathcal{D}$ mit DF=DG.
- Dann folgt aus der Linearität von D unmittelbar (F-G)$' = 0$ oder D(F-G)=0.
- D.h. F-G ist eine Funktion mit Ableitung Null.

(12.1.16) Hierfür (Funktion mit Ableitung Null) finden wir sofort eine ganze Reihen von Lösungen: Jede konstante Funktion $\underset{\sim}{c} = (I, x \mapsto \underset{\sim}{c}(x) = c, \mathbb{R})$ hat Ableitung Null. Und das heißt: F und G mit F=G+$\underset{\sim}{c}$ haben dieselbe Ableitung.

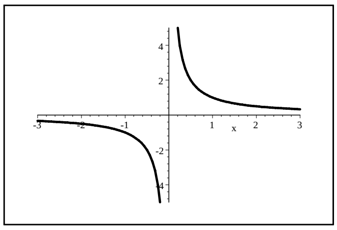
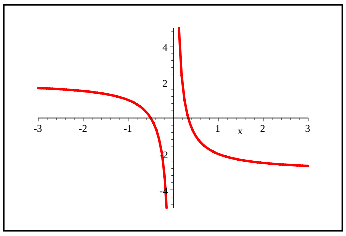
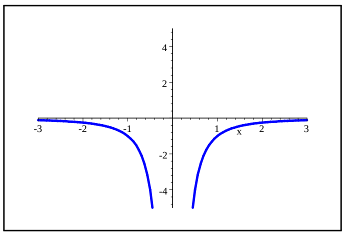
!!!	**Unterscheiden sich zwei Funktionen nur durch eine Konstante, dann haben sie dieselbe Ableitung!**

Die Graphen von F und G unterscheiden sich dann durch eine Parallelverschiebung um c in Richtung der y-Achse.

(12.1.17) Wir fragen, ob wir so bereits **alle Stammfunktionen** zu $g \in \mathcal{W}$ gefunden haben? Oder anders ausgedrückt: Kann es noch eine weitere Funktion H geben, die einerseits $H' = g$ erfüllt, aber andererseits nicht von der Form G+$\underset{\sim}{c}$ ist?

Nach etwas Überlegung findet man ein Beispiel:

I=$\mathbb{R} - \{0\}$	G=$h_{-1} = (I, x \mapsto \frac{1}{x}, \mathbb{R})$	H=(I,x$\mapsto H(x), \mathbb{R})$	H(x)=$\begin{cases} \frac{1}{x} + a \text{ für } x>0 \\ \frac{1}{x} + b \text{ für } x<0 \end{cases}$

$\frac{1}{x}$   

Beide Funktionen G und H haben dieselbe Ableitung. Aber für $a \neq b$ werden die beiden Hyperbeläste auch ungleich weit verschoben. Man fragt sich:

> Gibt es da vielleicht noch kompliziertere, der Anschauung nicht so leicht zugängliche Beispiele? Für ein solches Funktionenpaar F und G wäre die Differenz A=F-G einerseits nicht konstant, aber die Ableitung wäre überall Null. A$' = \underset{\sim}{0}$. Der Satz vom beschränkten Zuwachs zeigt, dass das unter bestimmten Bedingungen **nicht** der Fall sein kann.

(12.1.18) **D**ie letzte Bedingung war im Gegenbeispiel nicht erfüllt! Wir müssen verlangen, dass der gemeinsame Definitionsbereich I unserer Funktionen ein Intervall ist!

> **Ist der gemeinsame Definitionsbereich I ein Intervall, dann unterscheiden sich die Stammfunktionen nur durch eine Konstante voneinander. Man erhält alle Stammfunktionen, indem man zu einer solchen alle möglichen (auf I) konstanten Funktionen hinzuaddiert. Graphisch: Man muss den Graphen einer Stammfunktion auf alle möglichen Weisen parallel zur y-Achse verschieben!**

> Die **traditionelle Schreibweise** $\boxed{\int dx f(x) = F(x) + c}$ c$\in \mathbb{R}$ frei,
> ist daher als Parametrisierung aller Stammfunktionen zu interpretieren!
> Sie gilt nur, wenn der Definitionsbereich ein Intervall ist:

(12.1.19) Insbesondere ist $\mathbb{R}$ ein Intervall. Die Gesamtheit aller Stammfunktionen von cos wird gegeben durch F_c mit $F_c(x) = \sin(x) + c$, wobei c freier Parameter ist. Vielfach (besonders im schulischen Bereich) ist es üblich,

> $\int dx f(x)$ als Bezeichnung für die Schar aller Stammfunktionen anzusehen. Man schreibt dann $\int dx \sin x = -\cos x + c$ mit c als freiem oder äußerem Parameter. Der Leser muss dem jeweiligen Zusammenhang entnehmen, was gemeint ist: **Eine spezielle Stammfunktion oder aber die Schar aller Stammfunktionen**.
>
> In jedem Fall muss man vorsichtig sein, zu naiv von f(x)=g(x) auf $\int dx f(x) = \int dx g(x)$ zu schließen.

□ Ein Beispiel: (3x+2)=3x+2. Wir finden $\int dx(3x+2) = \frac{1}{6}(3x+2)^2 + c$, wie man sofort durch Ableiten prüft. Und (mit der vorweggenommenen Linearität aus (12.1.32)):

$$\int dx(3x+2) = 3\int dx\, x + 2\int dx 1 = (\frac{3}{2}x^2 + c_1) + 2x + c_2 = \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \text{ mit } c = c_1 + c_2.$$

Gilt hier "c=c"?

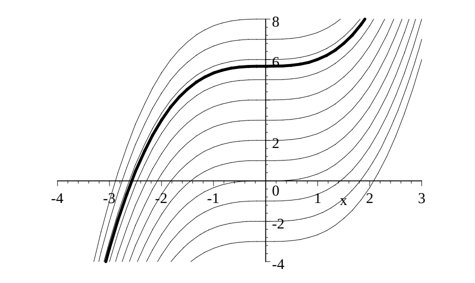
(12.1.20) Was für eine (die Umkehrbarkeit erzwingende) **Zusatzbedingung soll man nun an die Stammfunktion stellen?**

(12.1.22) Sei $\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}$ die Teilmenge aller Funktionen aus $\mathcal{D} = \mathcal{D}(I)$, die durch den Punkt (x_0, y_0) des Graphenraumes geht. Auf diese Menge schränken wir die Ableitung D ein, betrachten also die Abbildung

$$(\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}, F \mapsto F', \mathcal{W}).$$

(12.1.23) Diese Abbildung ist nach Konstruktion jetzt umkehrbar. Für jede zulässige Wahl von (x_0, y_0) erhält man eine eigene zugehörige Umkehrabbildung des Differenzierens.

Kurvenschar
$\mathrm{f}_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$
Vorgegebener Punkt:
$\mathrm{x}_0 = -2$ und $\mathrm{y}_0 = 3$
Der Graph mit c=$\frac{17}{3}$ geht
durch diesen Punkt!



(12.1.24) Für die übliche Integrationstheorie beschränkt man sich auf den Fall $\mathrm{y}_0 = 0$. Der allgemeine Fall ist für die Theorie der Differentialgleichungen grundlegend.

(12.1.25) Für diesen uns hier interessierenden Fall - also $\mathrm{y}_0 = 0$, d.h. die gesuchte Stammfunktion hat bei x_0 eine Nullstelle - führen wir die üblichen Bezeichnungen ein:

⇒	Sei	I ein Intervall und f$\in \mathcal{W}(I)$. Weiter sei a$\in I$.
!!	Dann	gibt es genau eine Stammfunktion F$\in \mathcal{D}(I)$, die F(a) = 0 erfüllt.
		Diese Stammfunktion bezeichnen wir mit
		$\boxed{\int_a dt f(t) = \left(I, x \mapsto \int_a^x dt f(t), \mathbb{R}\right)}$
⊤		Die gesamte Funktion wird *unbestimmtes Integral von f* genannt.
⊤		Jeder Wert dieser Funktion heißt ein *bestimmtes Integral von f.*
		t ist eine stumme Variable (genannt *Integrationsvariable*) .
		Sie nur dazu dient, einen f definierenden Rechenausdruck als Integranden formulieren zu können.
⊤		Die Funktion f bzw. der Rechenausdruck f(t) heißt der *Integrand*
		im Sinne von *Funktionsterm, für den eine Stammfunktion zu suchen ist.*

(12.1.26) Beispiel:

$$\int_3 dt\, t^3 = \left(\mathbb{R}, x \mapsto \int_3^x dt\, t^3, \mathbb{R}\right) = \left(\mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{81}{4}, \mathbb{R}\right)$$

Man überzeugt sich sofort, dass die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Da t eine stumme Variable ist, darf man schreiben

$$\int_3^x dt\, t^3 = \int_3^x da\, a^3 = \int_3^x du\, u^3 \quad \text{usw.}$$

Vermeiden sollte man dagegen die verbreitete (Un)sitte, die obere Grenze x und die Integrationsvariable mit demselben Buchstaben zu schreiben, also

$$\int_3^x dx'\, x'^3.$$

Das führt zu Problemen, wenn die obere Grenze als äußerer Parameter im Integranden auftritt, was nicht selten der Fall ist. Man sollte sich angewöhnen, die Integrationsvariable etwa durch einen zusätzlichen Strich abzusetzen. Soll das Integralzeichen "nur" einen Stammfunktion des Integranden (ohne Zusatzbedingung) bezeichnen, dann gelten die in (12.1.19) eingeführten Konventionen, dann sollte aber keine Integrationsgrenze angegeben werden.

! **(12.1.27)** Damit haben wir die rechte Gleichung unserer Hauptformel bereits verstanden:

■ $\int_a^b dt\, f(t)$ besteht in der Aufforderung: Suche zu f diejenige Stammfunktion, die bei a$\in I$ eine Nullstelle hat und berechnen ihren Wert an der Stelle b.

■ Ist nun F irgendeine Stammfunkttion, dann ist die gesuchte gleich F+$\underset{\sim}{c}$ und das unbestimmte c bestimmt sich wegen F(a)+c=0 zu -F(a). Der gesuchte Integralwert ist folglich F(b)-F(a) wie von der rechten Seite angegeben.

(12.1.28) Das Ergebnis ist die *technische Form des* ***Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.*** Nochmals:

Sei	I=[a,b] ein endliches Intervall und f:I→ $\mathbb{R}$. Weiter sei F:I→ $\mathbb{R}$ **irgendeine** Stammfunktion von f
Dann	gilt $\int_a^b dt\, f(t) = F(b) - F(a)$

(12.1.29) Die $\boxed{\text{übliche Technik zur Berechnung eines Integrales}}$ besteht daher darin, **irgendeine Stammfunktion** zu suchen und für diese - anschließend! - die Wertedifferenz

$$F(b) - F(a) = Wert(obere\ Grenze) - Wert(untere\ Grenze)$$

zu berechnen.

Da beide Schritte $\boxed{\text{aufwendig und fehleranfällig}}$ sein können, ist es sinnvoll, einen trennenden **Zwischenschritt mit aufzuschreiben**. Man tut das so, dass man die Stammfunktion hinschreibt, sie in eckigen Klammern einschließt oder sie mit einem senkrechten Strich abschließt und die beiden einzusetzenden Grenzen anfügt. Also:

T

$$\boxed{\int_a^b dt\, f(t) = \begin{matrix} F(t)\big|_a^b \\ [F(t)]_a^b \end{matrix} = F(b) - F(a)}$$

! **Zuerst** eine Stammfunktion F zu f suchen und hinschreiben.
! **Dann** die Grenzen einsetzen und die Differenz auswerten.

Es liegt hier eine gebräuchliche Realisierung unseres in (1.4.8) gegebenen Ratschlages zur Arbeitsökonomie vor.

(12.1.30) Ein typisches Beispiel dieses Vorgehens.

$$\int_{-1}^{1} dt\,(t^3 - t^4) = (\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5)\Big|_{-1}^{1} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - (\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{5}(-1)^5) = -\frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dt\ t^2 &= \frac{1}{3}t^3\ |_0^1 = \frac{1}{3}(1\ \text{-}0) \\
\int_{-1}^1 dt\ t^2 &= \frac{1}{3}\,(1 + 1))\,.... \\
\int_0^1 dt\ t^3 &= \\
\int_{-1}^1 dt\ t^3 &= \\
\int_{-2}^3 dt\ t^3 &=
\end{aligned}$$

Und was ergibt sich in kinematisch-physikalischer Interpretation:

$$\int_{t_1}^{t_2} dtv(t) = s(t_2) - s(t_1) = zurückgel.Weg!$$

(12.3.9) Die Liste der wichtigsten Stammfunktionen

f(x)	$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{x}$ (u.U. x>0)	cos(x)	sin(x)	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
F(x)	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\ln\|x\|$ (x$\neq$ 0)	sin(x)	-cos(x)	e^x	atn(x)	asn(x)

12.1.3 Die allgemeinen Integrationsregeln

(12.1.31) Mit Hilfe des Hauptsatzes können wir sofort eine Reihe wichtiger Rechenregeln für die Integration herleiten. Diese Regeln stellen wir jetzt zusammen. Dabei nehmen wir immer an, dass alle aufretenden Funktionen in den jeweils betrachteten Intervallen eine Stammfunktion besitzen.
(12.1.32)

Linearität	$\int_a^b dt\,(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \int_a^b dt\, f(t) + \beta \int_a^b dt\, \mathrm{g}(t)$

Bei einer zu integrierenden Summe oder Linearkombination benötigt man daher nur Stammfunktionen für die einzelnen Summanden. Und konstante Faktoren können vorgezogen werden. Das haben wir in (12.1.19) bereits benutzt.

> Zum **Beweis:** Sei F eine Stammfunktion zu f und G eine zu g. Dann ist $\alpha F+\beta G$ eine zu $\alpha f+\beta g$. Jetzt werte man beide Seiten mit dem Hauptsatz aus. Das ergibt die Gleichheit.

Die obere Grenze b ist in der Linearitätsformel freie Variable. Man kann b durch x$\in$ $[a,b]$ ersetzen so dass die Linearität auch für unbestimmte Integrale mit **gleicher unterer Grenze** gilt.

$$\begin{aligned}
\int dx(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) &= ....2 \\
\int_0^2 dx(a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n) &= \left(a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 +,,,, \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)|_0^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k}2^k.... \\
\int_{-1}^{1} dx\left(\Sigma_{k=0}^n kx^k\right) &= \sum_{k=0}^n k\int_{-}^{1} dxx^k = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1}x^{k+1}|_{-1}^1 = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1}(1-(-1)^{k+1})....
\end{aligned}$$

(12.1.33) Bei der Linearität bleiben die Integrationsgrenzen fest. Die nächsten Regeln beziehen sich auf deren Änderung. Dagegen bleibt jetzt der Integrand unverändert.

Additivität:	$\int_a^b dt\, f(t) = \int_a^c dt\, f(t) + \int_c^b dt\, f(t)$	$\int_a^b dt\, f(t) = -\int_b^a dt\, f(t)$	$\int_a^a dt\, f(t) = 0$

.

Bei der ersten Additivitätsformel muss c so gewählt sein, dass alle Integrale existieren. Ist F Stammfunktion von f, so besagt die erste Gleichung gemäß Hauptsatz einfach

$$F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)).$$

Und das ist offensichtlich korrekt. Die beiden anderen Gleichungen folgen entsprechend. Die mittlere Gleichung kann so interpretiert werden, dass sie zeigt, wie $\int_a^b$ .... zu verstehen ist, wenn b<a gilt.
(12.1.34) Trotz ihrer scheinbaren Banalität sind die beiden Regeln Linearität und Additivität für den konkreten Umgang mit Integralen von großer Bedeutung.

$$\int_{-a}^{a} dx x^{2n} = 2\int_{0}^{a} dx x^{2n} \qquad \text{a>0,n} \in \mathbb{N}.$$

(12.1.35) Eine dritte wichtige Regel folgt aus dem Satz vom beschränkten Zuwachs.

Wir nehmen die folgende Rollenfestlegung vor: Eingabegrößen seien f=F′ und g=G′. Und wir nehmen an, dass für f und g im gesamten Intervall $a \leq x \leq b$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und wir dürfen auf $F(b) - F(a) \leq G(b) - G(a)$ schließen. Nach dem Hauptsatz sind diese Differenzen aber gerade zwei bestimmte Integrale.

(12.1.36) Das Ergebnis:

	Monotonie der Integration.
Sei	I=[a,b] mit a<b. f und g seien in I integrabel.
	Und für alle x mit $a \leq x \leq b$ gelte $f(x) \leq g(x)$.
Dann	gilt $\int_a^b dt\, f(t) \leq \int_a^b dt\, g(t)$. Beachte a<b!
!!!	Kurz: **Eine Ungleichung darf integriert werden!**

(12.1.37) Dass eine Ungleichung unter (der Anwendung) irgendeiner mathematischen Operation (auf die beiden Seiten der Ungleichung) erhalten bleibt, ist keineswegs selbstverständlich. Differenziert man beide Seiten einer Ungleichung, so bleibt sie in der Regel nicht gültig! So gilt etwa $f(x) = e^{-x} > g(x) = -e^{-x}$ für alle x. Ableiten macht daraus die völlig falsche Ungleichung $f'(x) = -e^{-x} > g'(x) = e^{-x}$.
☐ Wie steht es mit dem Quadrieren der Seiten einer Ungleichung?
(12.1.38) Die Integration verhält sich diesbezüglich viel besser als die Differentiation! Die Montonieeigenschaft ist sehr nützlich, da man mit ihrer Hilfe auch für schwierigere Integrale leicht **Abschätzungen und Näherungen** erhält. Das Vorliegen einer Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ für die Integrandenfunktionen lässt sich vielfach mit Hilfe einfacher Grapheninspektion erkennen.
(12.1.39) Beachten Sie etwa, wie häufig Ungleichungen wie f(x)>0 oder f(x)≤ c im Integrationsberich zur Verfügung stehen. Dann folgt sofort $\int_a^b dtc = c\int_a^b dt1 = ct|_a^b = c(b-a)$

$$\int_a^b dt\, f(t) \geq 0 \quad bzw. \quad \int_a^b dt\, f(t) \leq [ct]_a^b = c(b-a).$$

(12.1.40) Stets gilt $f(x) \leq |f(x)|$ und ebenso $-f(x) \leq |f(x)|$. Integration dieser beiden Ungleichungen ergibt die folgende vielfach nützliche Ungleichung:

$$\boxed{\left|\int_a^b dt\, f(t)\right| \leq \int_a^b dt\ |f(t)|\,.}$$

(12.1.41) Aber achten Sie bei Anwenden der Monotonie immer darauf, dass tatsächlich a<b gilt.
☐ Was geschieht bei a>b?

*Abschließend führen wir noch **zwei andere Schreibweisen des Hauptsatzes** ein, die manchmal nützlich und vielfach gebräuchlich sind.*

(12.1.42) Es sei f eine zwischen a und b differenzierbare Funktion mit Ableitung f′. Dann ist f eine Stammfunktion von f′. Der Hauptsatz gibt folgende Formeln:

$$\boxed{\int_a^x \mathrm{dt}\, \mathrm{f}'(\mathrm{t})=\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{a}) \text{ oder } \int_a^x \mathrm{dt}\, \tfrac{d}{dt}\mathrm{f}(\mathrm{t})=\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{a})}$$

Beide Formeln zeigen, in welchem Sinne die Integration die Umkehrung der Ableitung ist.
(..43) Aber auch die umgekehrte Reihenfolge liefert eine wichtige Formel. Umgekehrte Reihenfolge sagt: *Erst Integrieren, dann Differenzieren.* Sei dazu F eine Stammfunktion von f. Dann gilt $\int_a^x dt\, f(t) = F(x) - F(a)$. Wir differenzieren beide Seiten nach x und finden:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dt\, f(t) = f(x).$$

Die Ableitung eines Integrales nach der oberen Grenze ergibt den Integranden!

☐ Konkretisieren Sie diese Schreibweisen für das Beispiel $f(t)=t^3$ und a=-1.
☐ Was ist $\frac{d}{dx}\int_x^b dt\ f(t)$?
☐ Was ist $\int_a^x dt \int_b^t ds\ f(s)$? Etwa $\int_0^x dt \int_1^t ds s^2$?

Anwendungsbeispiel der Monotonie:
$\boxed{I=\int_0^1 dx e^{-x^2}}$???? Läßt sich beweisbar nicht analytisch berechnen! Aber man hat die Ungleichung:

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{-x^2} \leq 1 \\ 0 &\leq I \leq 1 \end{aligned}$$

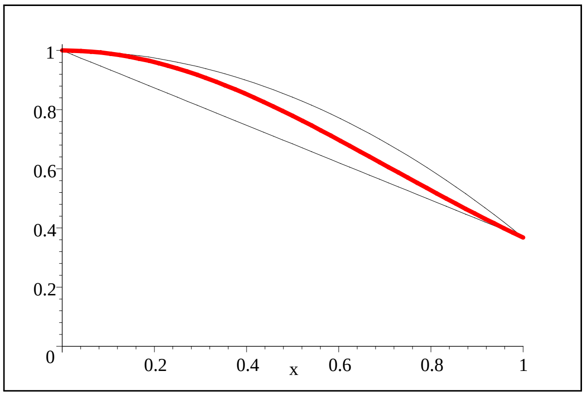
Das kann man durch die folgende Ungleichungskette verbessern:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \boxed{1+(e^{-1}-1)x \leq e^{-x^2} \leq 1+(e^{-1}-1)x^2} \leq 1 \\ 1+\frac{e^{-1}-1}{2} &\leq I \leq 1+\frac{e^{-1}-1}{3} \\ e^{-u} &\leq 1+(e^{-1}-1)u \end{aligned}$$

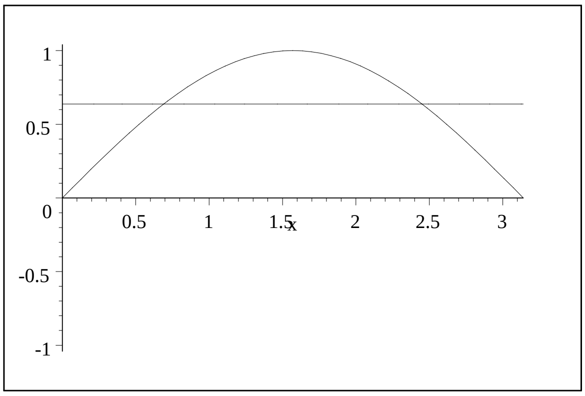
Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} 1+\frac{e^{-1}-1}{2} &\leq I \leq 1+\frac{e^{-1}-1}{3} \\ 0.68 &\leq I \leq 0.79 \quad \text{numerisch!} \end{aligned}$$

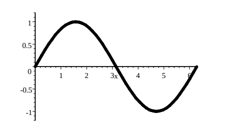
Graphische Darstellung der Integrandenungleichung



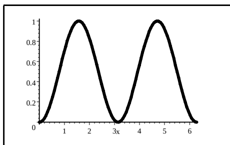
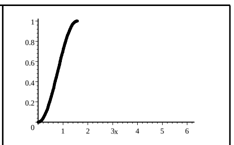
Berechnung und Schätzung eines Mittelwertes:$\sin(x)$ $\frac{2}{\pi}$



12.3.1a **Konsequenzen von Symmetrien**

$\boxed{\int_0^{2\pi} dx \sin(x) = 0}$	
Folgt über die Mittelwertinterpretation (12.2.3)	$\int_{-2}^{2} dx \ \mathrm{x}^3 = 0$

(12.3.3) Vielfach ist die Additivität (12.1.33) nützlich.

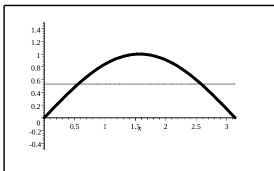
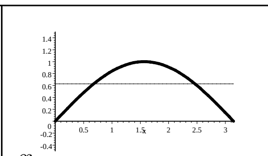
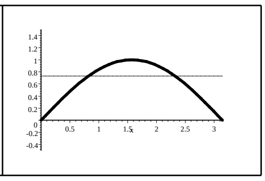
	
$\int_0^{2\pi} dx \sin^2 x =$	$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^2 x.$

☐ Vereinfachen oder berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften:

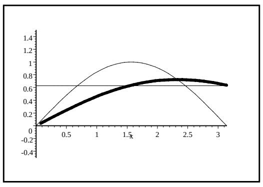
$\int_{-2}^{2} dx\, x^4$	$\int_{-2}^{2} dx\, x^5$	$\int_{-1}^{1} dx\, (2x^2 - x^3)$	$\int_{-1}^{1} dx\, \frac{x}{1+x^2}$

☐ Berechnen sie $\int_0^A dx\, x$ und $\int_A^B dx\, x$ mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft.

12.3.1b **Abschätzungen**

	 x	

Als Ergänzung noch die zugehörige Mittelwertfunktion:



12.3.1c **Einheitenkontrolle**

!!Kurz: **dx erhält dieselbe Dimension wie x.**

(12.3.7) Hat man keine Einheit zur Verfügung, dann kann man den Termen u.U. willkürlich eine solche zuordnen. Dabei muss man manchmal künstlich äußere Parameter in den Integranden einführen.

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \qquad \text{wird ersetzt durch} \qquad \int_{2h}^{5h} \frac{dx}{x^2+h^2}$$

Jetzt kann man x und h eine gemeinsame Einheit, etwa m, zuordnen. Das Integral hat dann die Einheit m^{-1}.

?

$\frac{1}{a}e^{-aT}$	$\frac{1}{a}e^{-at}-1$	$\mathrm{T}(\mathrm{e}^{-aT}-1)$	$\mathrm{Te}^{-a}+a$

12.3.2 **Direkte Integration**

12.3.2a **Kenntnis einer Stammfunktion**

Gewisse Stammfunktionen sollte man auswendig wissen.

(12.3.9) Die Liste der wichtigsten Stammfunktionen

f(x)	$\mathrm{x}^a, a \neq -1$	$\frac{1}{x}$	cosx	sinx	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
F(x)	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	sinx	-cosx	e^x	atn(x)	asn(x)

Einige Bemerkungen zu dieser Liste:

- Stammfunktion zu x^{-3} ist $-\frac{1}{2}x^{-2}$. Vielfach findet man stattdessen fehlerhaft die Potenz x^{-4}. Bei negativem a verkleinert sich der Absolutwert. (Daher die Stammfunktion zur Probe möglichst differenzieren!)
- Ein anderes wichtiges Beispiel: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dx x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
- 1/x ist eine ungerade Funktion. Dann gibt es dazu eine gerade Stammfunktion und das ist $\ln|x|$ .Man sollte die Betragsstriche immer erst fortlassen, wenn man sich vergewissert hat, dass im Integrationsbereich nur positive Werte vorkommen. Etwa $\ln\left|1+x^2\right| = \ln(1+x^2)$. Über Null darf hier nie integriert werden.
- Denken sie an das Minuszeichen bei $\int dx \sin x = -\cos x$.
- $\int dx \frac{1}{1+x^2} = atn(x)$ ist eine sehr nützliche und vielfach benötigte Stammfunktion.

Kontrollmethode:

Eine gewonnene Stammfunktion sollte zur Kontrolle differenziert werden.

☐ Sie suchen eine Stammfunktion von $\mathrm{x}^{-\frac{7}{2}}$. Sie raten "Faktor$\times x^{-\frac{5}{2}}$". Bestimmen Sie den Faktor über eine Ableitungsprobe. Jemand anders gibt $\frac{2}{9}x^{-\frac{9}{2}}$ an. Wieso ist das falsch?

12.3.2b **Die " 1/α-Regel"**

Mit Hilfe geeigneter Verfahren lässt sich aus der Liste bekannter (=gewußter) Stammfunktionen eine Vielzahl weiterer Stammfunktionen gewinnen. Man muss jeweils nur erkennen, wahrnehmen, dass der Integrand eine bestimmte Struktur besitzt.

	Die "$1/\alpha$-Regel"
$\Rightarrow$	Gesucht wird eine Stammfunktion für $x \mapsto f(\alpha x+\beta)$ mit $\alpha \neq 0$. Man kenne eine Stammfunktion $y \mapsto F(y)$ zu $y \mapsto f(y)$.
!!	**Dann ist** $x \mapsto \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$ eine Stammfunktion der gesuchten Zuordnung.
	Als Formel: $\int dx f(\alpha x+\beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$.

Der Beweis folgt sofort durch Ableiten. Als Verlaufsdiagramm:

$x \mapsto$	$\alpha x+\beta$		$\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$	$\int dx f(\alpha x+\beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$
	y	$\mapsto$	$\frac{1}{\alpha}F(y)$	
α		$\frac{1}{\alpha}F'(y)$		

(12.3.12) Die $1/\alpha$-Regel ist ausgesprochen nützlich, da sie in einer Vielzahl von Fällen eine sehr effiziente Integration erlaubt. Bemerkt man die angegebene Struktur, dann schreibt man den Faktor $\frac{1}{\alpha}$ hin und dazu die bekannte Stammfunktion mit dem neuen Argument! Wir illustrieren das Vorgehen an einer Reihe von Beispielen.

(12.3.13) $\boxed{I_1 = \int_0^1 dx(3-2x)^7.}$ Hier ist $\alpha = -2$. Es folgt $I_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left[(3-2x)^8\right]_0^! = \frac{1}{16}(3^8-1)$.

(12.3.14) $\boxed{\mathbf{I}_2 = \int_0^3 \frac{dx}{5+x}} = [\ln|5+x|]_0^5 = \ldots$ Hier ist $\alpha = 1$.

$\boxed{\mathbf{I}_2 = \int_6^{10} \frac{dx}{5-x}} = -[\ln|5-x|]_6^{10} = -(\ln(5)-\ln(1)) = -\ln(5) = -1.6$.

12.3.2c **Die Umkehrung der Kettenregel**

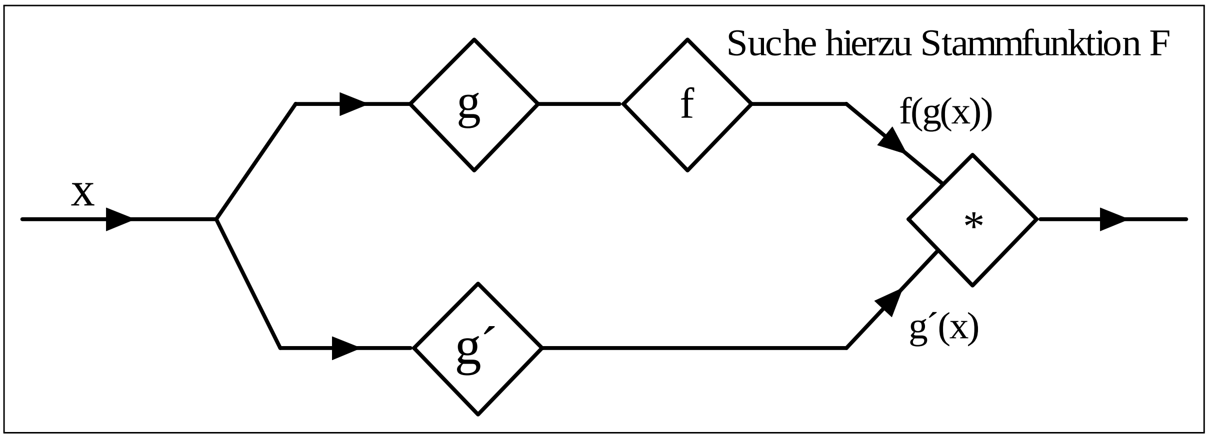
Das gibt folgende Integrationsregel

	Die **Umkehrung der Kettenregel**
$\Rightarrow$	Der Integrand haben die Form $g'(x)f(g(x))$
$\Rightarrow$	Weiter sei F(y) Stammfunktion zu f(y).
!!!	**Dann** ist F(g(x)) Stamfunktion zu $g'(x)f(g(x)$
	$\int dx\ g'(x)f(g(x)) = F(g(x))$.

Oder auch (vgl. (12.1.42)):

$$\boxed{\int_a^b dx g'(x)f(g(x)) = \int_a^b dx \frac{d}{dx}F(g(x)) = F(g(x))\Big|_a^b.}$$

Wieder liegt eine Ausweitung der direkten Integration vor. Hat der Integrand die gegebene Struktur, die man sich am besten als Verlaufsdiagramm einprägt, dann benötigt man nur eine Stammfunktion F zu f.



Beispiele:

$K_1 = \int_{-1}^{2} dt(2-11t)^5$

$K_2 = \int_{-1}^{2} dt \cdot t \cdot (2-2t^2)^5) = \frac{1}{-4}\int_{-1}^{2} dt(-4t)(2-2t^2)^5$
$= -\frac{1}{4}\frac{1}{6}(2-2t^2)^6|_{-1}^{2} = ...$

$$\begin{array}{|cccccc|}
 & & -4t & \rightarrow & & \searrow \\
x \rightarrow & \overset{\nearrow}{\rightarrow} & 2-2t^2 = y & f(y) = y^5 & & \rightarrow * \rightarrow \\
 & & & \boxed{\frac{1}{6}y^6}\ ??? & & \boxed{\frac{1}{6}(2\text{-}2t^2)^6}
\end{array}$$

$K_3 = \int_{-1}^{2} dt \cdot (2t+3) \cdot (2-2(t^2+3t+5))^5$

$$\begin{array}{|cccccc|}
 & & -2(2t+3) & \rightarrow & & \searrow \\
x \rightarrow & \overset{\nearrow}{\rightarrow} & 2-2(t^2+3t+5) = y & f(y) = y^5 & & \rightarrow * \rightarrow \\
 & & & \boxed{\mathrm{F(y)}}\ ??? & &
\end{array}$$

$K_4 = \int_0^1 dx x\sqrt{3+4x^2} = \frac{1}{8}\int_0^1 dx(8x)(3+4x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}(3+4x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = ..$
$K_5 = \int_0^{\pi} dt \cos(\omega t)\sin(\sin(\omega t)) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\pi} dt\,(\omega\cos(\omega t))\sin(\sin(\omega t))$
$=-\frac{1}{\omega}\cos(\sin(\omega t))$
$K_6 = \int_0^{\pi} d\alpha \frac{t\sin(\alpha t)}{4+t\cos^2(\alpha t)}$
$\int dx x\sin(x^2) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$
$\int dx x e^{-x^2} = -\frac{1}{2}\int dx(-2x)e^{-x^2} = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$

$$\begin{array}{|cccccc|}
 & & -t\sin(\alpha t) & \rightarrow & & \searrow \\
x \rightarrow & \overset{\nearrow}{\rightarrow} & \cos(\alpha t) = y & f(y) = \frac{1}{4+ty^2} & & \rightarrow * \rightarrow \\
 & & & \boxed{\frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{t}}\arctan\frac{y\sqrt{t}}{2}}\ ??? & &
\end{array}$$

$K_7 = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 2\int_0^A dx\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 4(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}|_0^A = ..$
$K_8 = \int_0^1 dx x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx(-2x)\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1$

$\int dx\frac{e^x}{(1+17e^{2x})} = \frac{1}{\sqrt{17}}\int dx\frac{\sqrt{17}e^x}{1+\left(\sqrt{17}e^x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{17}}atn(\sqrt{17}e^x)$
$\frac{1}{19}\int dx\frac{19e^x}{(17+19e^x)^{21}} = -\frac{1}{19}\frac{1}{20}\frac{1}{(17+19e^x)^{20}}$

$\int dt\frac{t}{2+3t^2} = \frac{1}{6}\int dt 6t\frac{1}{2+3t^2} = \frac{1}{6}\ln|2+3t^2| = \frac{1}{6}\ln(2+3t^2)$

$\int dy\frac{f'()}{f(y)} = \int dy f'(y)\cdot\frac{1}{f(y)} = \ln|f(y)|$
$\int dx\tan x = -\int dx\frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln(\cos x)$

10..10.

$\int_0^A \frac{da}{1+a^2} = ...$ $\quad \int_0^A \frac{dx}{1+a^2x^2} = ...$ $\quad \int_0^A \frac{du}{1+x^2u} = ...$ $\quad \int_0^A \frac{dxe^x}{1+ae^{2x}} = ...$ $\int_0^A \frac{dxx^3}{(2+ax^4)^5} = ...$

Schätze grob ab $\boxed{\mathrm{I}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin x \leq 1$ (in I) d.h. $\boxed{..?... \leq \frac{1}{\sin x} \leq ...?}$ Die zweite Ungleichung noch durch eine Gerade verbessern: $\frac{1}{\sin(x)} \leq y_1 + m(x - x_1)$ für $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Versagen die bisherigen Methoden, sollte / kann man die nächste Methode versuchen. Stichwortartige Bezeichnung:

"Umformung des Rechenausdrucks"

$$\int dt \sin^3 t = \int dt \sin t \cdot \sin^2 t = -\int dt(-\sin t)(1 - \cos^2 t) = ...$$

Fortführung des letzten Beispiels von gestern:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{dx \sin x}{\sin^2 x} = \int dx \frac{dx \sin x}{1 - \cos^2 x} .....U.K$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1-y^2} &= \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = \int \frac{dy}{2} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln|1-y| + \ln|1+y| \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|$$

Heute intensiv geübt: Eine Regel zuerst allgemein verstehen und dann anschließend die Beispiele sofort können. Also nicht erst über die Beispiele lernen. Einerseit war zu sehen, wie schwer das fällt, andererseits sieht man deutlich den Effekt des Kurses. Das geht jetzt schon ganz gut und wichtiger: Das Provblem wird verstanden.

12.3.4c **Die Partialbruchzerlegung**

(12.3.32) Das zugehörige Einstiegsbeispiel bestand in der folgenden Umschreibung eines Rechenausdrucks, deren Gültigkeit man sofort durch Hauptnennerbildung der rechten Seite bestätigt:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right).$$

Dabei muss aber $a \neq b$ gelten. Für $a = -b \neq 0$ erhält man folgenden nützlichen Spezialfall:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

(Im Kopf unbedingt rechts Hauptenner bilden!)
(12.3.33) Für die linke Seite kennen wir bisher keine Stammfunktion. Für die rechte dagegen kann man leicht eine angeben. Die zweite Gleichung (a=-b) beispielsweise gibt

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

□ $\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = ...$
(12.3.34) Es erhebt sich die Frage nach der Verallgemeinerbarkeit des Resultates und nach einer Methode, derartige Umformungen des Rechenausdrucks systematisch zu finden.

? Sachlich geht es dabei immer darum, **das Verfahren der Hauptnennerbildung umzukehren**. Von rechts nach links gesehen, hat man es mit einer Hauptnennerbildung zu tun. Aber wie kommt man vom Ergebnis zu den einzelnen Summanden, den *Partialbrüchen*?
(12.3.35) Zunächst kann man mit dem obigen Beispiel etwas herumspielen und versuchen, es zu verallgemeinern. Dabei wird man jeweils mit der rechten Seite starten und dann die linke durch Hauptnennerbildung bestimmen. Man kann so untersuchen, welche linken Seiten man überhaupt erhält. Ein Beispiel:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} = \frac{(A_1 + A_2)x - A_1 b - A_2 a}{(x-a)(x-b)} = \frac{Bx + C}{(x-a)(x-b)}$$

mit naheliegenden Hilfsgrößen B und C.
□ Zeigen Sie: Gibt man B und C als äußere Parameter vor, dann gibt es dazu immer genau ein Paar A_1, A_2,das obige Gleichung erfüllt, sofern a$\neq b$. D.h.: Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (a,b,B und C äußere Parameter)

$$\boxed{A_1 + A_2 = B} \boxed{bA_1 + aA_2 = -C}.$$

Zeigen Sie, dass es für $a \neq b$ immer eindeutig lösbar ist! Das bedeutet: Gibt man die rechte Seite vor, kann man die linke angeben und dann auch integrieren.

Durch Überlegungen dieser Art kommt man ziemlich leicht zu korrekten Vermutungen über die Ausdrücke die man mit Partialbruchzerlegung behandeln kann. **Aber man sollte nicht versuchen, daraus einen Beweis zu entwickeln.** Ebensowenig sollte man versuchen, die benötigten Koeffiziente A_1 und A_2 auf diese Weise zu bestimmen, wie es leider vielfach geschieht. (Wir verzichten hier darauf, zu beweisen, dass die Partialbruchzerlegung immer existiert. Dieser Beweis lässt sich relativ leicht führen, wenn man unser Konstruktionsverfahren durch einige einfache Rsultate der Analysis ergänzt.)

> *Wir geben nachfolgend ein effizientes Rechenschema zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung und kommentieren es anschließend. In der Literatur findet man meist Verfahren, die weitaus aufwendiger sind.*

(12.3.36) Das Partialbruchschema
■ **Das Ausgangsszenenbild:**

- Gegeben eine rationale Funktion $\boxed{\mathrm{r}(\mathrm{x})=\frac{P(x)}{q(x)}}$, für die eine Stammfunktion gesucht wird.
- Durch $\boxed{\text{Polynomdivision}}$ kann man erreichen, dass der Zählergrad kleiner als der Nennergrad wird. D.h. man kann ein Polynom A(x) abspalten mit

$$r(x) = A(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei p jetzt einen kleineren Grad als q hat. Vielfach gelingt das bereits durch geschicktes Umschreiben des Nenners.

■ **Die Bestimmung der Partialbruchzerlegung:** (⇒Der Grad von p sei kleiner als der von q.=n Die Bestimmung erfolgt nun in drei Schritten, die wir *Faktorisierung, Ansatz und Koeffizientenbestimmung* nennen.

- **Faktorisierung des Nenners:** Der Nenner q(x) ist reell zu faktorisieren! Reelle Nullstellen treten als Faktoren (x-a) auf und komplexe paarweise als Faktoren $\boxed{((x-u)^2+v^2)=(x-(u+iv))(x-(u-iv))}$. Gleiche Faktoren sind zusammenzufassen zu einem einzigen Faktor (x-a)^k bzw. $((x-u)^2+v^2)^\ell$. Dass sich das Polynom stets so faktorisieren lässt, werden wir später begründen. Praktisch ist diese Faktorisierung teilweise schwierig herzustellen.
- Beispiel: $1+x^4=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)=...$
- Ist q auf diese Weise faktorisiert, kann man den **Partialbruchansatz** (mit noch zu bestimmenden Koeffizienten) machen. Dieser sollte wie folgt aussehen:
  - Zu jedem Faktor (x-a)^k des Nenners q(x) ist ein Summand hinzuschreiben, der für die ersten k wie folgt aussieht:

$(x-a)^1$	$(x-a)^2$	$(x-a)^3$	usw.
$\frac{A_0}{x-a}$	$\frac{A_0+A_1(x-a)}{(x-a)^2}$	$\frac{A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2}{(x-a)^3}$	usw.

  - Entsprechend ist zu jedem Faktor $((x-u)^2+v^2)^\ell$ ein Summand hinzuschreiben, der für die ersten ℓ wie folgt anzusetzen ist:

$((x-u)^2+v^2)^1$	$((x-u)^2+v^2)^2$	usw.	
$\frac{A_0(x-u)+B_0}{((x-u)^2+v^2)}$	$\frac{[A_0(x-u)+B_0)]+[A_1(x-u)+B_1]((x-u)^2+v^2)}{((x-u)^2+v^2)^2}$		

  Die Bildung der Summanden ist gut zu merken, wenn man die folgenden Sachverhalte beachtet:
  - ∗ Der Zählergrad ist immer um Eins geringer als der Nennergrad,
  - ∗ Die Variable x sollte auch im Zähler immer in der Kombination x-a bzw. x-u auftreten, wie sie vom Nennerfaktor vorgegeben wird.
  - ∗ Ansatzbruch zerlegen. Etwa: $\frac{A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2}{(x-a)^3}=\frac{A_0}{(x-a)^3}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{A_2}{(x-a)^1}$. Die rechte Seite ist besser zu merken. Rechne mit linker Seite!
- **Die Koeffizientenbestimmung.** Hierzu geht man wie folgt vor:
  - Für jedes Nennerprodukt $(x-a)^k$ multipliziere man beide Seiten der Ansatzgleichung mit (x-a)^k und kürze soweit möglich. Das ergibt eine Gleichung G$_a$. Dann setze man in G$_a$für x den Wert a ein! Das gibt sofort den Koeffizienten A$_0$. Ist k=1, so ist der zugehörige Partialbruch bestimmt.
  - Ist k≥1 differenziere man G$_a$ nach x und setze **dann** für x den Wert a ein. Das gibt A$_1$.
  - Usw.
  - Für jeden Nennerfaktor $((x-u)^2+v^2)^\ell$ multipliziere man mit $((x-u)^2+v^2)^\ell$ und kürze soweit möglich. Das gibt eine Gleichung G$_{uv}$. In diese setze man für x die komplexe Nullstelle $x_0=u+iv$ ein. Es entsteht eine Gleichung zwischen komplexen Zahlen, aus der man A$_0$ **und** B$_0$ abliest.
  - Ist $\ell>1$, ist G$_{uv}$ nach x zu differenzieren und dann für x die Nullstelle u+iv einsetzen.
  - Usw.

■ **Die Integration**:
(12.3.37) Am Ende ist die gesamte Partialbruchzerlegung bestimmt. Alle Summanden lassen sich einzeln integrieren, d.h. wir kennen eine zugehörige Stammfunktion. Dabei ist es besonders vorteilhaft, dass x immer als x-a bzw. x-u vorkommt, also als innere Ableitung der Nennerpotenzen. Die Integrierbarkeit aller Beiträge, die im Fall komplexer Nullstellen auftreten, werden wir mit Hilfe der Methode der Ableitung nach einem Parameter zeigen. Für die Terme, die bei mehrfachen komplexen Nullstellen ($\ell>1$) auftreten, können wir bisher noch kein Stammfunktion angeben.

(12.3.38) Damit ist natürlich nicht bewiesen, dass dies Verfahren immer funktioniert. Die Bedingung für das Funktionieren ist, dass **alle gleichen Nullstellen zusammengefasst** sind. Sind alle Nullstellen einfach, so ist die Bestimmung der Koeffizienten offensichtlich besonders leicht, sie können meist im Kopf berechnet werden. Auf den Beweis dieser Ausssagen gehen wir hier nicht ein. Die zweite Lücke liegt im Bereich der Faktorisierung des Nenners: Kann man eventuelle komplexe Nullstellen immer in der angegebenen Weise zusammenfassen? Wir werden das unten in einer Ergänzung zeigen.

Beispiele:

(12.3.38) Wir gehen einige Beispiele zunehmender Komplexität durch. Wir setzen die Beispiele etwas allgemeiner an, als üblich, indem wir für den Zähler vielfach allgemeine Polynome (zulässigen Grades) wählen. Generell sei nachfolgend $\mathrm{p}_k(x)$ immer ein Polynom vom Grade k.

(12.3.39) Meist schreiben wir nacheinander die zu zerlegende rationale Funktion, den Ansatz und dann das Resultat hin. Der Nenner sei von vornherein faktorisiert. Großbuchstaben bezeichnen zu bestimmende Koeffizienten des Ansatzes. Kleine Buchstaben vom Anfang des Alphabets sind äußere Parameter. Vergleichen Sie immer mit den Schritten des allgemeinen Schemas!

(12.3.40) Beispiel 1: *Zwei einfache reelle Nullstellen.* Der Ansatz:

$$\boxed{\frac{p_1(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{p_1(a)}{x-a}-\frac{p_1(b)}{x-b}\right).}$$

Wie erhält man etwa A? Also den Ausdruck rechts? Multiplikation (der Gleichung links) mit x-a gibt die Gleichung

$$\frac{p_1(x)}{x-b}=A+(x-a)\frac{p_1(x)}{x-b}.$$

Setzt man hierin x=a, so folgt A zu A=$\frac{p_1(a)}{a-b}$ wie angegeben. Beachten Sie: Der zweite Summand rechts gibt für x=a Null! Multipliziert man mit x-b und setzt dann x=b, so folgt entsprechend B. Die Rechnung lässt sich problemlos im Kopf oder einem Hilfszettel ausführen.

Inspektion des Resultates:

1. a=b gibt für A und B Probleme. Die Nullstellen müssen verschieden sein.
2. Vertauscht man links a und b, so ändert sich die Ausgangsfunktion nicht. Dasselbe ist rechts der Fall, da sich zwei Vorzeichen kompensieren. Üblicherweise wählt man a>b.
3. Die Einheit von A und B ist die von 1/x mal der von p(x).
4. b+a=0 gibt den Nenner x^2-a^2.

(12.3.41) Beispiel 2: *Eine einfache und eine doppelte Nullstelle.* Die erste Zeile enthält den Ansatz.

$$\begin{aligned}\frac{p_2(x)}{(x-a)(x-b)^2} &= \frac{A}{x-a}+\frac{B_1(x-b)+B_2}{(x-b)^2}\\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{p_2(a)}{x-a}-\frac{p_2(b)-p_2'(b)(b-a)}{x-b}+\frac{p_2(b)(b-a)}{(x-b)^2}\right).\end{aligned}$$

A und B_2 erhält man erneut unmittelbar und problemlos wie in (12.3.40). B_2 liefert den dritten angegebenen Partialbruch. B_1 folgt, indem man nach Multiplikation mit $(\text{x-b})^2$ nach x differenziert. Auszuführen ist das **nur** für die linke Seite der entstehenden Gleichung:

$$\frac{p_2(x)}{x-a}=(x-b)^2\cdot\frac{A}{x-a}+B_1(x-b)+B_2.$$

Leitet man den ersten Summanden rechts nach der Produktregel ab, bleibt immer noch mindestens ein Faktor (x-b), der diesen Beitrag beim nächsten Schritt zum Verschwinden bringt. B_2verschwindet beim Ableiten und aus $\mathrm{B}_1(x-b)$ wird B_1.**Und das bleibt stehen, wenn man x=b setzt.** Also

$$\frac{p_2'(x)(x-a)-p_2(x)\cdot 1}{(x-a)^2}=(x-b)\,[..]+B_1.$$

Jetzt folgt für x=b der Koeffizient B_1 wie angegeben.
Inspektion des Resultates:

1. a=b geht nicht. Einheitenkontrolle ist stimmig.

2. $p_2(x) = x - b$. Das gibt für die linke Seite das erste Beispiel. Damit wird $p_2(b) = 0$. Auch rechts steht somit das alte Resultat.

(12.3.42) Beispiel 3: *Zwei doppelte reelle Nullstellen.* Das gibt:

$$\begin{aligned} \frac{p_3(x)}{(x-a)^2(x-b)^2} &= \frac{A_1(x-a)+A_0}{(x-a)^2} + \frac{B_1(x-b)+B_0}{(x-b)^2} \\ &= \frac{1}{(b-a)^3}\{\frac{2p_3(a)+p_3'(a)(b-a)}{(x-a)} + \frac{p_3(a)(b-a)}{(x-a)^2} + \\ &\quad + \frac{-2p_3(b)+p_3'(b)(b-a)}{x-b} + \frac{p_3(b)(b-a)}{(x-b)^2}\} \end{aligned}$$

Beachten Sie, auf welche Weise auf der rechten Seite die Symmetrie beim Vertauschen von a und b gesichert wird.

(12.3.43) Beispiel 4: *Eine reelle Nullstelle und ein Paar komplexer.*
Also:

$$\frac{p_2(x)}{(x-a)((x-u)^2+v^2)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1(x-u)+B_0}{(x-u)^2+v^2}$$

A folgt wie üblich. Für B_1 und B_0 gibt das Verfahren die folgende Gleichung, wobei für x bereits die Nullstelle u+iv eingesetzt ist:

$$\frac{p_2(u+iv)}{u+iv-a} = B_1(iv) + B_0.$$

Wir nehmen an, dass p_2 reelles Polynom ist (keine komplexen Koeffizienten!). Dann ist $p_2(u+iv)=p_r + ip_i$ mit $p_r = \frac{1}{2}(p_2(u+iv) + \bar{p}_2(u+iv))$ und $p_i = \frac{1}{2i}(p_2(u+iv) - \bar{p}_2(u+iv))$.
Dann folgt nach (6.3.41):

$$\frac{p_2(u+iv)}{u+iv-a} = \frac{(p_r+ip_i)((u-a)-iv)}{(u-a)^2+v^2} = \frac{p_r(u-a)+p_iv}{(u-a)^2+v^2} + i\frac{p_i(u-a)-p_rv}{(u-a)^2+v^2}$$

Also:

$$A=\frac{p_2(a)}{(a-u)^2+v^2} \qquad B_0 = \frac{p_r(u-a)-p_iv}{(u-a)^2+v^2} \qquad B_1 = \frac{1}{v}\frac{p_i(u-a)+p_rv}{(u-a)^2+v^2} \quad .$$

Jeder der entstehende Partialbrüche ist direkt integrabel.

(6.3.44) Beispiel 5: *Zwei Paare komplexer Nullstellen.*
Hier betrachten wir $r(x)=\frac{1}{x^4+1}$. Wir bestimmen die vier komplexen Nullstellen $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{4}k\right)}$ von x^4+1 (vgl. (6.3.42)) und multiplizieren die beiden Paare zueinander konjugiert komplexer Linearfaktoren aus. Das gibt folgende Faktorisierung, die wir auch leicht direkt verifizieren können:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}.$$

Das führt uns zu dem Partialbruchansatz

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{A_1(x+\frac{1}{\sqrt{2}})+A_0}{((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})} + \frac{B_1(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+B_0}{((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}$$

Jetzt läuft das Schema wie üblich weiter. Für x= $-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt

$$\frac{1}{(-\sqrt{2}+\frac{i}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} = A_1(\frac{i}{\sqrt{2}})+A_0.$$

Und das gibt:

$$A_0 = \frac{1}{4} \quad . \ \mathrm{A}_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Entsprechend folgt:

$$B_0 = \frac{1}{4} \ . \ \mathrm{B}_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Insgesamt folgt die gesuchte Partialbruchzerlegung:

$$\boxed{\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}(x+\frac{1}{\sqrt{2}})+1}{((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4}\frac{-\sqrt{2}(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+1}{((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}}$$

Die rechte Seite lässt sich problemlos mit Umkehrung Kettenregel integrieren!
(6.3.45) Natürlich kann und muss man die Parialbruchmethode auch mit anderen Integrationsmethoden kombinieren. Im nächsten Beispiel kombinieren wir sie mit der Umkehrung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dx \sin x \cos x}{4-e^2\cos^2 x} &= -\frac{1}{2e}\int_0^\pi dx(-\sin x)\left(\frac{1}{2-e\cos x}-\frac{1}{2+e\cos x}\right)\\ &= -\frac{1}{2e}\left[-\ln|2-e\cos x|-\ln|2+e\cos x|\right]_0^\pi = ...\end{aligned}$$

(6.3.46) Zuletzt noch ein Beispiel mit mehrfacher komplexer Nullstelle

$$\begin{aligned}\int\frac{du}{(u^4-1)^2} &= \int\frac{du}{(u^2+1)^2(u+1)^2(u-1)^2}\\ &= \frac{1}{16}\frac{1+3(u+1)}{(u+1)^2}+\frac{1}{16}\frac{1-3(u-1)}{(u-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1+(u^2+1)}{(u^2+1)^2}\end{aligned}$$

Der Rechenweg sollte klar sei. Aber im dritten Summanden ist der Term $\frac{1}{(u^2+1)^2}$ enthalten, für den wir noch keine Stammfunktion kennen.

Zusätzliches gerechnetes Beispiel:
Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x^2+a^2)^2} = \frac{A_0+A_1x}{x^2}+\frac{B_0+B_1x+[C_0+C_1x](x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

Multiplizieren mit (x$^2+a^2)^2$ gibt (*)

$$\frac{1}{x^2} = (x^2+a^2)^2(..)+B_0+B_1x+[C_0+C_1x](x^2+a^2)$$

x=ia setzen:

$$\frac{1}{-a^2} = 0+B_0+B_1ia+0 \qquad \boxed{\mathrm{B}_1=0 \quad \mathrm{B}_0=-\frac{1}{a^2}}$$

(*) nach x ableiten:

$$-2\frac{1}{x^3} = (x^2+a^2)(...) + B_1 + (C_1)(x^2+a^2) + (C_0 + C_1 x)(2x)$$

x=ia setzen:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{-ia^3} &= (C_0 + C_1 ia)(2ia) \\ C_0 + C_1 ia &= -\frac{1}{a^4} \qquad \boxed{C_0 = -\frac{1}{a^4} \qquad C_1 = 0} \end{aligned}$$

Mit x^2multiplizieren gibt (**)

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^2} = A_0 + A_1 x + ...$$

x=0 setzen: $\boxed{A_0 = \frac{1}{a^4}}$

(**) Ableiten und dann x=0 setzen:

$$\begin{aligned} \frac{-4x}{(x^2+a^2)^3} &= A_1 + x \cdot ()\, ... \\ & \boxed{A_1 = 0} \end{aligned}$$

Alle 6 Koeffizienten sind bestimmt!

$A_0 = \frac{1}{a^4}$ $A_1 = 0$ $B_0 = -\frac{1}{a^2}$ $B_1 = 0$ $C_1 = 0$ $C_0 = -\frac{1}{a^4}$

Ergebnis :

$$\frac{1}{x^2(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{x^2 a^4} + \frac{-\frac{1}{a^2} + \left[-\frac{1}{a^4}\right](x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{a^4 x^2} - \frac{1}{a^2(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^4(x^2+a^2)} = \frac{1}{x^2(x^2+a^2)^2}}$$

(12.3.47) Wir abstrahieren aus unseren Beispielen jetzt eine weitere wichtige und leider vielfach zu wenig beachtete **Kontrollmethode:**

> Suche nach einem Spezialfall - etwa einem speziellem Wert eines äußeren Parameters - für den man das Integral kennt oder relativ leicht unabhängig berechnen kann.
> **Stimmt das eigene Resultat für diesen Spezialfall?**

12.3.4e **Partielle Integration**

Bei der Inspektion des Integranden in Hinblick auf Integrierbarkeit ist es wichtig, das Vorhandensein von Faktoren bestimmter Art wahrzunehmen. Über einen passenden Faktor erkennt man die Anwendbarkeit der Methode der Umkehrung der Kettenregel. Vielfach findet man aber auch störende, nicht passende Faktoren vor. Man könnte integrieren, wenn ein bestimmter Faktor nicht vorhanden wäre. Beispiele:

$$\int dx\, x \sin(x) \qquad \int dt\, t^3 e^{-t^2} \qquad \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \quad .$$

Im ersten Fall stört der Faktor x, im zweiten ein t^2 und im dritten das äußere Quadrat. Wir werden zwei Methoden entwickeln, die Faktoren beseitigen oder zumindest abändern.

(12.3.49) Die erste, jetzt zu besprechende Methode entsteht durch Integration der Produktregel. Integration dieser Ableitungsregel gibt:

$$\begin{aligned} (uv)'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ [u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b dx\ u'(x)v(x) + \int_a^b dx\ u(x)v'(x) \end{aligned}$$

Dabei haben wir links den Hauptsatz angewandt. Durch Umstellen erhält man

$$\boxed{\int_a^b dx\ u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b dx\ u'(x)v(x).}$$

Im Rahmen unserer Problematik ist das so zu interpretieren:

> Der Integrand besteht aus zwei Faktoren. Den "störenden" bezeichnen wir mit u(x). Dann ist das Integral gleich der rechten Seite, auf der noch eine Integration durchzuführen ist, aber im Integranden ist u(x) durch $u'(x)$ ersetzt. Der zweite Faktor ist allerdings auch abgeändert, durch eine Stammfunktion ersetzt.

Im ersten Beitrag ist nur der zweite Faktor durch eine Stammfunktion zu ersetzen, die dann im nachfolgenden Integral wieder auftaucht. Beachten Sie auch das Minus vor dem Integral.
(12.3.50) Unser erstes Beispiel aus der Einführung lässt sich mit diesem Verfahren unmittelbar rechnen:

$$\begin{aligned} \int_a^b dt \cdot t \cdot \sin(wt) &= \left[t \cdot \frac{(-1)}{w}\cos(wt)\right]_a^b - \int_a^b dt \cdot 1 \cdot \frac{-1}{w}\cos(wt) \\ &= \left[t \cdot \frac{(-1)}{w}\cos(wt)\right]_a^b + \left[\frac{1}{w^2}\sin(wt)\right]_a^b. \end{aligned}$$

Der Faktor t verschwindet (beim Ableiten für die Integration) einfach.
(12.3.51) Andere Faktoren wie ln(x) werden durch das Ableiten einfacher. Etwa

$$\int_1^A dt\ t\ln(t) = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_1^A - \int_1^A dt\frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{1}{t} = ...$$

Hier ist der störende Faktor der 2. Faktor ln(t). Er wird differenziert. (U.U. ist es günstig, die Rollen u und v′ an die Faktoren des Integranden anzuschreiben.

$$\boxed{\int_1^A dt\,\underset{u'}{t} \cdot \underset{v}{\ln(t)} = \left[\tfrac{1}{2}\underset{u}{t^2}\cdot\underset{v}{\ln(t)}\right]_1^A - \int_1^A dt\cdot\tfrac{1}{2}\underset{u}{t^2} \cdot \underset{v'}{\tfrac{1}{t}} = ...}$$

Wie immer sollte man nach der Rolle des Faktors sehen (stört er?), nicht einfach den ersten u′ setzen weil man es so aufsagt.
(12.3.52) Noch ein Beispiel, bei dem **nur** der störende Faktor vorhanden ist. Man weiss aber, dass er durch Ableitung vereinfacht wird. Dann kann man einfach eine 1 als zweiten Faktor einfügen.

$$\begin{aligned} \int_0^A dx\ atn(x) &= \int_0^A dx\ 1 \cdot \underset{v}{atn(x)} = [x \cdot atn(x)]_0^A - \int_0^A dx\ \frac{x}{1+x^2} \\ &= A \cdot atn(A) - \frac{1}{2}\ln\left|1+A^2\right| \end{aligned}$$

Ableiten nach A bestätigt leicht, dass man tatsächlich eine Stammfunktion gefunden hat.
☐ Finden sie entsprechend eine Stammfunktion für ln(x) und für asn(x).
☐ Bestimmen Sie $\int dt$ te^{-t}.

Ein weiteres diskutiertes und gerechnetes Beispiel für die partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
\int dx \cos^4 x &= \int dx \cos x \cos^3 x = \left[\sin x \cos^3 x\right] - \int dx \sin x \cdot 3(-\sin x)\cos^2 x \\
&= \sin x \cos^3 x + 3\int dx \sin^2 x \cos^2 x \\
&= \sin x \cos^3 x + 3\int dx (1-\cos^2 x)\cos^2 x
\end{aligned}
$$

Damit läßt sich $\int dx \cos^4 x$ berechnen, wenn man noch folgende Omformung beachtet:

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$\int dx \cos^2 x = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$

Endergebnis:

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8}x$$

:

12.3.4f **Ableiten nach einem Parameter**

(12.3.53) Die zweite angekündigte Methode, störende Faktoren im Integranden zu beseitigen oder zu vereinfachen, sieht wie folgt aus:

> Man startet mit einem Integranden f(x,a), der neben der Integrationsvariablen noch von einem äußeren Parameter a abhängt. Dann sucht man sich eine Stammfunktion g(x,a) bezüglich dieses Parameters. D.h. es gilt $\frac{\partial}{\partial a} g(x,a) = f(x,a)$. Damit rechnet man wie folgt:
>
> $$\int_A^B dx f(x,a) = \int_A^B dx \frac{\partial}{\partial a} g(x,a) = \frac{\partial}{\partial a}\int_A^B dx g(x,a).$$

Es gibt mathematische Sätze, die zeigen, dass unter üblichen Umstände das letzte Gleichheitszeichen korrekt ist: Man darf also zuerst integrieren und dann erst nach dem Parameter differenzieren. **In günstigen Fällen fehlt nun in g ein ursprünglich störender Faktor.** Er wird durch die Ableitung ersetzt, die aber erst nach der Integration erfolgt und ja eine reine Routineoperation ist. Auf die Sätze, die das Vertauschen rechtfertigen, gehen wir hier nicht ein.

(12.3.54) Ist übrigens G(x,a) Stammfunktion (in x) zu g(x,a), dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[G(x,a)\right]_A^B = \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(G(A,a) - G(B,a)\right)\right].$$

Man kann also wählen, ob man erst differenziert und dann die Grenzen einsetzt oder umgekehrt.

☐ Im folgenden Beispiel ist es nützlich, zuerst die Grenzen einzusetzen. Es sei a>0:

$$\int_0^\infty dt\, e^{-at} t^n = \left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)^n \int_0^\infty dt\, e^{-at} = \left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)^n \left[\frac{1}{-a}e^{-at}\right]_0^\infty = ...$$

Vervollständigen Sie die Rechnung.

(12.3.55) Ein Beispiel: Im Integranden $t^3 e^{-at^2}$ stört ein Faktor t^2. Ohne ihn bietet sich die Umkehrung der Kettenregel an. Unsere Methode gibt

$$
\begin{aligned}
\int_0^A dt t^3 e^{-at^2} &= -\int_0^A dt t \frac{\partial}{\partial a} e^{-at^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\int_0^A dt t e^{-at^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{(-2a)}e^{-at^2}\right]_0^A \\
&= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{2a}\left[1 - e^{-aA^2}\right] = \frac{1}{2a^2}\left[1 - e^{-aA^2}\right] - \frac{1}{2a}\left(+A^2 e^{-aA^2}\right) \\
&= \frac{1}{2a^2}\left[1 - e^{-aA^2} + aA^2 e^{-aA^2}\right]
\end{aligned}
$$

Das Ableiten am Ende der Rechnung kann aufwendig sein, aber es lässt sich eben immer routinemäßig durchführen, wogegen man bei der Integration zunächst nicht weiter kommt.

(12.3.56) Ein anderes Beispiel eines häufig störenden Faktors ist ein Logarithmus. Die folgende Rechnung zeigt, wie man derartige Faktoren u.U. beseitigen kann.

$$\int dx\, x^a \ln(x) = \int dx\, e^{a\ln x} \ln x = \frac{\partial}{\partial a}\int dx\, e^{a\ln(x)} = \frac{\partial}{\partial a}\int dx\, x^a = \frac{\partial}{\partial a}\frac{x^{a+1}}{a+1}$$

(12.3.57) Manchmal fehlt der Parameter, nach dem man differenzieren könnte. Dann kann es sinnvoll sein, einen solchen künstlich einzuführen, also ein Integral mit einem zusätzliche äußeren Parameter zu behandeln und am Ende den benötigten speziellen Wert einzusetzen. (Das haben wir bereits in (12.3.7) vorgeschlagen, um eine eventuelle Einheitenkontrolle zu ermöglichen.) Das nächste Beispiel illustriert diese Strategie.

(12.3.58) Das Integral ist eines, das man noch für die Partialbruchmethode benötigt, das wir aber bisher noch nicht gelöst haben. Vgl. (6.3.46).

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\ .\ \text{wird verallgemeinert zu } I(a) = \int \frac{dx}{(a+x^2)^2}$$

Offenbar ist I=I(1). In I fehlt ein Parameter, in I(a) ist er vorhanden. Wir setzen a>0 voraus. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} I(a) &= -\frac{\partial}{\partial a}\int \frac{dx}{a+x^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2} \\ &= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a}\cdot\sqrt{a}atn(\frac{x}{\sqrt{a}}) = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{a}}atn(\frac{x}{\sqrt{a}}). \end{aligned}$$

Ein Ableitunmgsoperator wie $\partial/\partial a$ wirkt vereinbarungsgemäß auf alles, was rechts von ihm steht. Soll dies nicht der Fall sein, muss man das durch Klammern besonders festlegen. Im Beispiel rechnen wir weiter und finden

$$\begin{aligned} I(a) &= +\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}atn(\frac{x}{\sqrt{a}}) + a^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}xa^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a}} \\ &= \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\left(atn(\frac{x}{\sqrt{a}}) + \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{a+x^2}\right). \end{aligned}$$

D.h. wir haben:

$$\boxed{\text{I=I(1)}=\tfrac{1}{2}\left(atn(x)+\tfrac{x}{1+x^2.}\right)}$$

Etwaige Zweifel werden durch eine Probe beseitigt. Ableiten gibt

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$$

☐ Was folgt, wenn man I(b^2) bildet?

☐ Was folgt durch Berechnung von $\frac{1}{-2b}\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dx}{x^2+b^2}$? Wieso ist das etwas günstiger?

☐ Diese Resultate kann man auch über partielle Integration erhalten. Versuchen Sie es einmal mit $\int dx\cdot 1\cdot\frac{1}{x^2+b^2}$

(12.3.59) Wir geben jetzt eine Liste von Gleichungen, bei der jeweils gewisse störende Faktoren (im Integranden) durch Ableitungen nach einem Parameter ersetzt werden:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{(f(x)+a)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\frac{1}{f(x)+a} \\ (\ln x)^k x^a = (\ln x)^k e^{a\ln x} = \frac{\partial^k}{\partial a^k}x^a \\ x^k e^{ax} = \frac{\partial^k}{\partial a^k}e^{ax} \\ x\sin(ax) = -\frac{\partial}{\partial a}\cos(ax) \\ \frac{t}{(at+b)^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{at+b} \\ \mathrm{x}^3\sin(ax^2) = -\frac{\partial}{\partial a}x\cos(ax^2) \end{array}}$$

$$(\text{1-2i})^2 = 1-4i-4 = -3-4i$$
$$\int dx \frac{x^3}{(x^2+4)((x-1)^2+9)} =$$

$$\frac{x^3}{(x^2+4)((x-1)^2+9)} = \frac{A_1x+A_2}{x^2+4} + \frac{B_1(x-1)+B_2}{(x-1)^2+9}$$
$$\frac{4}{13}(-3i+2) = -\frac{16}{52}i(3+2i) = \frac{-8i(6+4i)}{52} = \frac{-8i}{6-4i} = \frac{(2i)^3}{(2i-1)^2+9} = A_1 2i + A_2$$

$$\frac{x^3}{(x^2+4)((x-1)^2+9)} = -\frac{2}{13}\frac{-4+3x}{x^2+4} + \frac{1}{13}\frac{-20+19x}{x^2-2x+10}$$

$$\int dte^{-at}\cos(\omega t+\varphi)$$
$$\int dte^{-at}e^{i(\omega t+\varphi)} = \int dte^{(-a+i\omega)t+i\varphi} = e^{i\varphi}\int dte^{(-a+i\omega)t} = \frac{e^{i\varphi}}{-a+i\omega}e^{(-a+i\omega)t}$$
$$\int dte^{At}$$
$$\int dte^{-at}e^{i(\omega t+\varphi)} = \int dte^{-at}(\cos(\omega t+\varphi)+i\sin(\omega t+\varphi))$$
$$= \int dte^{-at}\cos(\omega t+\varphi) + i\int dte^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$$

11.10.2006

$\int dx \frac{2x-7}{x^2-6x+13}$ $\quad$ $\int dx \frac{2x+7}{x^2-6x+5}$ $\quad$ $\int_0^2 dx \frac{2x+7}{x^2-6x+5}$

$\int dx \frac{2x-7}{(x-3)^2+4} = \frac{1}{4}\int dx \frac{2\frac{x-3}{2}-4}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} = ...$

$\int dx \frac{2x-7}{(x-3)^2-4}$

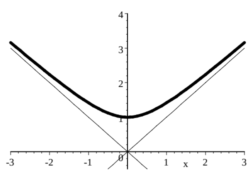
12.2: Interpretation des Integrals, die Formel $\boxed{\int_a^b dx f(x) = \bar{f}\cdot(b-a)}$

12.3.5 Die Substitutionsregel

(12.3.64) Wir betrachten jetzt zwei "schwere Integrale", die wir mit den bisherigen Methoden nicht lösen können. Zunächst

$$I(A) = \int_0^A dx\sqrt{1+x^2}.$$

Weder direkte Integration noch Umformung des Integranden führen zum Ziel. Hätte man einen zusätzlichen Faktor x, dann wäre die Berechnung problemlos. Aber ein solcher Faktor fehlt. Auch partielles Integrieren bringt nichts.
Durch Inspektion des Integranden ergeben sich eine allerdings bereits eine Reihe von Eigenschaften, die das Resultat aufweisen muss:



$I(-A) = -I(A)$
$I(A) \approx A$, $|A|$ klein
$I(A) \approx \frac{1}{2}A^2$, A groß
I(A) monoton wachsend
$\mathrm{I}'(A) = \sqrt{1+A^2}$

Die erste und die dritte Bedingung passen so nicht zusammen. Man kann versuchen $\frac{1}{2}A^2$ durch $\frac{1}{2}A\sqrt{1+A^2}$ zu ersetzen. Das ist ungerade und ergibt dassselbe Dominanzverhalten für große A. Aber die übrigen Bedingungen sind nicht erfüllt. (Für kleine A etwa erhält man $\frac{1}{2}A$ statt A.) Man könnte ansetzen

$$I(A) = \frac{1}{2}A\sqrt{1+A^2} + r(A)$$

und nach einem passenden Rst r(A) suchen.
(12.3.65) Ein zweites Beispiel dieser Art ist $J(A) = \int_0^A dx\sqrt{1-x^2}$. Der Versuch eine Stammfunktion zu finden führt auf entsprechende Probleme. Erneut stört die Wurzel.

Hier liegt eine Idee nahe:

- Könnte man x gleich $\sin(\alpha)$ setzen, dann könnte man die Wurzel ziehen! Aber dann müsste man auch über α und nicht über x integrieren!

Wir wollen jetzt ein Integrationsverfahren einführen, das den Wechsel der Integrationsvariablen ermöglicht! Dabei kann der Integrand eine völlig andere Form annehmen. Das neue Integral hat denselben Wert, lässt sich aber u.U. besser auswerten. Es geht darum, das Integral

$$\int_a^b dx f(x) \quad \text{umzuwandeln in} \quad \int_A^B dt ... f(g(t))$$

D.h. x soll durch eine andere Variable t ersetzt werden, die x=g(t) erfüllt. Wie angedeutet, ändern sich die Grenzen und im Integrand wird ein zusätzlicher Faktor erzeugt, den wir gleich bestimmen werden. Dieser Faktor ist notwendig, um die Gleichheit der beiden Integrale zu sichern.

(12.3.66) Die meisten schwierigeren Integralberechnungen verwenden die Substitutionsmethode. Aber erneut ist es so, dass es keine Regel gibt, die einem sagt, **welche** Substitution zum Ziele führt. Das Auffinden guter Substitutionen ist vielfach eine Kunst. Einige (nicht immer naheliegende) Substitutionen erweisen sich als recht wirkungsvoll.
(12.3.67) Die Herleitung der Substitutionsregel ist mit Hilfe der Kettenregel recht einfach. Wichtiger ist es, das zugehörige Rechenschema korrekt zu verwenden. Wir werden uns um diesen zweiten Punkt besonders bemühen.
(12.3.68) Zur Herleitung: Es sei F eine Stammfunktion zu f. Dann gilt:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a).$$

Angenommen g ist umkehrbar. Dann können wir A und B finden mit a=g(A) und b=g(B). Es folgt (mit Umkehrung der Kettenregel):

$$F(b) - F(a) = F(g(B)) - F(g(A)) = [F(g(t))]_A^B = \int_A^B dt g'(t) f(g(t)).$$

Zusammen besagt das

$$\boxed{\int_a^b dx f(x) = \int_A^B dt g'(t) f(g(t)).}$$

Das ist die Umkehrung der Kettenregel, etwas anders interpretiert. Beachten Sie die Reihenfolge: Von links nach rechts.
(2.3.69) Welche Bedeutung hat der zusätzliche Faktor $g'(t)$ im Integranden? Er lässt sich einfach mit Hilfe der Summeninterpretation des Integrales verstehen. Approximieren wir beide Seiten einmal durch eine Summe:

$$\begin{aligned} \int_a^b dx f(x) &\approx \sum_i \Delta x_i \, f(a_i) \\ \int_A^B dt g'(t) f(g(t)) &\approx \sum_i f(g(u_i)) g'(u_i) \Delta t_i \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist $a_i = g(u_i)$. Weiter ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ die Breite des kleinen i-ten Teilintervalles auf der x-Achse. Durch unsere Abbildung x=g(t) ist das aber in Tangentenapproximation

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = g(t_i) - g(t_{i-1}) \approx g'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = g'(t_{i-1})\Delta t_i.$$

t_{i-1} ist ein Randpunkt des Intervalles, nicht der gewählte typische Zwischenpunkt $t_i = g(u_i)$. Aber der Unterschied gibt nur einen Restermbeitrag, wie etwa folgende Umschreibung zeigt

$$g'(t_{i-1}) = g'(u_i) + g''(u_i)(t_{i-1} - u_i) + ...$$

Denn es ist ja $|(t_{i-1} - u_i)| \leq \Delta t_i$.

(2.3.70) Das zeigt, dass der Faktor $g'(t)$ dazu dient, die Breiten der Teilintervalle korrekt ineinander umzurechnen. Geometrisch ist $f(x_i)\Delta x_i$ der Flächeninhalt eines Rechteckes. Der korrespondierende Term ist $f(g(u_i))g'(u_i)\Delta t_i$. Beide Rechtecke haben wegen $x_i = g(u_i)$ dieselbe Höhe. Aber ohne den Faktor $g'(u_i)$ könnten die Breiten verschieden sein und damit auch die Summen. Der Faktor korrigiert die Breiten.

(2.3.71) Wie angekündigt wollen wir das Anwenden der Substitutionsregel jetzt schematisieren. **Man sollte so vorgehen, dass man die folgenden drei Schritte neben dem vorgegebenen Integral in der jeweiligen Konkretisierung aufschreibt:**

(1) Die Substitution:	x=g(t)	t=$g^{-1}(x)$ in [a,b]
(2) Das Differential	dx=dt $g'(t)$	
(3) Die neuen Grenzen	$\int_a^b dx \to \int_A^B dt$	
	$\boxed{\int_a^b dx f(x) = \int_A^B (dt g'(t)) f(f(t))}$	

Mit Hilfe dieser Bestandteile kann man das neue Integral einfach zusammensetzen und aufschreiben. Aber **Achtung: Die Funktion g muss im Bereich a**$\leq x \leq b$ invertierbar sein! Das gehört zum ersten Schritt

(12.3.72) Erproben wir die Methode einmal am zweiten Einstiegsbeispiel. Wir möchten $J(A) = \int_0^A dx\sqrt{1-x^2}$ berechnen. Als Substitution versuchen wir x=sin(t). Dann gibt unser Dreipunkteschema:

(1) x=sint t=asn(x) $\sqrt{1-x^2} = \cos t$	(2) dx=dt·cos(t)	(3) $\int_0^A dx \to \int_0^{asn(A)} dt$

Also

$$J(A) = \int_0^A dx\sqrt{1-x^2} = \int_0^{asn(A)} dt \cos^2(t).$$

Das ist aber ein Integral, das wir bereits kennen. Mit Hilfe von $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ und der $1/\alpha$-Regel folgt:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{asn(A)} = \frac{1}{2}\left[t - \sin(t)\cos(t)\right]_0^{asn(A)} \\ &= \frac{1}{2}\left[t - \sin(t)\sqrt{1-\sin^2 t}\right]_0^{asn(A)} = \frac{1}{2}\left[asn(A) - A\sqrt{1-A^2}\right] \end{aligned}$$

Eine Probe durch Ableiten bestätigt das Resultat.

Inhaltlich ist das die Flächeninhaltsfunktion des Halbkreises, die wir soeben bestimmt haben.

□ $J(a,A) = \int_0^A dx\sqrt{a^2 - x^2}$. Wie würden Sie hier substituieren? Können Sie dies Integral auch auf J(A) zurückführen?

(12.3.73) Jetzt noch einige Ergänzungen zum Dreipunkteschema zum Vollzug der Substitution:

- In der Regel heissen die Variablen nicht x und t. Vielmehr sind jeweils zwei Rollen zu vergeben: *alt* und *neu*. In Punkt (1) steht genauer $alt = g(neu)$. Darauf ist zu achten.
- Die inverse Abbildung g^{-1} lässt sich manchmal nicht angeben. U.U. ist es dann doch möglich, die Substitution durchzuführen. Wichtig ist jedoch, darauf zu achten, dass g im Integrationsbereich umkehbar ist. Ist das nicht der Fall, kann Unfug entstehen.

- U.U. rechnet man im ersten Punkt noch Hilfsgrößen, die im Integranden auftreten von alt nach neu um. Im Beispiel $\sqrt{1-x^2}=\cos t$.
- Der zweite Punkt ist eine gedächtnistechnisch nützliche formale Umschreibung der Gleichung

$$\frac{dg}{dt}(t')=g'(t).$$

Die jeweils in Punkt (1) stehende Funktion g(t) ist zu differenzieren und mit den nötigen Differentialen zu versehen. Ist g nicht verfügbar, ist g^{-1} zu differenzieren und das Ergebnis entsprechend umzustellen.

- Zum dritten Punkt überlegt man wie folgt: "Wenn x=a ("alt") ist, was ist dann nach den Gleichungen des ersten Punktes t? (Neu)". Usw.

(12.3.74) Sind die drei Punkte des Schemas fallspezifisch aufgefüllt und kontrolliert, dann kann man das neue Integral direkt hinschreiben und sollte das tun.

Ein leichtes Beispiel: Das Integral $\int_0^A dxe^{-ax^2}$ mit a>0 soll mit der Substitution $t=ax^2$ umgeformt werden. Das Schema gibt:

t=ax^2, x=$\sqrt{\frac{t}{a}}=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$ umkehrbar für x$\geq$ 0 da a>0	dx=dt$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{at}}$ x ist "alt"	$\int_0^A dx \to \int_0^{aA^2} dt$

Also haben wir:

$$\boxed{\int_0^A dxe^{-ax^2}=\frac{1}{2}\int_0^{aA^2}\frac{dt}{\sqrt{at}}e^{-t}}$$

Durch die Substituion wird der Exponent vereinfacht, aber dafür handeln wir uns den unangenehmen Faktor $\frac{1}{\sqrt{t}}$ im Integranden ein, der bei t=0 sogar einen Pol entwickelt. Wir haben bereits gesagt, dass dieses Integral ein Beispiel für ein nicht elementar darstellbares Integral ist. Die Substitution selbst ist einfach auszuführen.

☐ Leiten Sie die $1/\alpha$-Regel über eine Substitution her.

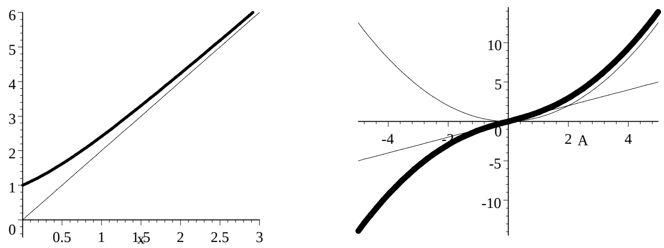
(12.3.75) Als nächstes Beispiel behandeln wir das erste eingangs angeführte Integral $I(a,A)=\int_0^A du\sqrt{a^2+u^2}$. Dabei haben wir einen zusätzlichen Parameter a>0 eingeführt. Was nimmt man als Substitution? Wir geben eine von Euler gefundene Substitution, von der zunächst überhaupt nicht zu sehen ist, wie man auf sie kommt. Erst die Ausführung des Schemas zeigt, weshalb sie funktioniert, wie sie die störende Wurzel beseitigt. Aber wir haben ja gesagt, dass das Finden günstiger Substitutionen schwierig sein kann.
Die Substitution soll durch die Gleichung $t=u+\sqrt{a^2+u^2}$ eingeführt werden. u ist hier alt und t neu. D.h. wir haben g^{-1} angegeben. Auflösen nach u gelingt, indem man $(t-u)^2=\left(\sqrt{a^2+u^2}\right)^2$ bildet. Und hier hebt sich das quadratische u^2 fort. Es bleibt

$$t^2-2tu=a^2$$

Und jetzt läuft die Auffüllung des Schemas durch:

$$\begin{array}{lll} u=\frac{t^2-a^2}{2t}=g(t) & & \\ t=u+\sqrt{a^2+u^2} & du=dt\frac{t^2+a^2}{2t^2} & \int_0^A du \to \int_a^{A+\sqrt{a^2+A^2}} \\ \sqrt{a^2+u^2}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & \end{array}$$

Die Umkehrbarkeit ist im betrachteten Bereich gesichert, wie die Grapheninspektion zeigt. (Für a=1, linke Figur, die t=t(u) gibt) zeigt. Zusätzlich ist t=2u eingezeichnet. Rechts ist vorweg genommen die weiter unten angegebene Stammfunktion eingezeichnet.)



Zusammen haben wir folgende Integralsubstitution (mit K=A+$\sqrt{a^2+A^2}$) gefunden. Das durch die Substitution entstehende Integral lässt sich leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\int_0^A du\sqrt{a^2+u^2} &= \frac{1}{4}\int_a^K dt\frac{(t^2+a^2)^2}{t^3}\\ &= \frac{1}{4}\int_a^K dt(t+2\frac{a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3})\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2+2a^2\ln|t|-\frac{1}{2}a^4t^{-2}\right]_a^K\\ &= \frac{a^2}{8}\left[\left(\frac{K^2}{a^2}-\frac{a^2}{K^2}\right)+4\left(\ln(K)-\ln(a)\right)\right]\\ &= \frac{a^2}{8}\left(\frac{K^2}{a^2}-\frac{a^2}{K^2}\right)+\frac{a^2}{2}\ln(\frac{K}{a})\end{aligned}$$

Beim Herumspielen mit K findet man durch "Rationalmachen des Nenners" folgende bemerkenswerte Identität:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{K^2} &= \frac{a^2}{\left(A+\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}=\frac{a^2\left((A-\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{(A^2-(a^2+A^2))^2}\\ &= \frac{\left((A-\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{a^2}\end{aligned}$$

Einsetzen gibt für den im Integral auftretenden Beitrag:

$$\begin{aligned}\frac{K^2}{a^2}-\frac{a^2}{K^2} &= \frac{\left((A+\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left((A-\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{a^2}\\ &= \frac{1}{a^2}\left(4A\sqrt{a^2+A^2}\right)\end{aligned}$$

Das ist genau der Beitrag, den wir ganz zu Anfang geraten haben! Damit folgt für das Integral insgesamt:

$$\boxed{\int_0^A \mathrm{du}\sqrt{a^2+u^2}=\frac{1}{2}\mathrm{A}\sqrt{a^2+A^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{A+\sqrt{a^2+A^2}}{a}\right)}$$

Den ersten Term hatten wir geraten. Der logarithmische Zusatzterm ist infolge der gefundenen Identität ungerade, was man ihm nicht unmittelbar ansieht. Durch Ableiten kann man verifizieren, dass wirklich eine Stammfunktion gefunden ist. Beachten Sie auch die Stimmigkeit der Einheiten. In der oben gegebenen Figur sind neben der Stammfunktion noch die beiden Dominanzfunktionen $A \mapsto A$ und $A \mapsto \frac{1}{2}A^2$ mit eingezeichnet.

(12.3.76) Wir wollen nochmals auf den Gesichtspunkt der Effizienz verweisen: Die eigentliche Rechenarbeit tritt beim Auswerten des neuen Integrales auf. Wenn man zur Herstellung dieses Integrales "ganz lange" braucht und noch "viele Fehler" macht, kommt man kaum zum Ergebnis. Das ist immer dann wahrscheinlich, wenn man sich nicht an obige drei Punkte hält und stattdessen an der Substitution selbst wild herumrechnet.

(12.3.77) Die Eulersche Integralsubstitution hat die Wurzel im ursprünglichen Integranden beseitigt und einen rationalen Integranden in der neuen Variablen erzeugt. Von den rationalen Funktionen haben wir aber gezeigt, dass man für sie immer eine Stammfunktion mit der Partialbruchmethode finden kann. Dieser Sachverhalt kommt häufig vor: **Man hat einen Integranden mit unangenehmen Beiträgen und wandelt ihn durch eine geschickte Substitution in einen rationalen Integranden um!**

☐ Verallgemeinern wir Eulers Methode: Wir starten mit der Gleichung $t = x+\sqrt{c+2bx+x^2}$ (x die alte Variable). Füllen Sie dafür das Substitutionsschema aus, wobei auch die Wurzel durch die t auszudrücken ist und überlegen sie sich Integrale, die man mit dieser Substitution in lösbare Form bringen kann!

(12.3.78) Vielfach ist es üblich, Integrale, die wir unmittelbar mit der "Umkehrung der Kettenregel" direkt integrieren, mit der Substitutionsmethode zu bearbeiten. "Da muss man sich nur eine Methode merken, braucht weniger zu denken" und rechnet dafür länger und fehleranfälliger. Rechnen wir so ein Beispiel einmal mit beiden Methoden. Zuerst die empfohlene:

$$\begin{aligned}(-2)\int_0^{\pi}\frac{dt(-\frac{1}{2}\sin(t))}{(1+\frac{1}{2}\cos(t))^4} &= (-2)(-3)\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{2}\cos(t))^3}\right]_0^{\pi} \\ &= 6\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)=\frac{416}{9}\end{aligned}$$

Jetzt substituieren wir alternativ u=sin(t). Das Schema gibt:

u=cos(t)		
t=acs(u)=g(u)	dt=$\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int_0^{\pi} dt \to \int_1^0 du$
sint=$\sqrt{1-u^2}$		

Also

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{dt\sin(t)}{(1+\frac{1}{2}\cos(t))^4} &= -\int_1^0\frac{(-du)\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}(1+\frac{1}{2}u)^4} \\ &= +\int_0^1\frac{du}{(1+\frac{1}{2}u)^4}=2(-3)\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}u\right)^3}\right]_0^1=...\end{aligned}$$

Das ist viel aufwendiger. Teilweise kann man sich Arbeit sparen, indem man u=cost differenziert und im zweiten Schritt mit $du=-dt\cdot sint$ arbeitet. Aber man muss darauf achten, dass man am Ende keinen Rest an alten Variablen im neuen Integranden hat. Das ist eine beliebte Fehlerquelle: Man substituiert nur einen Teil der alten Variablen, macht aus den Restbeständen schnell äußere Parameter und freut sich dass, man integrieren kann! Leider ist das Resultat meist falsch, die Rechnung ist es auf jeden Fall.

(12.3.79) Ist man nur an einer (irgendeiner) Stammfunktion interessiert, kann man das Vorgehen der Substitutionsregel vereinfachen. Dabei ist an die Vereinbarung aus (12.1.13) zu denken, dass die Integrationsvariable genauso bezeichnet werden soll, wie die unabhängige Variable der Stammfunktion. Der dritte Schritt des Schemas entfällt dann. **Statt der Grenzen ist am Ende die alte Variable wieder einzuführen:**

(1) Die Substitution:	x=g(t)	t=g$^{-1}(x)$ in [a,b]
(2) Das Differential	dx=dt g$'(t)$	
(3) Entfällt		t=g$^{-1}(t)$ einsetzen!

Der Zusammenbau des neuen Integrales gibt jetzt:

$$\int dxf(x)=\left[\int dtg'(t)f(g(t))\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

D.h. erst, wenn man die Stammfunktion in t gefunden hat, soll man über $t=g^{-1}(x)$ wieder die ursprüngliche Variable einführen!

(12.3.80) Ein Beispiel: $I(x;a,b)=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}}$ soll über die Substitution $u=\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}$ bestimmt werden. Dabei ist b>0. Die ersten beiden Punkte des Schemas ergeben:

u=$\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}$	dx=$\frac{-2bu\cdot du}{(u^2+a^2)^2}$	entfällt
x=$\frac{b}{u^2+a^2}=g(x)$		

Damit folgt:

$$\begin{aligned}I(x;a,b) &= \int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}}=(-2b)\left[\int\frac{du}{(u^2+a^2)^2}\right]_{u=...} \\ &= (-2b)\left[\frac{1}{2a^3}\left(atn(\frac{u}{a})+\frac{au}{a^2+u^2}\right)\right]_{u=...} \\ &= (-2b)\left(\frac{1}{2a^3}atn(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{x}-a^2})+\frac{x\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}}{2a^2b}\right)\end{aligned}$$

Das ist das Resultat, das man auch über eine Formelsammlung oder ein Computeralgebraprogramm erhält. Dabei sollte a,b>0 gelten.

Beispiele zur Substitutionsregel:

Einfache Beispiele: $\boxed{\text{I(A,a)}= \int_0^A dx e^{-ax^2}}$ läßt sich nicht elementar berechnen. Und das bedeutet, dass naheliegende Substitutionen erneut zu nicht lösbaren Integralen führen. Einige Beispiele:

Versuche folgende Substitutionen $\boxed{\text{u=-ax}^2}$. Neue Variable u durch alte, also u=$g^{-1}(x)$. Jetzt das Schema, in das man keinesfalls Nebenrechnungen eintragen sollte!

---

u=-ax$^2 = g^{-1}(x)$		$\int_0^A dx \longmapsto \int_0^{-aA^2} du$
x=$\sqrt{\frac{-u}{a}} = g(u)$	dx=du($-\frac{1}{2a})\sqrt{\frac{a}{-u}}$	

Einsetzen gibt:

$$I(A,a) = \int_0^A dx e^{-ax^2} = \int_0^{-aA^2} du(-\frac{1}{2a})\sqrt{\frac{a}{-u}}e^u =$$
$$I(A,a) = \int_0^A dx e^{-ax^2} = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{-aA^2} du\frac{e^u}{\sqrt{-u}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-aA^2}^0 du\frac{e^u}{\sqrt{-u}}$$

Wir schließen noch eine weitere ganz einfache Substitution an:

$$\text{u=-v} \qquad \text{du=-dv} \qquad \int_a^b du \longmapsto \int_{-a}^{-b} dv = -\int_{-b}^{-a}$$

$$I(A,a) = \int_0^A dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{aA^2} dv\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}$$

/ /

Und jetzt v=e$^{-ax^2}$ und x$^2 = -\frac{1}{a}\ln v$

v=e$^{-ax^2} = g^{-1}(x)$

x=$\sqrt{-\frac{1}{a}\ln v}$ dx=dv$\sqrt{\frac{1}{a}}\frac{1}{v}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-\ln v}}$ $\int_0^A dx \longmapsto \int_1^{e^{-aA^2}} = -\int_{e^{-aA^2}}^1$

Das gibt:

$$\int dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}}\int dv\frac{1}{v\sqrt{-\ln v}}v = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}}\int_{e^{-aA^2}}^1 dv\frac{1}{\sqrt{-\ln v}}$$

Dagegen ist das folgende zunächst keineswegs einfachere Integral leicht mit der Umkehrung Kettenregel zu lösen:

$$\int_1^A \frac{dv}{v\sqrt{\ln v}} = \int_1^A dv \underbrace{\frac{1}{v}}_{\ln'(v)}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ln v}}}_{f(\ln v)} = 2\sqrt{\ln v}|_1^A = 2\ln(A).$$

Jetzt soll das Beispiel aus dem Skript mit einer anderen Substitution gelöst werden! (mit zunächst mißverständlichen Bezeichnungen!)

$$\boxed{\text{I(a,A)}=\int_0^A dx\sqrt{a^2+x^2}}$$

Substitution x=a·sh(u)=$\frac{a}{2}(e^u-e^{-u})$ ch(u)=$\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})$. Jetzt die drei Punkte:

1. x=a·sh(u) $\left(u=arcsh(\frac{x}{a})=....\right)$
2. dx=du·a·$ch(u)$
3. $\int_0^A dx \longmapsto \int_0^E du$ mit E=arcsh($\frac{A}{a}$)

Das gibt

$$\text{I(a,A)}=\int_0^E ..\text{du·a·}ch(u)\sqrt{a^2+a^2sh^2(u)}$$
$$=\text{a}^2\int_0^E du\ \text{ch}^2u=\frac{a^2}{2}\int_0^E du(ch(2u)+1)$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}sh(2u)+u\right]_0^E$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}sh(2E)+E\right]$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[sh(E)ch(E)+E\right]$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[sh(E)\sqrt{1+sh^2(E)}+E\right] \qquad \text{E=arcsh}(\tfrac{A}{a})$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{A}{a}\sqrt{1+\left(\frac{A}{a}\right)^2}+arcsh(\frac{A}{a})\right]$$
$$\boxed{\text{I(a,A)}=\int_0^A dx\sqrt{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\left[A\sqrt{a^2+A^2}+a^2arcsh(\frac{A}{a})\right]}$$

Aber arcsh(u) läßt sich noch genauer berechnen, wie unten gezeigt wird.

Nebenrechnung

$$\text{ch(2u)}=\text{ch}^2u+sh^2u \qquad ch^2u-sh^2u=1$$
$$\text{ch(2u)}=2\text{ch}^2u-1$$
$$\text{ch}^2u=\frac{1}{2}(ch(2u)+1)$$
$$\text{sh(2E)=2sh(E)ch(E)}$$

Berechnung das arcsh(x)

$\boxed{\text{e}^x-e^{-x}=2y}$ ist nach x aufzulösen. Setzte z=e^x. Gibt

$$\boxed{z^2-2yz-1=0}$$

z=y+$\sqrt{y^2+1}$, da z=e$^x>0$ gelten muss. Mit diesem z folgt sofort

$$arcsh(y)=\text{x=ln(y+}\sqrt{y^2+1})$$

Das gibt das auch im Skript angegebene Endresultat

$$\boxed{\text{I(a,A)}=\int_0^A dx\sqrt{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\left[A\sqrt{a^2+A^2}+a^2\ln(\frac{1}{a}(A+\sqrt{a^2+A_2})\right]}$$

Einige weiter in der Übunf nicht behandelt Aufgaben zur Umkehrung Kettenregel: :

$\text{K}_1(a)=\int\frac{dxx}{\sqrt{a^4-x^4}}=\frac{a}{2a^2}\int\frac{dx(2\frac{x}{a})}{\sqrt{1-\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}}=\frac{1}{2a}asn\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$
$\text{K}_2(a)=\int\frac{dt}{t}\sin(a\ln t)=\frac{1}{a}\int dt\frac{a}{t}\cdot\sin(a\ln t)=\frac{1}{a}(-1)\cos(a\ln t)$
$\text{K}_3(a,b)=\int dt\cos(t)\sqrt{a+b\sin t}=\frac{1}{b}\int dt(b\cos t)(a+b\sin t)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{3}(a+b\sin t)^{\frac{3}{2}}$
$\text{K}_4=\int_0^a dtt^2e^{at^3}=\frac{1}{3a}\int_0^a dt(3at^2)e^{at^3}=\frac{1}{3a}\left[e^{at^3}\right]_0^a=\frac{1}{3a}\left(e^{a^4}-1\right)$

12.3.6 **Die Bogenlänge**

Wir geben jetzt noch eine Anwendung, die Inegration und Vektorrechnung benutzt.

(12.3.81) Wir betrachten eine Kurve im Raum oder der Ebene, die wir durch eine Parametrisierung $t \mapsto \vec{r}(t)$ beschreiben wollen. Wir interpretieren dies als Bewegung entlang Bild$\vec{r}$. Uns interessiert die Länge des Kurvenzuges, gemessen von einem Kurvenpukt aus, sagen wir von $\vec{a} = \vec{r}(t_0)$ aus. D.h.: Legt man von $\vec{a}$ einen Faden entlang der Bahn bis $\vec{r}(t)$, dann interessiert die Länge des verlegten Fadens. Würden wir in einem Auto entlang der Kurve fahren, dann wäre das der zurückgelegte Weg. Das letzte Problem können wir aber leicht (physikalisch) lösen:

> Hat das Auto zur Zeit t die (momentane) skalare Geschwindigkeit v(t) dann ist der (bis zur Zeit T) zurückgelegte Weg s(T) gleich $\int_{t_0}^{T} dtv(t)$. Denn die momentane Geschwindigkeit ist ja gleich der Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit.

(12.3.82) Die momentane skalare Geschwindigkeit erhalten wir aber durch Betragsbildung der vektoriellen Geschwindigkeit und letztere durch Ableiten unserer Parametrisierung.
Zusammen ergibt sich:

> **Die Bogenlänge der von $\vec{r}$ beschriebenen Kurve zwischen den beiden Punkten $\vec{r}(t_0)$und $\vec{r}(T)$ mit T>t_0 wird gegeben durch:**

$$\boxed{s(T) = \int_{t_0}^{T} dt \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|.}$$

Unsere Modellvorstellung mit dem fahrenden Auto zeigt allerdings noch, dass das Auto die gesamte Bahn in einer Richtung durchfahren muss. Kehrt es irgenwo um und fährt es ein Stück zurück und dann wieder vorwärts, so ist der zurückgelegte Weg größer als die Bogenlänge! Denn ein Teil des Weges wird ja dreifach durchfahren und das wird auf dem Tacho mitgezählt. Unsere Formel gibt einfach die Tachodifferenz wieder. Das lässt sich vermeiden, wenn man fordert, dass die vektorielle Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ zu keinem Zeitpunkt verschwinden darf. Unter diesen Umständen ergibt unsere Formel sicherlich die Bogenlänge.

(12.3.83) Alle Parametrisierungen sind in der Regel in Form von Koordinatenvektoren anzugeben. Wir beschreiben parallel das allgemeine Vorgehen und ein Beispiel.

	Allgemeines Vorgehen	Beispiel: Kreis
	Bestimme eine Parametrisierung	$\vec{r}(t) = (r\cos t, r\sin t)$
	Bilde die vekt. Geschwindigkeit	$\dot{\vec{r}}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
	Bilde den Betrag der vekt. Geschw.	$\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = r$
	Bilde damit das Integral $\boxed{\mathrm{b(T)}=\int_{t_0}^{T}\mathrm{dt}\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}$	b(T)=r$\int_0^T dt \cdot 1$
	Berechne das Integral	b(t)=rT . (T =Winkel!)

Der letzte Schritt kann u.U. größere praktische Schwierigkeiten bereiten, d.h. es kommen "schwere Integrale" heraus. Im Beispiel haben wir tatsächlich die Formel für die Bogenlänge beim Kreis erhalten.

☐ Sei $\vec{d} = (a, b, c)$. Betrachten Sie die Strecke, die durch folgende Parametrisierung gegeben wird: t$\mapsto t\vec{d}$ für 0$\leq t \leq T$. Die Länge dieser Strecke ist natürlich T$\left|\vec{d}\right|$. Bestätigen Sie das mit der allgemeinen Methode.

(12.3.84) Jetzt kommen wir zu einem besseren Beispiel, das wir mit den bisherigen Methoden nicht beherrschen. Wir betrachten eine durch $y = \alpha x^2$ gegebene Parabel und fragen nach der Bogenlänge im Bereich $0 \leq x \leq A$.

Als Parametrisierung wählen wir x$\mapsto \vec{r}(x) = (x, \alpha x^2)$. Dann sehen die einzelnen Schritte aus (12.3.83) wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(x) &= (1, 2\alpha x) \\ |\vec{r}'(x)| &= \sqrt{1+4\alpha^2 x^2} \\ b(A) &= \int_0^A dx \sqrt{1+4\alpha^2 x^2}. \end{aligned}$$

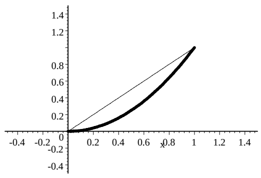
In dem Integral nehmen wir die Substitution u=$2\alpha x$ vor. Das gibt

$$b(A) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{2\alpha A} du \sqrt{1+u^2}.$$

Dieses Integral haben wir oben in (12.3.75) berechnet. Mit a=1 und A$\rightarrow 2\alpha A$ folgt:

$$b(A) = \frac{1}{2\alpha} \left(\alpha A \sqrt{1+4\alpha^2 A^2} + \frac{1}{2} \ln \left(2\alpha A + \sqrt{1+4\alpha^2 A^2} \right) \right)$$

Und für $\alpha = 1$und A=1 folgt schließlich:



$b = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left(2 + \sqrt{5}\right) = 1.4789$

Das ist die Bogenlänge der Normalparabel im ersten Einheitsquadrat. Der Wert ist offensichtlich vernünftig, etwa größer als $\sqrt{2}$ und deutlich kleiner als 2.

Die Bogenlänge der Ellipse.

(12.3.85) Die Ellipse ist neben der Parabel ein weiterer Kegelschnitt. Eine Parametrisierung ist leicht zu finden, aber das entstehende Integral lässt sich bemerkenswerterweise nicht elementar ausdrücken. Zuerst die Schritte, die zum Integral führen.
Eine Parametrisierung ist $\vec{r}(t) = (a\cos t, b \sin t)$,wobei a und b die Längen der beiden Halbachsen sind. Üblicherweise ist a die große Halbachse. Der Parameter läuft von 0 bis 2π. Jetzt das Schema:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (a\cos t, b\sin t) \\ \dot{\vec{r}}(t) &= (-a\sin t, b\cos t) \\ \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = b\sqrt{1 - \frac{b^2-a^2}{b^2}\sin^2 t} \\ & \boxed{b(T) = b\int_0^T dt \sqrt{1-\eta^2\sin^2 t} \quad \text{wobei} \quad \eta^2 = \frac{b^2-a^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass b die große Halbachse ist. Dann ist $0<\eta^2 \leq 1$. Das entstehende Integral erweist sich als nicht elementar darstellbar. Man bezeichnet derartige Integrale als "elliptische Integrale". Sie treten in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auf und haben eine Vielzahl bemerkenswerter Eigenschften.

(12.3.86) Wir besprechen zunächst eine andere Form des Integrales, die sich über eine naheliegende Substitution ergibt. Und zwar setzen wir u=$\eta \sin t$. Unser Schema (für $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) :

$$\begin{array}{lll} \text{u}=\eta\sin t & & \\ \text{t}=\text{asn}(\frac{u}{\eta}) & \text{dt}=\frac{du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} & \int_0^T dt \mapsto \int_0^{\eta\sin T} du \\ \sqrt{1-\eta^2\sin^2 t} = \sqrt{1-u^2} & & \end{array}$$

Zusammen gibt das

$$\boxed{\int_0^T \text{dt}\sqrt{1-\eta^2\sin^2 t} = \int_0^{\eta\sin T} \text{du}\sqrt{\frac{1-u^2}{\eta^2-u^2}}}.$$

Dies ist ein Beispiel dafür, wie eine Substitution den Integranden verändern kann.