Hilfen zur Verhaltensinspektion: Kleine Transformationen und Termumfomungen:

■ Wenden Sie die kleinen Transformationen auf die "Gleichung für den Einheitskreis" $x^2 + y^2 = 1$ an. Was erhält man? Die beiden Achsen auch unterschiedlich skalieren!
■ Wie sollte man $y = \frac{1}{x^2+6x+10}$ umformen, um das Verhalten besser zu erfassen? (8.4.15)

Antwort: y=$\frac{1}{(x+3)^2+1}$. Also einfach den Graphen von $\frac{1}{x^2+1}$ um -3 verschoben

Beispiele von **Funktionsscharen**:

- $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
  - Wir wissen: $a_0 + a_1x$ dominoert das Verhalten um x=0. Insbesondere tut das a_1. Dagegen dominiert a_3 das Verhalten bei sehr großen |x|. In welchem Bereich wird a_2 Einfluss haben?
- $a_1 \sin(a_3x) + a_2 \sin x$ Einfluss der drei auftretenden Parameter?

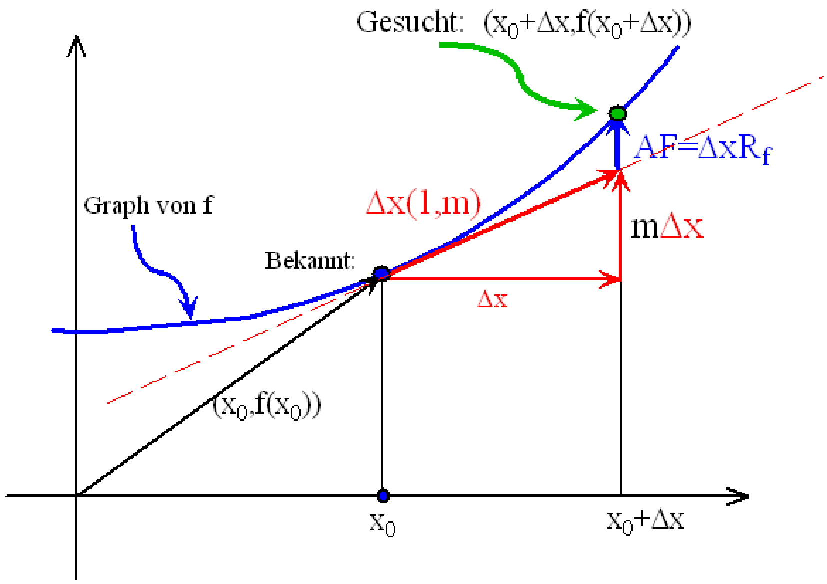
Heute:
Das wichtige Kapitel 9

- 9.1 Die Tangentenzerlegung
  - 9.1.1 Die Problemstellung. Szenenbild: f, x_0, $f(x_0)$ bekannt. Gebe Δx ??$f(x_0 + \Delta x)$
  - **9.1.2 ★ Die Idee der Tangentenzerlegung** Daraus folgt der Rest!
    - 9.1.2a Einschub: Absoluter, relativer und lokaler Fehler
    - 9.1.2b Der Restterm als lokale Lupe
    - 9.1.2c ♣ Die Eindeutigkeit der Tangentenzerlegung
    - 9.1.2d Die Umcodierung der Information durch die Tangentenzerlegung
    - 9.1.2e ♣Tangente und Tangentenapproximation
    - 9.1.2f Zur geometrischen Herkunft des Tangentenbegriffes
    - 9.1.2g **★Die erste Denkfigur: Bestimmung einer Ableitung**
    - 9.1.2h **★Die zweite Denkfigur: Die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung**
      - Die Regel von l'Hospital
      - ■Zur Wasserbeckentiefe
      - Das Newtonverfahren zur Nullstellbestimmung
      - Die Ableitung der Exponentialfunktion
      - ♣Wann ist f in x_0 differenzierbar und wann nicht?
      - Beispiel einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion
- 9.2 Interpretationen und herkömmliche Darstellung
  - 9.2.1 Ableitung und Differentialquotient
  - 9.2.2 ★Ableitung und momentane Geschwindigkeit
  - 9.2.3 Das Auflösen der von-Klammer
  - 9.2.4 Die Ableitungsfunktion
  - 9.2.5 Das Konkretisierungsproblem bei der Tangentenzerlegung
- 9.3 **★Die Ableitungsregeln**

- 9.3.1 Das Bestimmen der Ableitung
- 9.3.2 ★Formulierung und Beweis der Ableitungsregeln
  * 9.3.2a ★Linearität
  * 9.3.2b ★Die Produktregel
  * 9.3.2c ★Die Ableitung der reziproken Funktion
  * 9.3.2d ★Die Quotientenregel
  * 9.3.2e ★Die Kettenregel
  * 9.3.2f ★"Physikalische" und "mathematische" Funktionen
  * 9.3.2g Die Ableitung der inversen Funktion
- 9.3.3 ★Das Zusammenspiel mehrerer Regeln

Wir sind bis 9.3 gekommen!

Das Szenenbild für die betrachtete Umschreibung des Rechenausdrucks
f ,$x_0 \in D$ „f(x_0) Δx klein f($x_0 + \Delta x$)



$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0, \Delta x)$$

Beispiel:

f(x)	x frei	x_0	f(x_0)	Δx	f($x_0 + \Delta x$)	=f(x_0) $+ m\Delta x + \Delta x R(x_0, \Delta x)$....		
$=x^2$		=a	a^2	0.2	$(a+.2)^2$	$=a^2 + 2a \cdot (0.2) + \boxed{.2^2}$		m=f$'(a) = 2a$

Das Verhältnis von absolutem Fehler zur linearen Approximation. Zum GfA-Programm:

$$\frac{\text{Absoluter Fehler}}{\text{linearer Approximation}} \approx \begin{cases} const & \text{falsche Wahl m} \\ \Delta x \cdot const & \text{korrekte Wahl m} \end{cases}$$

Tangentenzerlegung von f um x_0 : Eine Umschreibung des Rechenausdrucks

$$f(x_0,\Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot m + \Delta x R_f(x_0,\Delta x)$$

Kann als achsenparalleler Weg vom Ursprung zum Graphenpunkt $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ interpretiert werden:

$$\begin{aligned}(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) &= ((0,0)+(x_0,0)+(x_0,f(x_0))+\Delta x(1,m)+(0,AF(x_0,\Delta x)\\ &= ((0,0)+(x_0,0)+(x_0,f(x_0))+\Delta x(1,m)+\Delta x(0,R_f(x_0,\Delta x)\end{aligned}$$

:

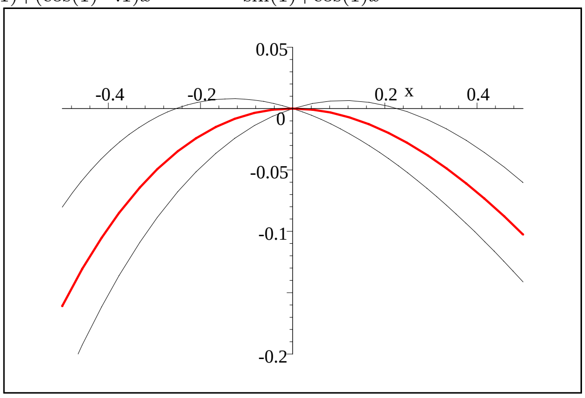
Nach GfA Programm: Das Verhältnis der letzten beiden y-Beiträge:

$$Q(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - m\Delta x}{f(x_0)+m\Delta x} = \Delta x \frac{R_f(x_0,\Delta x)}{f(x_0)+m\Delta x} = \frac{blau}{schwarz}$$

für m$\neq f'(x_0)$ gilt: Absoluter Fehler $\approx$ proportional Approximation und proportional zu Δx
Nur für m=f$'(x_0)$ ist das deutlich besser! Dann etwa proportional Δx^2.
D.h. einmal: $\frac{Q(\frac{\Delta x}{10})}{Q(\Delta x)} \approx \frac{1}{10}$ bzw. bei richtiger m-Wahl: $\boxed{\frac{Q(\frac{\Delta x}{10})}{Q(\Delta x)} \approx \frac{1}{100}}$
Im Besipiel: Richtige und zwei falsche m-Wahlen:

sin(1+x)=sin(1)+cos(1)x+xR(1,x)

$$\frac{\sin(1+x)-\sin(1)-(\cos(1)-.1)x}{\sin(1)+(\cos(1)-.1)x} = \frac{\sin(1+x)}{\sin(1)+\cos(1)x} - 1$$



Die Berechnung einiger expliziter Restterme: $+$

$$\frac{1}{x_0+\Delta x} = \frac{1}{x_0} + m\Delta x + \Delta x \boxed{R^m(x_0,\Delta x)}$$
$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} - m\Delta x\right) = \boxed{R^m(x_0,\Delta x)}$$

$$\frac{x_0-(x_0+\Delta x)-mx_0(x_0+\Delta x)\Delta x}{\Delta x x_0(x_0+\Delta x)} = \boxed{R^m(x_0,\Delta x)}$$
$$\frac{\Delta x(-1-mx_0^2)-mx_0\Delta x^2}{\Delta x} = (-1-mx_0^2) - mx_0\Delta x$$

Genau für m=-x_0^{-2} ist die Resttermbedingung erfüllt!

---

f(x)=x^n $\quad x_0 \quad \Delta x$

$$(x_o+\Delta x)^n = x_0^n + m\Delta x + \Delta x R(x_0,\Delta x)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x_0^{n-k}\Delta x^k - m\Delta x = \Delta x R(x_0,\Delta x)$$
$$(\mathrm{n}x_0^{n-1} - m)\Delta x + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x_0^{n-k}\Delta x^k = \Delta x R(x_0,\Delta x)$$

$$(\mathrm{n}x_0^{n-1} - m) + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x_0^{n-k}\Delta x^{k-1} = R(x_0,\Delta x)$$

Die Hierarchie der Informationsreduktion:

- Exakter Restterm $\mathrm{R}_f(x_0,\Delta x)$
- $\mathrm{R}_f(x_0,\Delta x)$ hat bei $\Delta x = 0$ eine Nullstelle
- Der REstterm wird fortgelassen (Tangentenapproximation!)

Übungsaufgaben (teilweise durchgegangen)

■ 1) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Zuordnungen:

x$\mapsto\sqrt{x^n(a-x)}$ n=1,2,3,4 a>0	x$\mapsto\frac{\sqrt{x}}{x+2}$	x$\mapsto x+\sqrt{x}$	x$\mapsto\sqrt{\sin^2(x)}$	x$\mapsto x\sqrt{1-x^2}$

■ 2) Diskutieren Sie (kurz) den Verlauf der zusammengesetzten Abbildung x$\mapsto\ln(\ln(x))$.

■ 3) Wie verhalten sich $\mathrm{e}^{\sin(x)}$, $\mathrm{e}^{3\sin(2x)}$ und $\mathrm{e}^{\sin^2(3x)}$ bei x=0? (Die bisherige Information reicht zur Antwort!)

■ 4) Was bewirken kleine Transformationen im Falle der Sinusfunktion? (Das heißt welche neuen Funktionen erhält man so? Formulieren Sie den Rechenausdruck und skizzieren sie den Graphen.

a) Dasselbe für x$\mapsto\sqrt{x}$ und x$\mapsto\ln(x)$. Welche Beobachtung macht man hinsichtlich der Zahl der Freiheitsgrade?

■ 5) Rationale Funktionen (=Quotienten zweier Polynome) erlauben immer eine Reihe von Termumformungen mit deren Hilfe man unterschiedliche Eigenschaften per Inspektion besser erkennen kann. Untersuchen Sie als Beispiel das Verhalten der folgenden Funktion:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2} = \frac{x^3-x-2}{(x-2)(x+2)} = \\ &= x+\frac{-2+3x}{(x-2)(x+2)} = x+\frac{\frac{-2}{x}+3}{x(1-\frac{2}{x})(1+\frac{2}{x})}\end{aligned}$$

Kann man Umformungen dieser Art systematisch vornehmen? Wieso kommt man im Beispiel ohne Polynomdivision aus?

■ 6) Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu

$$\mathrm{x}\mapsto\sin(ax)\quad \mathrm{a}>0\quad \mathrm{x}\mapsto\ln(x^3+1)\quad \mathrm{y}=\mathrm{x}+\sqrt{x^2+1}$$

(D.h. Bereiche geeignet festlegen, inversen Rechenausdruck bestimmen, Graphen skizzieren)

■ 7a) Exakter Restterm für $x\mapsto x^{-2}$

b) Wie lautet die Tangentenzerlegung von x$\mapsto x^{-2}$ um x_0=1 und um $\mathrm{x}_0=-2$ (im Rahmen der zweiten Denkfigur)?

■ 8) Die Ableitung von f(x)=$\mathrm{x}^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ ist $\mathrm{f}'(x_0)=\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}$. Das sei bekannt. Berechnen Sie jetzt $\sqrt[3]{8.01}=\sqrt[3]{8+0.01}$ exakt und in Tangentenapproximation. (Also $\mathrm{x}_0=8$). Dasselbe für $\sqrt[3]{8.001}$ und $\sqrt[3]{9}$.

■ 9) Bestimmen Sie die Ableitung von sin an der Stelle x_0 über die erste Denkfigur.

Zu 7a): $\Delta x R(x_0, \Delta x) = \frac{x_0^2-(x_0+\Delta x)^2-m\Delta x x_0^2(x_0+\Delta x)^2}{x_0^2(x_0+\Delta x)^2}$

$=\frac{-x_0\Delta x(2+mx_0^3)+\Delta x^2(..)+\Delta x^3(..)}{x_0^2(x_0+\Delta x)^2}$

m=-$\frac{2}{x_0^3} = -2x_0^{-3}$

---

8) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2 + 1 \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{12} = 2.0833$

$\sqrt[3]{9} = 2.0801$

$\sqrt[3]{8.01} = 2 + 0.01 \cdot \frac{1}{12} = 2.0008$

$\sqrt[3]{8.01} = 2.0008$

$$\frac{1}{(-2+\Delta x)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Delta x + \Delta x R_{h_{-2}}(-2, \Delta x)$$

Beginn von 9) $\sin(\mathrm{x}_0 + \Delta x) = \sin(x_0) + \cos(x_0)\Delta x + \Delta x R_{\sin}$

$=\sin(\mathrm{x}_0)\,(1+\cos(\Delta x)-1) + \cos(x_0)(\Delta x + \sin(\Delta x) - \Delta x)$

$=\sin(\mathrm{x}_0) + \cos(x_0)\Delta x + [\sin(x_0)(\cos\Delta x - 1) + \cos(x_0)(\sin\Delta x - \Delta x)]$

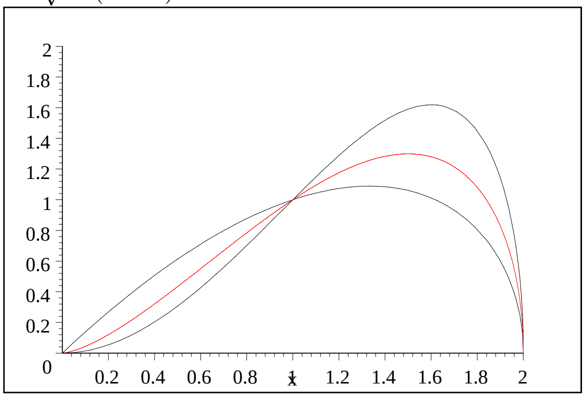
$=\sin(\mathrm{x}_0) + \cos(x_0)\Delta x + \Delta x\left[\sin(x_0)\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x} + \cos(x_0)(\frac{\sin\Delta x-\Delta x}{\Delta x})\right]$

Beweis der Resttermeigenschaft im Skript!

---

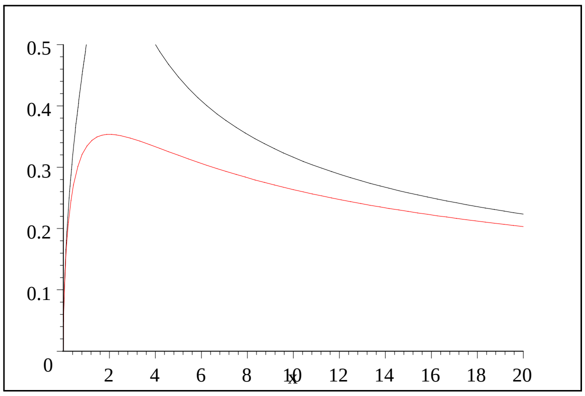
zu 1)

$\sqrt{x^2(2-x)}$

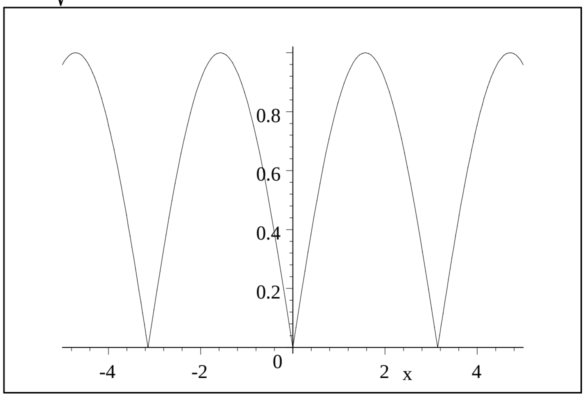


$\frac{\sqrt{x}}{x+2}$ x=0 $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ x=-2 große x $\approx$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{\sqrt{x}}{x+2}$



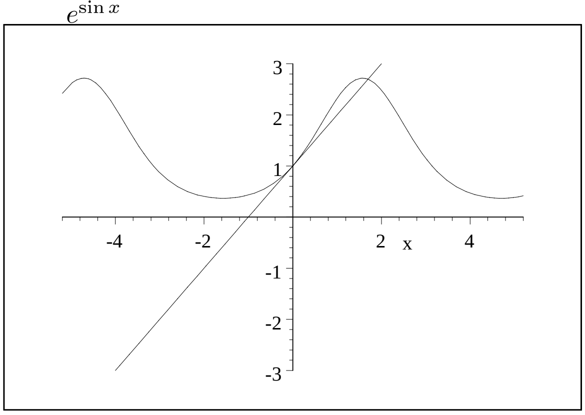
$\sqrt{\sin^2(x)}$



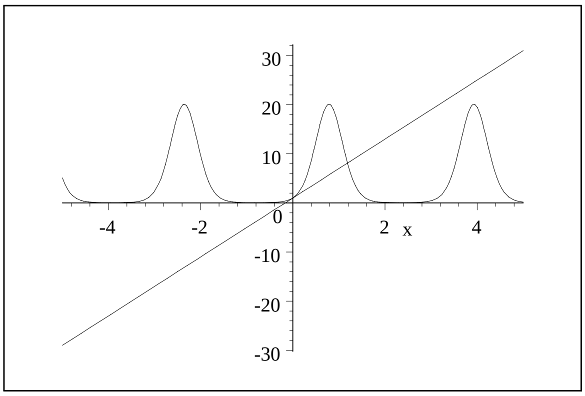
$\log(\log(10^6))$

Wie verhalten sich $\mathrm{e}^{\sin(x)}$, $\mathrm{e}^{3\sin(2x)}$ und $\mathrm{e}^{\sin^2(3x)}$ bei x=0?

$e^{\sin x}$



1+6x $\quad e^{3\sin(2x)} \quad 1+6x$



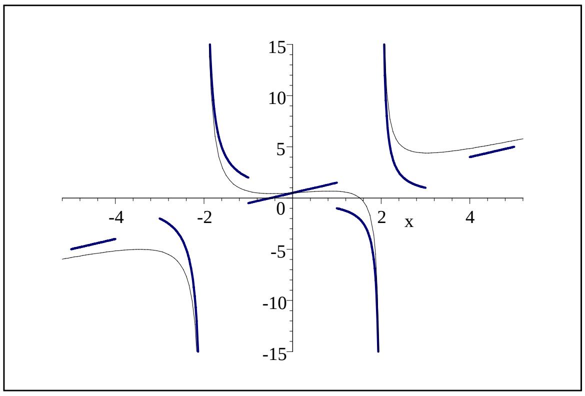
$$x \mapsto x + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x^3-x-2}{(x-2)(x+2)}$$

Verhalten bei x=0 wie y=x+$\frac{1}{2}$ / Pole vom Typ $\frac{1}{x}$ bei x=2 und x=-2 (kleine Transformationen / y≈ x für sehr große x. Das genügt zu Interpolation

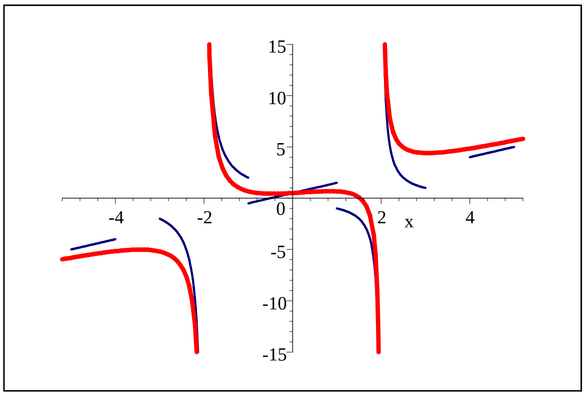
Es bleibt als offenen Fragen: Lage der Extremstellen und gibt es ein oder drei Nullstellen.

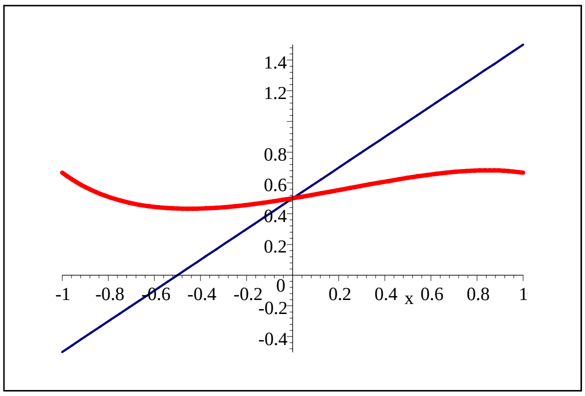
Separate Diskussion der Nennerfunktion y=x$^3 - x - 2$ zeigt, dass nur eine Nullstelle vorliegt.

Das gibt folgende Näherungen:



Der exakte Graph (rot)





Das Verhalten bei x=0 ist nicht richtig. Wieso. (Unsere Dominanzregel 8.3.31 galt für Produkte, nicht für Summen!! Sie wurde hier undiskutiert baiv verallgemeinert!!)

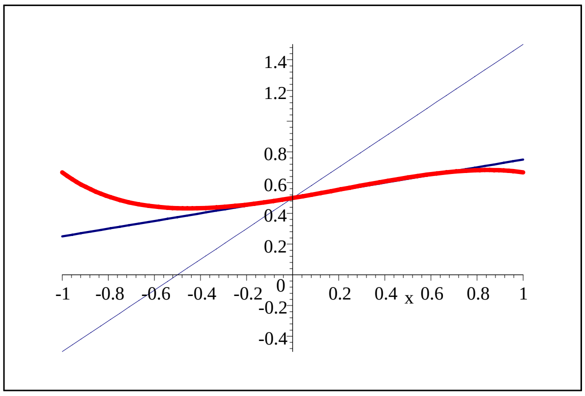
Wir bilden die Tangentenzerlegung der beiden Polsummanden um x=0 und addieren alle drei Beiträge. Wir wissen f(x)=$\frac{1}{x-a}$ hat Ableitung $f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$, Das gibt mit $x_0 = 0$ und x statt Δx :

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1x + x \cdot 0 \\ \frac{1}{x-2} &= \frac{1}{-2} + \frac{-1}{4}x + xR_1 \\ \frac{2}{x+2} &= 1 + 2\frac{-1}{4}x + xR_2 \end{aligned}$$

Bilanzsumme

$$x + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \ldots$$

Wir erwarten bei x=0 also ein Verhalten wie y=$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$ nicht aber wie naiv vermutet y=$\frac{1}{2} + x$!!! Die geänderte Figur ist viel besser. Die Herleitung zeigt, dass man über die Tangentenzerlegung zu gehen hat!



$$x^3 - x - 2$$

4.10.06

Zu dem einen schlimmen Fehlverhalten in der Probeklausur:

Überlegen Sie sich (kurz) Argumente, dass und warum für Vektoren i.a. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \neq \vec{a}^2\vec{b}^2$ ist.

Nochmals zur letzten Übung von Montag. Was ist daraus zu lernen?

- Das Resultat zur Bestimmung eines Dominanzterms bei Nullstellen und Polen:

- **Die Nullstellendominanzregel lautet** wie folgt:
- Es sei F(x)=f(x)g(x)   (Bezeichnungen)
- (1) f habe bei x_0 eine Nullstelle und dort gelte als Nullstellenbeschreibung näherungsweise $f(x) \approx N(x)$. (1a) Meist wird man $N(x) = A(x - x_0)^\alpha$ haben mit geeigneten Konstanten A und α.
- (2) Weiter sei $g(x_0) = b$ mit b$\neq$ 0.
- **Dann gilt näherungsweise (in der Nähe von $\mathbf{x_0}$)**

$$F(x) = f(x)g(x) \approx bN(x),$$

$$\text{speziell} \quad F(x) \approx bA(x - x_0)^\alpha.$$

Ist das auf unseren Fall anwendbar? $\boxed{x \mapsto F(x) = x + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x^3-x-2}{(x-2)(x+2)}}$

- F(x)=f(x)+$g_1(x) + g_2(x)$ Nein!!!!
- F(x)=f(x)$\cdot g(x)$ f(x)=$x^3 - x - 2$ g(x)=$\frac{1}{(x_2-2)(x+2)}$ ....Nein, f(0)$\neq$ 0
- F(x)=$\frac{x}{(x-2)(x-1)}$ oder   F(x)=$\frac{x(x-7)}{x^3-x-2}$ Hier geht es!!!

Die allgemeine Form eines mathematischen Resultates:

Satz: (Hilfssatz,....)   **Sei ....** (eine Reihe potentiell wahrer Aussagen)
Dann gilt ..... (.....eine oder mehrere Aussagen)

Wie ist das zu interpretieren???

Auch (mathematische) Resultate, die eine andere Form zu haben **scheinen**, haben diese Struktur. Nehmen wir als Beispiel die Aussage:

Die Zahl π ist irrational

Sie besagt eigentlich

Sei π (Bezeichnung!) die früher eingef. Kreiszahl.
Dann ist π irrational.

Der Beweis ist recht hart.

Fragen, die man im Schlaf beantworten können muss:

■ Wie lautet die Tangentenzerlegung von f um $x_0 \varepsilon D$?
■ Was besagt dabei die "Resttermbedingung"?

Formulieren Sie die beiden Denkfiguren zur Tangentenzerlegung in dieser Weise analog.

Punkt Hinweis: Wichtig ist dabei die abkürzenden Aussage "Sei f=(D,x$\longmapsto f(x), \mathbb{R}$) und x_0 $\in$D.. f ist in x_0 differenzierbar"

1. Wofür steht das?   xxxx
2. Formulierung 2. Denkfigur:
3. Formulierung 1. Denkfigur:.
4. Formulierung der Ableitungsregeln, z.B. der Produktregel

Weitere derartige Beispiele: Newtonverfahren oder Wassertiefe (aus dem Text).

Wir nehmen als Beispiel die Herleitung der beiden Formeln, die für das Wasserbeckentiefeproblem benötigt wurden.

Zur Wasserbeckentiefe.

(9.1.56) In Kap.1.7 haben wir ein Formel zur Bestimmung der virtuellen Wasserbeckentiefe angegeben. Genauer war es eine Formel für den Schnittpunkt der Verlängerung zweier benachbarter Luftstrahlen. Können Sie dies Problem auf herkömmliche Weise lösen? Versuchen Sie das einmal. Es geht um die Formeln in (1.7.12).

Das dortige Problem:

(1.7.11) Aber wir können auch exakt rechnen. Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Luftgeraden (in Normalform y=mx+b, einschließlich der Verlängerung ins Wasser). m und b werden durch ε festgelegt. Wegen b=H=T-S erhalten wir $b = b(\varepsilon)$ sofort. M folgt über $m = \frac{S}{w} = \frac{S(\varepsilon)}{T\tan(\varepsilon)} = \frac{1}{\tan(asn(n\sin(\varepsilon))}$ wieder aus den Ausgangsgleichungen. Ergebnis:

$$\boxed{m(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varepsilon)}}{n\sin(\varepsilon)} \qquad b(\varepsilon) = T\left\{1 - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varepsilon)}}{n\cos(\varepsilon)}\right\}}$$

Also: Die beiden Geraden y=m$(\varepsilon)x + b(\varepsilon)$ und y=m$(\varepsilon + \Delta\varepsilon)x + b(\varepsilon + \Delta\varepsilon)$ für "ganz kleines $\Delta\varepsilon$ " schneiden!

Statt dises sehr speziellen Problems behandeln wir folgendes ganz allgemeine Problem:

- – Gegeben eine Schar von Geraden, die durch einen reellen Parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$ festgelegt werden.
  – Für jede Gerade haben haben wir eine beschreibende Geradengleichung y=m$(\varepsilon)x + b(\varepsilon)$
  – Gesucht ist der Schnittpunkt zweier "infinitesimal benachbarter" dieser Geraden

(9.1.57) Jetzt nutzen wir unser Werkzeug der Tangentenzerlegung. Wir haben eine erste Gerade, die durch die Gleichung $\boxed{y = m(\varepsilon)x + b(\varepsilon)}$ gegeben ist. Die Werte von ε legten die einzelnen Strahlgeraden fest. Und eine benachbarte Gerade, die durch $\boxed{y = m(\varepsilon + \Delta\varepsilon)x + b(\varepsilon + \Delta\varepsilon)}$ gegeben wird. Gleichsetzen ergibt wie üblich für den Schnittpunkt die Bedingung $\boxed{m(\varepsilon + \Delta\varepsilon)x_s + b(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = m(\varepsilon)x + b(\varepsilon)}$. Die beiden Funktionen m und b seien glatt, sollen also eine Tangentenzerlegung besitzen. Etwa

$$\begin{aligned}
m(\varepsilon + \Delta\varepsilon) &= m(\varepsilon) + m'(\varepsilon)\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_m(\varepsilon, \Delta\varepsilon). \\
b(\varepsilon + \Delta\varepsilon) &= b(\varepsilon) + b'(\varepsilon)\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_b(\varepsilon, \Delta\varepsilon) \\
m(\varepsilon + \Delta\varepsilon)x_S + b(\varepsilon + \Delta\varepsilon) &= m(\varepsilon)x_S + b(\varepsilon) \\
(m(\varepsilon) + m'(\varepsilon)\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_m)\, x_s + (b(\varepsilon) + b'(\varepsilon)\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_b)) &= m(\varepsilon)x_S + b(\varepsilon) \\
m'(\varepsilon)x_S\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_m x_s + b'(\varepsilon)\Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon R_b &= 0 \\
m'(\varepsilon)x_S + R_m(\Delta\varepsilon)x_s + b'(\varepsilon) + R_b(..) &= 0 \\
m'(\varepsilon)x_S + b'(\varepsilon) &= 0 \\
& \boxed{x_S = -\frac{b'(\varepsilon)}{m'(\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

Anwendungsbeipiel: Berechne den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte der Normalparabel.

Gleichung: y=x^2 / Steigung im Punkte (a,a^2) ist 2a / Steigung der Normalen durch diesen Punkt ist -$\frac{1}{2a}$ / Gleichung der Normalen: y=$a^2 + \frac{-1}{2a}$(x-a)=$\left(-\frac{1}{2a}\right) x + (a^2 + \frac{1}{2})$. Wir suchen den Schnitt

zweier "infinitesimal benachbarter" dieser Geraden. Dann gibt die hergeleitete Formel für die x-Koordinate $x_S = -\frac{2a}{\frac{1}{2}a^{-2}} = -4a^3$. Einsetzen in die Normalengleichung gibt den zugehörigen y-Wert zu

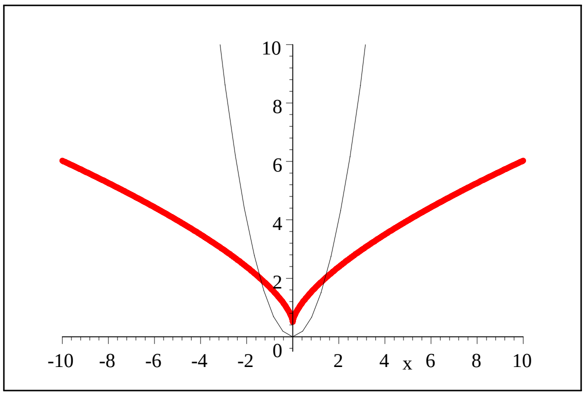
$$y = \frac{-1}{2a}(-4a^3) + a^2 + \frac{1}{2} = 3a^2 + \frac{1}{2}$$

Damit ist $\vec{x}_K(a) = (-4a^3, 3a^2 + \frac{1}{2})$ eine Parametrisierung der gesuchten Figur. Elimination von a liefert

$$\begin{array}{lll} x=-4a^3 & a^2 = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}^2 = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{16}} & \\ y=3a^2 + \frac{1}{2} & & \boxed{y=\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}} \end{array}$$

Die zugehörige Kurve ist die in der Animation gezeigte:

x^2



Die nachfolgend beschriebene Rechnung unbedingt ausführen!

- – Bei Einsetzen der Tangentenzerlegungen in die Bedingungsgleichung fallen die konstanten Terme heraus,
  – man darf durch $\Delta\varepsilon$ teilen und anschließend zum Grenzwert $\Delta\varepsilon \to 0$ übergehen,
  – wobei die Resttermbeiträge fortfallen.
  – **Das Ergebnis ist die erste in (1.7.12) angegebene Formel**.
  – Die zweite folgt durch Einsetzen in eine der Geradengleichungen. **Fertig.**

(9.1.58) Das Vorgehen hier ist dasselbe wie beim Eindeutigkeitsbeweis der Tangentenzerlegung in (9.1.23)! Immer wird die Tangentenzerlegung als gültige Gleichung gezielt eingesetzt. Hat man als zentralenAusgangspunkt dagegen den Zahlwert der Ableitung, dann nützt einem das in einer derartigen Problemsituation wenig.

f x_0 f(x_0) ??

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot R_f(x_0,\Delta x)$$

$$F(x)=\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{1-x^2}\quad \text{Verhalten bei x=1}$$

$$F(x)=\sqrt[3]{1+x}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1+x}(1-x)^{\frac{5}{6}}\approx\sqrt[3]{2}(1-x)^{\frac{5}{6}}$$

Die Ableitungsregeln:

- **Seien** f,g in x_0 differenzierbar (1) mit Ableitungen $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$.
  - **Dann** ist auch F(x) in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)\qquad \text{für } F(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$$
$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\qquad \text{für } F(x)=f(x)g(x)$$

Entsprechend die weiteren Regeln!!!

Beweis: Laut Voraussetzung liefert die zweite Denkfigur die gültigen Gleichungen

$$f(x_0+\Delta x)=(f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\Delta x R_f(x_0,\Delta x))\qquad R_f(x_0,\Delta x)\rightarrow_{\Delta x\to 0}0$$
$$g(x_0+\Delta x)=(g(x_0)+g'(x_0)\Delta x+\Delta x R_g(x_0,\Delta x))\qquad R_g(x_0,\Delta x)\rightarrow_{\Delta x\to 0}0$$

Was ist ??$F'(x_0)$??

Einsetzen, ausmultiplizieren und sortieren gibt:

$$F(x_0+\Delta x)=f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)$$
$$=f(x_0)g(x_0)+\Delta x\,[f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)])+\Delta x\,[ist\ \text{ok}]$$

Restermbedingung ist erfüllt!

Dann folgt mit der ersten Denkfigur die Produktregel:

$$F'(x)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$$

Linearität analog

$F(x)=\frac{1}{f(x)}$ Mit Argumentationsfehler:

$$F(x)f(x)=1$$
$$F'(x_0)f(x_0)+F(x_0)f'(x_0)=0$$
$$\boxed{F'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}}\quad \text{Ergebnis ist richtig:}$$

Korrekter Beweis:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\Delta x R_f(x_0,\Delta x)$$
$$h_{-1}(y_0+\Delta y)=\frac{1}{y_0}+\left(\frac{-1}{y_0^2}\right)\Delta y+\Delta y R_{h_{-1}}(...)\quad \text{alle } \Delta y$$
$$F(x_0+\Delta x)=\frac{1}{f(x_0+\Delta x)}=\frac{1}{f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)\Delta x+\Delta x R_f(x_0,\Delta x)}_{\Delta y}}=\frac{1}{y_0+\Delta y}$$
$$=\frac{1}{y_0}+\left(\frac{-1}{y_0^2}\right)\Delta y+\Delta y R_{h_{-1}}(...)$$
$$=\frac{1}{f(x_0)}+\left(\frac{-1}{y_0^2}\right)(f'(x_0)\Delta x+\Delta x R_f(x_0,\Delta x))+\Delta y R_{h_{-1}}(...)$$

$$=\frac{1}{f(x_0)} + \left(\frac{-1}{y_0^2}\right) f'(x_0)\Delta x + \Delta x \left[\left(\frac{-1}{y_0^2}\right) R_f(x_0,\Delta x) + \frac{\Delta y}{\Delta x} R_{h_{-1}}(y_0,\Delta y)\right]$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}}$$

Beispiel: F(x)=$\frac{1}{x^2}$ $\quad$ $F'(x_0) = \frac{-2x_0}{x_0^4} = -2x_0^{-3}$

Quotientenregel: f,g in x_0 diff. Weiter sei $g(x_0) \neq 0$.

Dann ist F=$\frac{f}{g}$ in x_0 diff. und es gilt $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$

Vorher L,P u. R bewiesen.

Beweis: Idee $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.

Da nach (R) auch $\frac{1}{f}$ in x_0 diff. ist (f diff) kann man P anwenden. Das gibt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)(x_0) = f'^{(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Anwendungsschema: Nacheinander auffüllen:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{() - ()}{g^2(x_0)} = \frac{\square g(x_0) - f(x_0)\square}{g^2(x_0)} = ..$$

Rest u.U. per Nebenrechnung!

Anwendungen F(x)=$\frac{x^3-2x+1}{x^2-4}$ $\quad$ $F'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2-4)-(x^3-2x+1)2x}{(x^2-4)^2} =$

$$\tan'(x_0) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0) = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2 x_0$$

Kettenregel:

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0,\Delta x)$

$g(y_0 + \Delta y) = g(y_0) + g'(y_0)\Delta y + \Delta y R_g(y_0,\Delta y)$ $\quad$ alle Δy

F(x)=g(f(x)) $\quad$ $F'(x_0) = \boxed{g'(f(x_0))f'(x_0)}$

$F(x_0 + \Delta x) = \boxed{F(x_0)} + \Delta x \boxed{F'(x_0)} + \Delta x \boxed{\text{Resttbed??}}$

$$g(f(x_0+\Delta x)) = g(f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x + \Delta x R_f(x_0,\Delta x)}_{\Delta y}) = g(y_0 + \Delta y)$$

$$= g(y_0) + g'(y_0)\Delta y + \Delta y R_g(y_0,\Delta y)$$

$$= \underbrace{g(f(x_0))} + \boxed{g'(f(x_0))f'(x_0)}\Delta x + \Delta x \cdot \boxed{g'(f(x_0))R_f(x_0,\Delta x) + \frac{\Delta y}{\Delta x} R_g(y_0,\Delta y)}$$

Wie anwenden (Skript, den Schicksalslauf von x verfolgen!)

$$\begin{array}{ll} x \longmapsto f(x) & \longmapsto g(f(x) \\ \text{y} & \longmapsto g(y) \\ F'(x) = f'(x)\cdot & \cdot g'(f(x)) \end{array}$$

F(x)=$3e^{7x^2-2}$

$$\text{x} \underbrace{\longmapsto 7x^2-2}_{14x} = y \underbrace{\longmapsto 3e^y}_{3e^y} \qquad \boxed{\text{F}'(x) = 42xe^{7x^2-2}}$$

$$\text{F(x)}=\frac{e^x(\cos x+1)}{\sin(x)} \qquad \frac{e^x(\cos x-\sin x+1)\cdot\sin x-e^x(\cos x+1)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{e^x}{\sin^2 x}\left[\cos x\sin x-\sin^2 x+\sin x-\cos^2 x-\cos x\right]$$

$$=\frac{e^x}{\sin^2 x}\left[-1+\cos x\sin x+\sin x-\cos x\right]$$

$$(e^x(\cos x+1))' = e^x(\cos x+1)+e^x(-\sin x)$$

$$=\text{e}^x(\cos x-\sin x+1)$$

$$\text{f(x)=sin(sin(x}^2\text{))}$$

$$\text{f}'(x) = 2x\cos x^2\cdot\cos(\sin(x^2))$$

$$\text{f(t)=(t+e}^{\sin t}\text{)}^{17}$$

$$\text{f}'(t) = (1+\cos t\cdot e^{\sin t})\cdot 17(t+e^{\sin t})^{16}$$

Die Ableitung der inversen Abbildung

Sei f in x_0 und f^{-1} in $\text{y}_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Weiter sei $\text{f}'(x_0)\neq 0$. Dann kann man wie fogt rechnen und findet:

$$\text{f}^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{f}(f^{-1}(y)) = y \qquad \left(f^{-1}\right)'(y)$$

$$\text{y}\longmapsto f^{-1}(y) = z\longmapsto f(z)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)\cdot f\ '(f^{-1}(y)) = 1$$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f\ '(f^{-1}(y))}}$$

$$\ln'(y) \qquad \text{f(x)=y=e}^x \quad \text{f}'(x) = e^x \quad \text{f}^{-1}(y) = \ln(y)$$

Die wichtigsten Beispiele:

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\text{f(x)=x}^3 \quad \text{x=}\sqrt[3]{y} = f^{-1}(y) \qquad \text{f}'(x) = 3x^2 \quad f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} =$$

$$\text{atn}'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(atn(y))} = \frac{1}{1+(\tan(atn(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\text{y=f(x)=tanx} \quad \text{f}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \qquad \text{f}^{-1}(y) = atn(y)$$

$$\text{asn}'(y) = \frac{1}{\cos(asn(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(asn(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\text{sinx=y=f(x)} \quad \text{f}'(x) = \cos(x) \quad \text{f}^{-1}(y) = asn(y)$$

5.10. 06

Zum Aufwärmen (und das sollte jeder können!)

■ f(t)=$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$ $f'(t) = ..?..$ Gleichung der Tangente zum Punkte (T,f(T)) für T=$\frac{2\pi}{\omega}$? (Bezug: Kap.1)

■ F(x)=$\frac{x}{x^2-2}$ Skizze des Graphen? $F'(x) = \frac{1(x^2-2)-x(2x)}{(x^2-2)^2} = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}..?..$

■ G(x)=$(3+\sin^2 x)^5$ $G'(x) = 2\sin x\cos x\cdot 5(3+\sin^2(x))^4$

$G'(\frac{\pi}{4}) = 5(3+\frac{1}{2})^4..???$ Tangentenzerlegung von G um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$G(\frac{\pi}{4}+\Delta x) = (3+\frac{1}{2})^5 + 5(3+\frac{1}{2})^4\Delta x + \Delta x R_G(\frac{\pi}{4},\Delta x)$

■ Unterschied "Ableitung in x_0" und "Ableitungsfunktion" Beispiel Exponentialfunktion. exp(x)=e^x $\exp'(x) = e^x$.

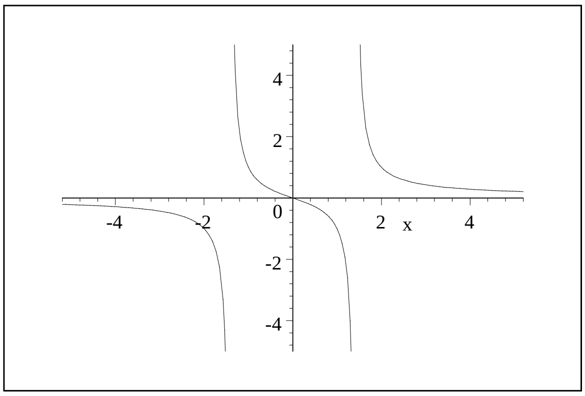
h(x)=$x^x = e^{x\ln x}$ $h'(x) = (1\ln x + 1)x^x$

$f'(t) = e^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t)\right)$ / $f'(T) = \omega e^{-\alpha T}$ / y=$y_0 + m$(t-T)

$$\boxed{y=\omega e^{-\alpha T}(t-T)}$$

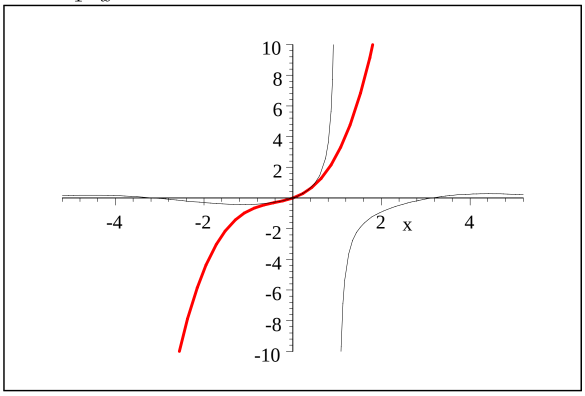
F(x)=$\frac{x}{x^2-2} = \frac{x}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$

x=0 y=-$\frac{1}{2}$x $\frac{1}{2}\frac{1}{x-\sqrt{2}}$



$$\frac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + O\left(x^5\right)$$

$\frac{\sin x}{1-x}$



Inhaltsübersicht Kap. 10

- 10.1 Die Bestimmung glatter Extremwerte
- 10.2 Kurvendisykussion
  - 10.2.1 Orientierungsschema zur Kurvendiskussion
  - 10.2.2 Beispiele
- 10.3 Der Satz vom beschränkten Zuwachs
  - 10.3.1 Anwendungsbeipiele
    - 10.3.1a Monotonie
    - 10.3.1b Schranken für den Zuwachs
    - 10.3.1c Globale Fehlerabschätzung für die Tangentenapproximation
    - 10.3.1d Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz

---

Definition von "Extremstelle" bzw. "Extremwert" Genauere Begiffsentfaltung.
Von der anschaulich-sprachlichen zur formalen Definition!

f=(D,x$\longmapsto f(x), \mathbb{R}$) . f hat in $x_0 \in D$ ein Maximum
$f(x_0) >\geq f(x)$ für alle x mit $x \neq x_0$ global Max.
$f(x_0) \geq f(x)$ Für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ *gilt* $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $|x-x_0| \leq \varepsilon$. Lok. Max.

Notwendige und hinreichende Bedingung "....Kandidat für eine glatte Extremstelle"
(Definition "Wendepunkt" : Kandidatenbedingung?)
Definition "monoton..." Bedingung?

Für alle x_2 und $x_1 \in D$ mit $x_2 > x_1$ soll gelten $f(x_2) \geq f(x_1)$

10.2.1 Orientierungsschema zur Kurvendiskussion

Wir beginnen mit einer Liste von Punkten, die man beim Vertrautmachen mit dem Verhalten einer funktion beachten sollte. Im jeweiligen Einzelfall können einige dieser Punkte nicht einschlägig sein, sollten dann übergangen werden. Andere wird man je nach Situation fortlassen, wenn sie zu aufwendig werden. Mit etwas Übung sieht man sofort, welche Punkte jeweils nützlich und wichtig sind. Zur Einübung kann man die Liste jedoch zunächst nach Art einer Checkliste durchgehen. Dies sollte man auch für die nachfolgende diskutierten Beispiele tun. Die inhaltlichen Grundlagen für die angeführten Punkte haben wir bereits besprochen. Hier stellen wir sie nur noch einmal systematisch zusammen.

0⧫) **Analyse der spezifischen Aufgabenstellung**

- Rollenverteilung - äußere Parameter, unabhängige Variable...?
- Spezifische Problemstellungen.

1⧫) Inspektion des Rechenausdrucks

- Klassifikation (Polynom, rational,....)
- Bau - Verlaufsdiagramm

- Vereinfachung durch kleine Transformationen?
- Dimensionslose oder geometrische Größen einführbar?
- Sonstige Umformungen des Rechenausdrucks
- Von Aufgabensituation verlangter bzw. maximaler Definitionsbereich? Bild?

2♦) **Halbquantitative (ev.** *geistige)* **Skizze des Graphen. In dieser Skizze sollten die Resultate und verbleibenden Fragen geeignet eingezeichnet werden,** so daß man stets einen ganzheitlichen schnellen Zugriff zu allen bereits erlangten Informationen besitzt.

- Leichte Werte? (Etwa x=0?)
- Symmetrieeigenschaften?
- Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften?
- Dominanzargumente (x$\approx$ 0, x$\rightarrow \pm\infty$, Nullstellen, Pole sind Kandidaten)
- Besondere Punkte aufspüren (Nullstellen, Extremstellen, Polstellen, Wendepunkte....). Die Existenz derartigen Punkte eventuell zunächst qualitativ feststellen.(Skizze!)
- Unbestimmtheitsstellen etwa $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auffinden und analysieren.
- Durch äußere Parameter bedingte Fallunterscheidungen?

3♦) **Was bleibt offen** ?

- Was bleibt offen? Welche qualitativ bekannten Punkte sind noch quantitativ festzulegen? (Extremwerte über $f'(x) = 0$, Wendepunkte über $f''(x) = 0$ usw. Die Art der Extremwerte folgt meist bereits eindeutig aus der qualitat. Skizze)
- Ergibt die Fragestellung weitere fallspezifische zu behandelnde Fragen?

4♦) **Gezielte Analyse der in 3) aufgeworfenen Fragen**

- Ist ein genauer Graph - Computer - erforderlich. Welcher Bereich? Für welche Werte eventueller äußerer Parameter?
- Rechnerische Bestimmung nach 3) gesuchter Punkte. (Eventuell Newton, Computeralgebrasystem)

5♦) **Beantwortung der spezifischen Fragen der Aufgabenstellung**

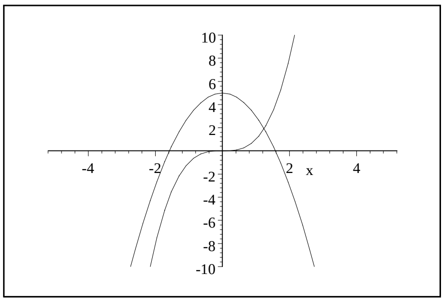
- Konsistenz-Kontrolle

---

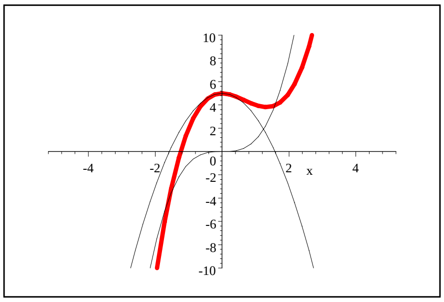
f(x)=$x^3 - 2x^2 + 5$

- Weder gerade noch ungerade
- Große |x| wie y=x^3
- Um x=0 wie y=5-2x^2

- Nullstelle zwischen -1 und -2.



- Offene Fragen: Extrema, Wendepunkt?
  - f$'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$ x$_{e1} = 0$ x$_{e2} = \frac{4}{3}$ (Notwendig Max. Min.)
  - Wendepunkt f$''(x)$ =6x-4 x$_w = \frac{2}{3}$
  - Zugeh. Werte....
- Graph:



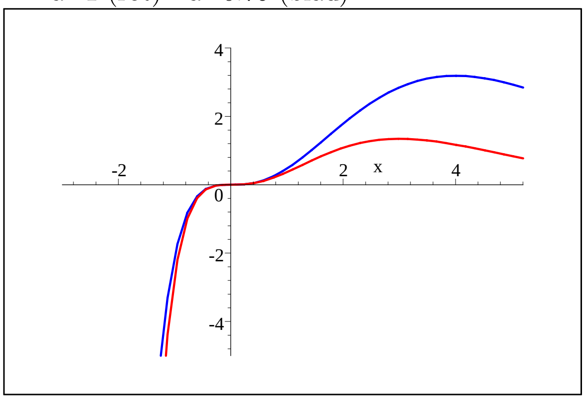
F$_a$=$(\mathbb{R}, x \mapsto x^3e^{-ax}, \mathbb{R})$ a>0

x=0 y=x^3

x>>0 gegen Null

x<<0 gegen -∞

x^3e^{-ax} a=1 (rot) a=0.75 (blau)



F$'_a(x) = (3x^2 + (-a)x^3)e^{-ax} = x^2(3-ax)e^{-ax}$

$$x_M = \frac{3}{a} \qquad y_M = \frac{27}{a^3}e^{-3}$$
$$F_a''(x) = \left[2x(3-ax) + x^2(-a) + x^2(3-ax)(-a)\right] e^{-ax}$$
$$=(6x+x^2(-2a-a-3a)+a^2x^3)e^{-ax}$$
$$x(6+(-6a)x+a^2x^2)e^{-ax}$$

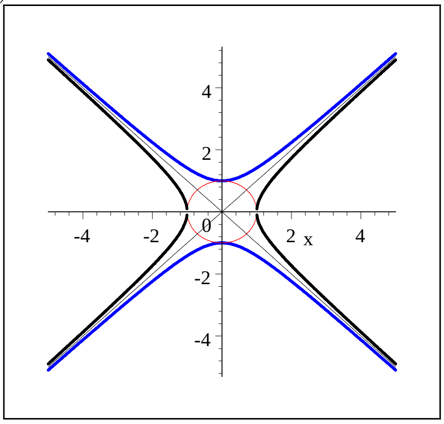
$$f(x) = e^{-x}\sqrt{x^2-1}$$

$$|x| \geq 1 \quad \text{Vorzeichen positiv}$$
$$\text{Umf} \quad e^{-x}\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$$

$$x{=}1 \quad \sqrt{x-1}\sqrt{2}e^{-1}$$
$$x{-}1 \quad \sqrt{-(x+1)}\sqrt{2}e^{1}$$

Einschub

$$w(x)=\sqrt{x^2-1} = (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \qquad w'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt[2]{x^2-1}}$$
$$w(x)= \sqrt{x^2-1}$$

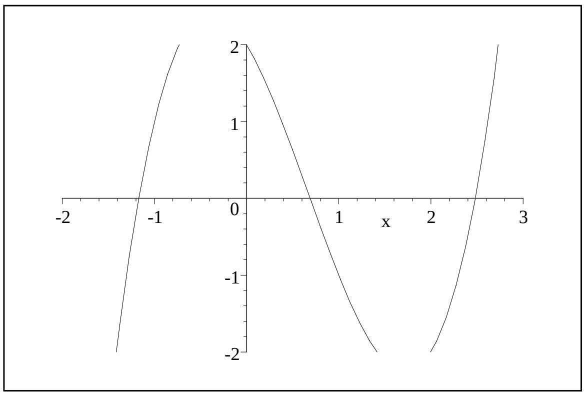


$$f'(x) = e^{-x}\left(-\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$
$$=\frac{-e^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1-x\right) = e^{-x}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1+x-x^2)$$

$$x_{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

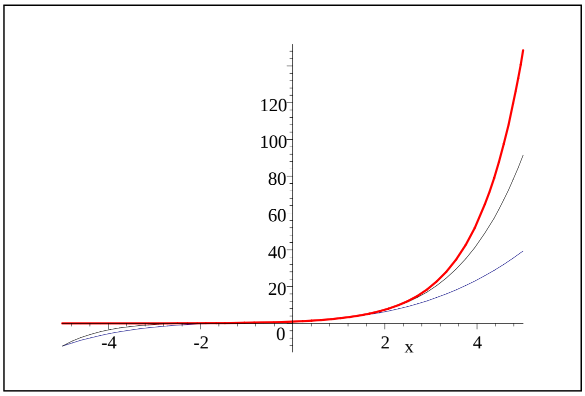
$$f''(x) = e^{-x}\left((-1)\frac{(1+x-x^2)}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x(1+x-x^2)}{-2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-2x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$=\frac{e^{-x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[(-1)(1+x-x^2)(x^2-1) - x(1+x-x^2) + (1-2x)(x^2-1)\right]$$
$$=\frac{e^{-x}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}(x^3-2x^2-2x+2)$$

Zählerpolynom x^3-2x^2-2x+2 bestimmt die Nullstellen



Ist stimmig!

Der SAtzu vom beschränkten Zuwachs: Anwendung auf die Exponetiafunktion gibt $\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$ als gültige Ungleichung für x>0.. einige Beispiele



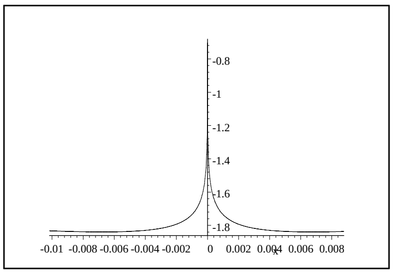
Diese Summe gibt auch tatsächlich die Potenzreihe der Exponetialfunktion und damit deren Definition:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Damit erhält auch $\mathrm{e}^{i\alpha}$ in der Eulerschen Formel neue Bedeutung. Man erhält (über Summenrechnun g) die Reihen für sin und cos:

$$\mathrm{e}^{-i\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\alpha^{2s}}{(2s)!}}_{\cos\alpha} + i \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\alpha^{2s+1}}{(2s+1)!}}_{\sin\alpha}$$

Die Funktion $y=|x|^{0.2}\ln|x|$ hat bei x=0 eine Nullstelle, die nur schwer zu entdecken ist.



Lage des Extremwertes:

$$\text{f(x)=x}^{\frac{1}{5}}\ln x \qquad \text{f}'(x) = \tfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\ln x + x^{-\frac{4}{5}} = x^{-\frac{4}{5}}(\tfrac{1}{5}\ln x + 1)$$
$$\text{lnx}_e = -5 \quad \text{x}_e = e^{-5} = 6. \times 10^{-3}$$

Kurzeinführung Gradient:

★Was sind Skalarfelder? Zugehörige Rechenausdrucke

$$\vec{x} \longmapsto z(\vec{x}) \qquad \vec{x}^2 \quad (\vec{a}\cdot\vec{x}) \qquad \text{s}(\vec{x})=\tfrac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}^2+\vec{x}^2}$$

★Veranschaulichung mit Äquipotentialflächen (Niveauflächen)

★*Wie* erhält man mit möglichst wenig Aufawand möglichst viel Information über das lokale Verhalten des Feldes: Ideal wäre ein Vektor mit **Richtung der stärksten Änderung** und Länge gleich **Feldänderungsrate in diesxe Richtung!**

Ausdehnung der Tangentenzerlegung liefert genau dieses!

$$\text{Szenenbild:} \quad \vec{x} \longmapsto s(\vec{x}) \quad \vec{x}_0 \;\; \text{s}_0 = s(\vec{x}_0)$$

$$\boxed{\boxed{\text{s}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = s(\vec{x}_0) + (\Delta\vec{x}\cdot\vec{m}) + |\Delta\vec{x}|R_s(\vec{x}_0,\Delta\vec{x})}}$$

$$\text{Feldänderung=}\ \Delta s = (\Delta\vec{x}\cdot\vec{m}) = |\Delta\vec{x}||\vec{m}|\ \cos\theta \qquad \underbrace{ds = d\vec{r}\cdot grads(\vec{x}_0)}$$

Beispiele:

$$\text{s}(\vec{x}) = \vec{x}^2 \qquad (\vec{x}_0 + \Delta\vec{x})^2 = \vec{x}_0^2 + 2\vec{x}_0\cdot\Delta\vec{x} + |\Delta\vec{x}||\Delta\vec{x}|$$

$$grad(\vec{x}^2) = 2\vec{x}$$

$$\text{s}(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{x}^2 = y \longmapsto \sqrt{y}$$
$$2\vec{x}\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{\vec{x}^2}}=\tfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \qquad \vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})$$

$$\text{U}(\vec{x}) = \tfrac{\alpha}{|\vec{x}|} \qquad \vec{x} \longmapsto |\vec{x}| = y \longmapsto \tfrac{\alpha}{y}$$

Das geht alles weitgehend analog zum Fall der reellen Funktionen. Insbesondere der Beweis der Ableitungsregeln!

Neu ist: Die Skalarfelder lassen sich auch in Koordinatenform darstellen.

$$\text{s}(\vec{x}) \quad \text{s}^K(x,y,z) = \text{s}^K(\vec{x}^K)$$
$$\text{s}(\vec{x}) = \vec{x}^2 \quad \text{s}^K(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\text{s}_1(\vec{x}) = |\vec{x}|$$

Bestimmungsmethode mit partiellen Ableitungen

$$\text{grad}^K s^K(x,y,z) = (\tfrac{\partial s^K}{\partial x},\ \tfrac{\partial s^K}{\partial y}.,.\tfrac{\partial s^K}{\partial y} \quad)$$
$$\text{V}^K\text{(x,y,z)=y}^2 - 3xyz^2$$
$$\text{grad}^K V^K(x,y,z) = \big(3yz^2, 2y - 3xz^2, -6xyz\big)$$

$\boxed{6.10.06}$

Der (für die Physik) wichtigste Teil aus Kap. 11.

★ Beschreibung von Bewegungsvorgängen im Konfigurationsraum erfolgt über $\boxed{\textbf{Bahnkurven}}$:

$$t \longmapsto \vec{r}(t) = \text{......vielfach das Ziel.}$$

★ Beispiele: (geometrisch oder als Koordinatenvektoren)

- – Flugparabel $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}T^2 + \vec{v}_0 T + \vec{r}_0$
  – Kreisbewegung $\vec{r}(t) = R(\vec{e}\cos(\omega t) + \vec{f}\sin(\omega t))$ $\quad \vec{e}^2 = \vec{f}^2 = 1 \quad (\vec{e}\cdot\vec{f}) = 0$
  – $\vec{r}^K(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), H\frac{t}{T})$ mit $\omega T = 2\pi$. Usw.

★ Dazu *Geschwindigkeitskurve* (momentane Änderungsrate des Ortsvektors)

$$t \longmapsto \vec{v}(t) = ...$$

und eventuell *Phasenraumkurve*

$$t \longmapsto (\vec{r}(t), \vec{v}(t))$$

★ *Beschleunigungskurve* (momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit):

$$t \longmapsto \vec{a}(t) = ...$$

Die Bahnkurve liefert alle weiteren Kurven rein mathematisch.
Wie? Jetzt zu zeigen!

Wie? Diskutiere das Verhalten von Kurven analog zur Diskussion reeller Funktionen.
■ Beispiel: Verhalten von t$\longmapsto \vec{r}_1^{k}(t) = (0, t, R\sin(\omega t))$ und $\vec{r}_2^{K}(t) = (0, R\sin(\omega t), R\sin(3\omega t))$

★ Dann taucht an einer Stelle die **Frage** nach der lokalen Approximation bzw. der Bestimmung der tangentialen Richtung bzw. der momentanen Geschwindigkeit auf. (Zu gegebener, bekannter Beahnkurve!)
Idee: **Tangentenzerlegung für die neue Situation entwickeln!!!**

Ausführung: Szenenbild $\vec{r}$, t_0 und $\vec{r}(t_0)$ seien gegeben. Es interessiert $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$. Also versuchsweise eine Zerlegung der folgenden Form ansetzen?

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}\Delta t + \Delta t \vec{R}_{\vec{r}}^{\vec{v}}(t_0, \Delta t)$$

Man benötigt wieder eine Zusatzbedingung: $\boxed{\vec{R}_{\vec{r}}^{\vec{v}}(t_0, \Delta t) \to 0 \quad \text{für } \Delta t \to 0}$ Intuitiv ist die Bedeutung dieser Bedingung klar. Und das genügt für uns. Genaue mathem. Präzisierung noch erforderlich.
★ Weiter wie im Falle reeller Funktionen:

- – Eindeutigkeitsbeweis: Geht durch. Folge: (früher neue Bezeichnung für m, jetzt für den Vektor $\vec{v}$: Typische Bezeichnungen: $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ oder $\dot{\vec{r}}(t_0)$ oder.....)
  – Die beiden Denkfiguren
  – Ableitungsregeln. Etwa: .....
  – Traditionelle Interpretation, speziell momentane Geschwindigkeit.

■ Bestimme die Ableitung (also die momentane Geschw.) einer Flugparabel über die erste Denkfigur.
Inspektion: Vorsicht, ev. Doppelbedeutung von t_0!

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = ...$$

Ergebnis?
■ Zwei Produktregeln, eine Kettenregel formulieren (und ev. beweisen)

Erstes neues Problem:

★ Eine Bahnkurve sei in Koordinatenform gegeben! Also

$$t \longmapsto \vec{r}^K(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Wie sieht die zugehörige Tangentenzerlegung aus? Also

$$\vec{r}^K(t_0 + \Delta t) = (x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t))$$

Idee: Setze die Tangentenzerlegungen der Komponenten**funktionen** ein und rechne:
.....

Ergebnis (über die Eindeutigkeit der Zerlegung!)

$$\boxed{\frac{d\vec{r}^k}{dt}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))}$$ Komponentenweises Ableiten!!!

■ Übendes Anwendungsbeispiel:

$$\vec{r}^K(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), H\frac{t}{T})$$

★ Ein neu auftauchendes Konsistenzproblem:
Die Bahnkurve $\vec{r}$ sei gegeben. Im Koordinatensystem K gebe das die Bahnkurve $\vec{r}^K$.
♦Bilde **zuerst** die Ableitung $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$ und stelle dann diesen Vektor in Koordinaten dar. Bilde also

♦Gehe dann umgekehrt **zuerst** von $\vec{r}$ nach $\vec{r}^K$ und leite ab. Bilde also $\frac{d\vec{r}^K}{dt}(t)$.

♦♦ Stimmen die Ergebnisse überein??? Also $\boxed{\vec{v}^K(t) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right)^K \overset{???}{=} \frac{d\vec{r}^K}{dt}(t)}$.

Zum Glück: **Ja!!.** Beweis wieder über die Eindeutigkeit der Tangentenzerlegung und die Regeln des Typs $(\vec{x} + \vec{y})^K = \vec{x}^K + \vec{y}^K$.

★ Nach welcher Strategie wird man daher vektorielle Geschwindigkeiten ausrechnen???
★ Wie erhält man die Beschleunigung?
★ Wie erhält man tangentiale und normale Komponenten der Beschleunigung?
■ Wichtiges Übungsbeispiel: Geschwindigkeit und Beschleunigung der (gleichf.) Kreisbewegung)

Bestimmung der vektoriellen Geschwindigkeit für die Flugparabel mit der ersten Denkfigur.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \tfrac{1}{2}\vec{g}(t - t_1)^2 + \vec{v}_0(t - t_1) + \vec{r}_0 \\
\vec{r}(t_0 + \Delta t) &= \tfrac{1}{2}\vec{g}(t_0 + \Delta t - t_1)^2 + \vec{v}_0(t_0 + \Delta t - t_1) + \vec{r}_0 \\
&= \tfrac{1}{2}\vec{g}((t_0 - t_1) + \Delta t)^2 + \vec{v}_0((t_0 - t_1) + \Delta t) + \vec{r}_0 \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\vec{g}(t_0 - t_1)^2 + \vec{v}_0(t_0 - t_1) + \vec{r}_0\right] + \left[\vec{g}(t_0 - t_1) + \vec{v}_0\right]\Delta t + \Delta t \cdot \boxed{\tfrac{1}{2}\vec{g}\Delta t}
\end{aligned}$$

Das hat die gewünschte Form! Und $\boxed{\frac{1}{2}\vec{g}\Delta t}$ erfüllt die Restermbedingung. Das ergibt (durch Ablesen) die gsuchte Geschwindigkeit zu

$$\boxed{t \longmapsto \vec{v}(t) = \vec{g}(t - t_1) + \vec{v}_0}$$

Erneutes Ableiten von $t \longmapsto \vec{v}(t)$ gibt die Beschleunigung:

$$\vec{v}(t_0+\Delta t) = \vec{g}\cdot((t_0-t_1)+\Delta t)+\vec{v}_0$$
$$=\vec{v}(t_0)+\boxed{\vec{g}}\Delta t+\Delta t\vec{0}$$
Wie erwartet ist diese konstant gleich $\vec{g}$

Jetzt einig Übungsaufgaben unterschiedlichen Anspruchs zu diesem Themenkreis:

■ Bestimme die Richtung der (geometrischen) Tangente zum Zeitpunkt t=0 an die Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \vec{e}\cdot 2\sin(\omega t)+\vec{f}\cos(3\omega t) \quad \text{mit..}\vec{e},\vec{f}\text{ konstant..}$$

▼ Die Ableitung: $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{e}2\omega\cos(\omega t)+\vec{f}(-3\omega)\sin(3\omega t)$. Also $\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}(0)=2\vec{e}\omega}$. Weiter ist $\vec{r}(0)=\vec{f}$. Das gibt folgende Parametrisierung der gesuchten Tangente

$$\vec{t}(u) = \vec{f}+u\vec{e}.$$

$t \longmapsto \vec{r}^k(t) = (x(t),y(t))$ Ebene Bahnkurve. Bestimme die Vektoren de begleitenden Zweibein, dh. bestimme 2 Vetoren $\vec{T}(t)$ und $\vec{N}(t)$, die beides Einheitsvektoren sind und aufeinader senkrecht stehen. Sei dann $\vec{g}^K$ irgendein weiterer Vektor der Ebene. Bestimme $\alpha=\alpha(t)$ und$\beta=\beta(t)$ derart, dass $\vec{g}=\alpha(t)\vec{T}(t)+\beta(t)\vec{N}(t)$.

▼ Nacheinader: $\vec{v}^K(t)=\frac{d\vec{r}^k}{dt}(t)$ / $|\vec{v}^K(t)|$ / $\vec{T}^K(t)=\frac{\vec{v}^K(t)}{|\vec{v}^K(t)|}=\frac{(v_1(t),v_2(t))}{|\vec{v}^K(t)|}$ Dann $\vec{N}^K(t)=\frac{(-v_2(t),v_1(t))}{|\vec{v}^K(t)|}$
Und $\alpha(t)=\left(\vec{g}\cdot\vec{T}(t)\right)$ sowie $\beta(t)=(\vec{g}\cdot\vec{N}(t))$ ▲

■*Bestimmen* Sie die vektorielle Geschwindigkeit der folgenen Bahnkurven bzw. die Ableitung:

$\vec{r}^K(t)=\left(\frac{t}{a+t},\frac{e^{at}}{(a+t)^2},\frac{(a+t)}{(a-t)^2}\right)$ $\quad \vec{r}(t)=f(t)\vec{a}+\frac{1}{f(t)}\vec{b}$ $\quad \vec{a},\vec{b}$ konstant

$\vec{s}(t)=\left(t(1+t^3)^5\vec{a}\right)\times\left(\frac{\vec{b}}{(1+t^3)^5}\right)$ $\quad s(t)=(\vec{a}+3t\vec{b})\cdot(\vec{a}-3t\vec{b})$ $\quad \vec{u}^K(t)=\left(\frac{t}{(a+t)^2},\frac{te^{at}}{(a+t)^2},\frac{(a-t)}{(a+t)^2}\right)$

▼ ....▲

■Bestimmen Sie vektorielle Geschwindigkeit und Beschleunigung einer gleichförmigen Kreisbewegung. (Erste Entscheidung: In Koordinaten oder koordinatenfrei) Welche besondere Eigenschaft hat die Beschleunigung in diesem Fall?

▼ Lege die x-y-Ebene ind die Bewegungsebene. Es folgt:

$$\begin{aligned}\vec{r}^K(t) &= R(\cos(\omega t+\varphi),\sin(\omega t+\varphi),0)\\ \vec{v}^K(t) &= \frac{d\vec{r}^K}{dt}(t)=R\omega(-\sin(\omega t+\varphi),\cos(\omega t+\varphi),0) \qquad \text{Beachte: } (\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t))=0 \text{ für alle t.}\\ \vec{a}^K(t) &= \frac{dv^K}{dt}(t)=-R\omega^2(\cos(\omega t+\varphi),\sin(\omega t+\varphi),0)=-\omega^2\vec{r}^K(t)\end{aligned}$$

▲

■ Gegeben die Bahnkurve $\vec{r}^K(t)=(t,at^2)$ in der Ebene. Bestimme die vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}^K(t)$. Bestimmen weiter zwei aufeinader senkrechte Einheitsvektoren $\vec{T}(t)$ und $\vec{N}^K(t)$, derart, dass $\vec{T}^K(t)$ die Richtung von $\vec{v}^K(t)$ hat. Überdies soll $\vec{N}$ ins Innere der Parabel zeigen. Zerlegen Sie dann den Vektor $\vec{g}^K=(0,-g)$ in seine Komponenten in Richtung von $\vec{T}$(t) und $\vec{N}(t)$. Welche physikalisch Interpretation könnten man insbesondere der tangentialen Komponente geben? Hinweis: "Schiefe Ebene".

▼ Nacheinader (s-o.): $\vec{r}^K(t)=(t,at^2)$ / $\frac{d\vec{r}^K}{dt}(t)=(1,2at)$ / $|\frac{d\vec{r}^K}{dt}(t)|O=\sqrt{1+4a^2t^2}$

$\boxed{\vec{T}^K(t) = \frac{(1,2at)}{\sqrt{1+4a^2t^2}}}$ und $\boxed{\vec{T}^K(t) = \frac{(-2at,1)}{\sqrt{1+4a^2t^2}}}$
und

$$\vec{g} = \vec{T}^K(t)\frac{-2agt}{\sqrt{1+4a^2t^2}} + \vec{N}^K(t)\frac{-g}{\sqrt{1+4a^2t^2}}$$

Bewegt man sich auf einer festen Fläche (Verschiebungsfläche) der Querschnitt die Form der betrachtetn Parabel hat, dann wird dir jeweilige Normalkomponente der Erdanziehung m$\vec{g}$ durch die Gegenkraft (Zwangskraft) des Untergrundes kompensiert. Die Tangentialkomponente dagegen ist wirksam.▲

■ Eine schiefe reibungsfreie Ebene mit Neigungswinkel α sei gegeben sowie eine horizontale Gerade g auuf der Ebene. Eine Flugparabel (auf der Ebene) startet mit einer skalaren Anfangsgeschw. V und einem Steigungswinkel φ gegen g. ´Wann trifft die Flugparabel erneut g und wie groß ist die "Flugweite"?

▼ Das ist eine Flugparabelaufgabe. Wir legen ein ebenes Koordinatensystem in die Ebene mit Ursprung auf g und 1-Richtung in richtung von g. Die tangentiale Komponente der Schwerebeschleunigung ist gsinα. Die Parabel starte zur Zeit t=0 im Usprung mit der Geschwindigkeit V(cos$\varphi, \sin\varphi$). Dann folgt

$\vec{r}^K(t) = tV(\cos\varphi, \sin\varphi) + \frac{t^2}{2}(0, -g\sin\alpha) = (\text{tVcos}\varphi, tV\sin\varphi - \frac{g}{2}t^2\sin\alpha)$
$\vec{v}^K(t) = (V cos\varphi, V\sin\varphi - gt\sin\alpha)$ wird nicht benötigt. Wan ist y(t)=0?
$tV\sin\varphi - \frac{g}{2}t^2\sin\alpha = 0$ / t(Vsin$\varphi - \frac{g}{2}t_S\sin\alpha) = 0$ / t=0 und $\boxed{\text{t}_S = \frac{2V}{g}\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}}$.

Flugweite: w=x(t$_S$) = $\frac{2V^2}{g}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha} = \frac{V^2}{g}\frac{\sin 2\varphi}{\sin\alpha}$ Formeldikussion zeigt, dass die Abhängigkeit von α sinnvoll ist.

■ Wir betrachten die folgende Bahnkurve:

$$\vec{r}^K(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), H\sin(2\omega t))$$

a) Was für eine Bewegung wird hierdurch beschrieben?
b) Bestimmen Sie die vektorielle Geschwindigkeit.

▼ Ein Punkt läuft auf dem Zylindermantel kreisförmig um, wobei seine "Höhe" darauf mit doppelter Frequenz sinusförmig verändert wird:

$$\vec{r}(t) = R(\vec{e}_1\cos(\omega t) + \vec{e}_2\sin(\omega t)) + \vec{e}_3 H\sin(2\omega t)$$

$$\vec{v}^K(t) = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t), 2H\omega\cos(2\omega t))$$

▲

$$\text{f}(\text{x}_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \tfrac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \Delta x^2 R^3(x_0,\Delta x)$$

$$\text{f}'(\text{x}_0 + \Delta x) = +f'(x_0) + f''(x_0)\Delta x + .\tfrac{d}{d\Delta x}.\left(\Delta x^2 R^3(x_0,\Delta x)\right)$$