Aufwärmen: 1) Sie haben ein Vektorprodukt berechnet. Was für eine Probe liegt nahe? $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ H \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ G \end{pmatrix}$ Berechne. $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$. (Probe?) Vergleiche das letzte Resultat mit $\boxed{\vec{a}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{b}\vec{a}^2}$.

2) $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$. Lösen Sie die Gleichung $\boxed{\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}}$ geometrisch. (Die Gleichung ist linear und für $\vec{b} \neq \vec{0}$ inhomogen. Was bedeutet das? Was folgt für k? Wie sollte man vorgehen?) Führt man ein volles kartesisches Koordinatensystem ein, so läßt sich die Gleichung in Matrixform schreiben. Wie sieht die Koeffizientenmatrix aus? $\vec{a} \neq \vec{0}$

▼ Zuerst die homogene Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ lösen. Lösung sind alle Vielfachen von $\vec{a} \neq \vec{0}.also$ die von $\vec{a}$ erzeugte Ursprungsgerade. D.h. k=1 und $\ell = 2$. Die inhomogene Gleichung ist unlösbar, falls $\vec{b}$ nicht senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Denn $\vec{a} \times \vec{x}$ tut das! Nun sei $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$. Also $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$. Wir suchen eine spezielle Lösung der Form $\vec{x}_S = \alpha \vec{a} \times \vec{b}$. Es muss gelten $\alpha \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}$. Nun ist aber $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}\vec{a}^2 = \vec{b}\vec{a}^2$ wegen $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$. Es bleibt die Forderung $-\alpha \vec{a}^2 \vec{b} = \vec{b}$, die durch $\alpha = -\frac{1}{\vec{a}^2}$ erfüllt wird. Damit haben wir in diesem Fall eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Dag ibt folgende allgemeine Lösung (im lösbaren Fall mit $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$:

$$\vec{x}_L(\lambda) = -\frac{1}{\vec{a}^2}(\vec{a} \times \vec{b}) + \lambda \vec{a}$$

■3) Wir betrachten die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{in der Unbestimmten x.}$$

Diese Gleichung soll auf zwei Weisen gelöst werden.

$\boxed{\text{b)}}$ Machen Sie den Ansatz x=u+v. Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man die Gleichung $(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + p) + q = 0$. Das ist erfüllt, wenn man 3uv+p=0 und u$^3 + v^3 + q = 0$ verlangt. Aus der ersten Gleichung folgt 27u$^3 v^3 = -p^3$. Aus beiden Gleichungen folgt v$^6 + qv^3 - (p/3)^3 = 0$. Das ist lösbar. Analog für u. Es folgt:

$\boxed{\text{a)}}$ Machen Sie den Ansatz x=$\frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie dies in die Gleichung für x ein. Bestimmen Sie α so, daß Sie die entstehende Gleichung in y lösen können. Zuerst y^3 bestimmen, damit dann $(\alpha/y)^3$ berechnen und dann erst die dritten Wurzeln bilden. Das ergibt x. (Erste Methode.)

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Erneut folgt eine Lösung (der drei möglichen) Lösungen. (Zweite Methode.)

1. ▼ Die Lösung sollte mit den angegbenen Hinweisen selbst produziert werden oder zumindest jeder Rechenschritt der gegebenen Lösung verständig erläutert ! Erste Methode. x=$\frac{a}{y} - y$. Daher ist x$^3 = -y^3 + 3ay - 3a^2 y^{-1} + \frac{a^3}{y^3}$. Einsetzen in die Bedingungsgleichung gibt

x^3 :	$-y^3 + 3ay - 3a^2 y^{-1} + \frac{a^3}{y^3}$
px	$-py + pay^{-1}$
x$^3 + px + q$:	$\boxed{-y^3 + (3a - p)\, y + (-3a + p)\frac{a}{y} + \frac{a}{y^3} + q}$

Für a=$\frac{p}{3}$ verschwinden zwei Summanden (statt des erwarteten einen). Man erhält für diesen a-Wert eine bikubische Gleichung für y:

$$\begin{aligned}
y^3 - q - \frac{a^3}{y^3} &= 0 \quad \text{oder} \quad \boxed{y^6\text{-}qy^3\text{-}a^3\text{=}0} \quad \text{Also} \quad y^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\
\frac{a^3}{y^3} &= \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3 \left[+\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]}{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \\
&= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}
\end{aligned}$$

Beide Vorzeichenkombinationen ergeben dasselbe.

$$\begin{aligned}
x &= -\sqrt[3]{y^3} + \sqrt[3]{\frac{a^3}{y^3}} = -\sqrt[3]{-y^3} + \sqrt[3]{\frac{a^3}{y^3}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}$$

Damit ist eine Formel für eine der drei jeweils vorhandenen Lösungen bestimmt.▲

Zweite Methode

$x^3 + px + q = 0$
$x = u + v \qquad px = pu + pv$
$x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
$u^3 + v^3 + 3u^2v + pu + 3uv^2 + pv + q = 0$
$u^3 + v^3 + u(3uv + p) + v(3uv + p) + q = 0$
$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad 3uv+p=0$$

$$\begin{aligned}
v &= -\frac{p}{3u} \qquad u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \\
u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} &= 0 \qquad u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}
\end{aligned}$$

v analog. Nur eine Vorzeichenwahl zulässig. Einsetzen

Komplexe Zahlen:
Das Kapitel 6.3 durchgegnagen!

★ Die Einführung von $\mathbb{C}$ zusammenfassen!

Zeige: Die Gleichung az=b mit a,b$\in \mathbb{C}$ hat für a$\neq 0$ genau eine Lösung in $\mathbb{C}$. Das war die entscheidende Eigenschaft, die man zum Nachweis benötigte, dass $\mathbb{C}$ Körper ist. Beachten Sie: a$\in \mathbb{C}$ heißt: Es gibt eindeutig bestimmte $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a = a_1 + ia_2$. Jetzt die zu verstehende und zu kommentierende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
(a_1+a_2 i)(x+iy) &= b_1+ib_2\\
(a_1x-a_2y)+i(a_1y+a_2x) &= b_1+ib_2\\
& \begin{matrix} a_1x-a_2y=b_1 \\ a_2x+a_1y=b_2 \end{matrix}\; yraus \;\begin{matrix} +a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_1^2+a_2^2)x &= b_1a_1+b_2a_2\\
x &= \frac{b_1a_1+b_2a_2}{a_1^2+a_2^2} \qquad \text{y}=\frac{-b_1a_2+b_2a_1}{a_1^2+a_2^2}\\
z &= \left(\frac{b_1a_1+b_2a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)+i\left(\frac{-b_1a_2+b_2a_1}{a_1^2+a_2^2}\right)\\
z &= x+iy=\frac{b_1+ib_2}{a_1+ia_2}=\frac{(b_1+ib_2)(a_1-ia_2)}{(a_1+ia_2)(a_1-ia_2)}
\end{aligned}
$$

Die z ist die gesuchte eindeutige Lösung, sofern a$\neq 0$.

★ Was hat man sich zu merken?

Einige einfache Rechnungen:

Vereinfachen: $\frac{3+i}{1+2\frac{3+i}{2+i}}=\frac{(3+i)(2+i)}{1}\frac{(8-3i)}{73}=\frac{55}{73}+\frac{25}{73}i=\frac{5}{73}\sqrt{146}e^{i\arctan\frac{5}{11}}\frac{55}{73}+\frac{25}{73}i$

Bei der Umwandlung in Polarform darauf achten, ob der Vektor in die rechte oder die linke Halbebene zeigt. Für den entegengesetzten Pfeil gilt

$$-\frac{55}{73}-\frac{25}{73}i=\frac{5}{73}\sqrt{146}\exp\left(i\left(\arctan\frac{5}{11}-\pi\right)\right)$$

Übung zu Denkfigur: Was folgt aus $\boxed{\text{r}e^{i\alpha}=se^{i\beta}}$?

Bestimme die Lösungen von z$^n=1$

$$
\begin{aligned}
z^n &= 1\\
z &= re^{i\alpha} \quad \text{r,}\alpha\ \text{ unbestimmt.}\\
r^ne^{in\alpha} &= 1e^{i0} \quad \text{Denkfigur}\\
r^n &= 1 \text{ mit r>0 gibt r=1 und}\\
n\alpha_k &= 0+2\pi k \quad \text{mit k} \in \mathbb{Z} \quad \text{frei!}\\
f\ddot{u}rk &= 0,1,...n-1 \quad \begin{matrix}\text{gibt das unterschiedliche komplexe}\\ \text{Zahlen, also Lösungen} \quad \boxed{\text{z}_k=e^{i\frac{2\pi}{n}k}}\end{matrix}
\end{aligned}
$$

Gerechnete Beispielanwendungen der Eulerschen Formel:

$$\left(e^{i\alpha}\right)^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$$
$$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = \mathrm{e}^{i3\alpha} = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha \quad \text{und}$$
$$\sin(3\alpha) = -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
$$\mathrm{e}^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

folgen die wichtigen Formeln

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \qquad \sin\alpha = \tfrac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

Bestimme die Nullstellen:

$$(1+i)z^2 + 2iz - 3 + 5i = 0 \qquad \text{Ausgangsgleichung}$$
$$\mathrm{z}^2 + 2\tfrac{i}{1+i}z - \tfrac{3-5i}{1+i} = 0$$
$$\mathrm{z}^2 + 1i(1-i)z - \tfrac{1}{2}(3-5i)(1-i) = 0$$
$$\mathrm{z}^2 + (1+i)z - \tfrac{1}{2}(-2 + i(-8)) = 0$$
$$\boxed{\mathrm{z}^2 + (1+i)z + (1+4i) = 0} \qquad \text{Normalform !}$$
$$\mathrm{z}_{12} = -\tfrac{1}{2}(1+i) \pm \sqrt{\tfrac{(1+i)^2}{4} - \tfrac{4(1+4i)}{4}}$$
$$\mathrm{z}_{12} = -\tfrac{1}{2}(1+i) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-4-14i} \qquad \text{Endform}$$
$$-\tfrac{1}{2}(1+i) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-4-14i} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{\sqrt{53}-2} + 2\sqrt{53} + 2\sqrt{\sqrt{53}+2}}\,\exp\left(-i\arctan\frac{1+\sqrt{\sqrt{53}+2}}{-1+\sqrt{\sqrt{53}-2}}\right)$$

26.3.

Warmdenken: ■ 1)Berechnen Sie $(1+\mathrm{i})^3$ einmal kartesisch und einmal polar. Was ist $(1+\mathrm{i})^n$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$

■ 2) Bringen Sie die folgenden Größen $\vec{x}, \vec{y} \in V_0^3$ und $z \in \mathbb{C}$ in die Form "Betrag×Richtungsvektor".

$$\vec{x} = (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - \vec{a}^2\vec{b} \quad \vec{y} = \vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} \quad \textit{und} \quad z = 2 + i + 3e^i$$

★

$$\begin{aligned} z &= (2+3\cos 1) + i(1+3\sin 1) \\ |z| &= \sqrt{(2+3\cos 1)^2 + (1+3\sin 1)^2} \\ z &= \sqrt{(2+3\cos 1)^2 + (1+3\sin 1)^2}e^{i\alpha} \\ \text{wobei} \quad \tan\alpha &= \frac{1+3\sin 1}{2+3\cos 1} \text{ und} \end{aligned}$$

★ Jetzt $\vec{x}$.

$$|\vec{x}|^2 = (\vec{x}\cdot\vec{x}) = (\vec{a}\vec{b})^2\vec{a}^2 - 2(\vec{a}\vec{b})\vec{a}^2(\vec{a}\vec{b}) + \left(\vec{a}^2\right)^2\vec{b}^2 = \vec{a}^2\left(\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2\right)$$

$$\boxed{\vec{x} = |\vec{a}|F\,\tfrac{\vec{x}}{|\vec{a}|F}}$$

★ Und $\vec{y}$: $\quad \vec{y}^2 = (\vec{y}\cdot\vec{y}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{a}^2b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

Also:

$$\boxed{\vec{y} = \sqrt{\vec{a}^2(1+\vec{b}^2) - (\vec{a}\vec{b})^2}}$$

▲

■ 3) Wie lautet (wohl) die kartesische Darstellung von $e^{e^{i\alpha}}$? Achtung das ist $e^{\left(e^{i\alpha}\right)}$. Nicht zu verwechseln mit $(e^e)^{i\alpha} = e^{ie\alpha} = \cos(e\alpha) + i\sin(e\alpha)$

▼ Nicht besprochen:

$$\begin{aligned} e^{e^{i\alpha}} &= e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}(\cos(\sin\alpha) + i\sin(\sin\alpha)) \\ e^{e^{i\alpha}} &= e^{\cos\alpha}\cos(\sin\alpha) + ie^{\cos\alpha}\sin(\sin\alpha) \end{aligned}$$

Was war zu merken? Also die für jeden persönliche Arbeit?

Zusammenfassung

Zusammenfassung: (★ unbedingt merken!)
(Weg ....)

■ ★Komponentenform des.. $\boxed{..(\vec{a}^k \cdot \vec{b}^k) = a_1 b_1 + +?...}$ in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3_K$.

Länge $\boxed{.|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}?..}$ Einheitsvektor $\boxed{..?...}$

senkrechte Vektoren $\boxed{...\Longleftrightarrow ....}$ $\arctan\frac{1+3\sin 1}{2+3\cos 1} = 0.771\,89$

■ ★ Rechenregeln
Klammern ...
....
....
Nicht teilen

■ ★Geometrische Form ... $\boxed{(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

Ausdehnung auf V_0^3, ...

Winkel

★ **Projektionsformel** von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$ $\boxed{.\vec{p} = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b}......}$

Anwendungen:

Ebenengleichung im Raum $\vec{a}\cdot\vec{x} = b$
Winkel zwischen 2 Gerade - kürzester Abstand
Winkel g,E und E,F
Tetraederwinkel
.....

Vektorprodukt:

- Kartesische Form ..... (alternativ $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = ...$ später $\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$)
- Geometrische Form $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{n}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
- Rechenregeln: ....

Anwendungen:

-
  - Normale
  - Spatprodukt
  - Reziproke Basis (Idee: Aus Vektorgl. eine skalare machen!)
  - Kürzester Abstand
  - Physik. Formeln Winkelgeschw., Drehmoment,....Lorentzkraft

Komplexe Zahlen:

★ Die komplexen Zahlen sind die (anders geschriebenen, der Zahlrolle angepaßten) Vektoren des $\mathbb{R}^2_K$, für die eine zusätzliche Multiplikation erklärt ist.
★Dieses System, der *Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen,* wurde durch folgende drei Eigenschaften festglegt:
▼ (1) Die 1-Achse wird mit der reellen Zahlengeraden identifiziert
▼ (2) Die 2-Achse enthält die Wurzeln negativer Zahlen, die rein imaginären Zahlen. mit $\mathrm{i}^2 = -1$.
▼ (3) **Es gilt die** $\boxed{\textbf{Grundregel}}$: Abgesehen von Ungleichungen darf / soll man mit komplexen Zahlen ebenso rechnen wie mit reellen Zahlen.

Die zwei Darstellungen:

$\boxed{\mathrm{z=x+iy=re}^{i\alpha}}$	Wann welche??
$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$	Eulers Formel
Geom. Interpret.d. Multipl.	!! Additionstheoreme
Das Umrechnungsproblem	Linke Halbebene!
Gleicheitsdenkfigur	Vorsicht beim Winkel
Komplexe Konjugation	Nutzen?
Das Endformproblem	

Anwendung: Beschreibung von Schwingungsvorgängen! Komplexe Widerstände

---

Einige weitere Fingerübungen:

7) Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke:

$\frac{3-4i}{2+i} + \frac{5+i}{2-i}$	$\frac{i+\frac{2-i}{2+3i}}{1-\frac{2+5i}{2-3i}}$	$i + \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2}$	$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}$

▼

$$\frac{3-4i}{2+i} + \frac{5+i}{2-i} = \frac{(3-4i)(2-i)+(5+i)(2+i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$= \frac{(6-4+10-1)+i(-3-8+5+2)}{5} = \frac{11+i(-4)}{5} = \frac{1}{5}(11-4i)$$

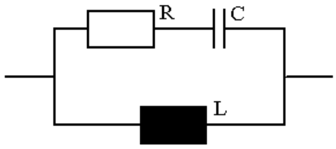
$$\frac{i+\frac{2-i}{2+3i}}{1-\frac{2+5i}{2-3i}} = \frac{(i(2+3i)+(2-i))(2-3i)}{((2-3i)-(2+5i))(2+3i)} = \frac{(-1+i)(2-3i)}{-8i(2+3i)} = \frac{i}{8}\frac{(-1+i)(2-3i)}{(2+3i)}$$
$$= \frac{i}{8}\frac{1+5i}{2+3i} = \frac{i}{8}\frac{(1+5i)(2-3i)}{13} = \frac{i}{8}\frac{17+7i}{13} = \frac{1}{104}(-7+17i)$$

$$i + \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2} = \frac{i2(2+i)+2+(2+i)}{2(2+i)} = \frac{1}{10}(9+8i)$$

$i + \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10} + \frac{4}{5}i$

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}{1+i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Wie groß ist der komplexe Widerstand der folgenden Schaltung?



Hier gab es große Konzentrations- und Motivationsprobleme

Das Schema gibt für $\frac{1}{Z}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + R} = \frac{1}{i\omega L} + \frac{i\omega C}{1 + iR\omega C} \\
&= \frac{1 - \omega^2 LC + iR\omega C}{i\omega L(1 + i\omega RC)} = \frac{-i}{\omega L}\frac{\left[(1-\omega^2 LC) + i\omega RC\right](1 - i\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \\
&= \frac{-i}{\omega L}\frac{\boxed{(1\text{-}\omega^2\mathrm{LC}+\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2)} + i\,\boxed{\left[\omega RC - \omega RC(1-\omega^2 LC)\right]}}{\boxed{1+\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2}}
\end{aligned}
$$

Das ist die zunächst anzustrebende Form $\frac{A+iB}{G}$ für die komplexe Zahl $\frac{1}{Z}$, die anschließend in polare Darstellung zu bringen ist. **Aber alle daraus folgenden Größen hängen von den drei äußeren Parametern R,L und C ab.** Will man ein interessierende Größe als Funktion von ω analysieren und wählt man vielleicht nur 10 Werte für jeden äußeren Paraeter, dann muss man bereits 1000 Funktionen betrachten. Das ist sehr unangenehm (und vielleicht zu verstehen).

Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch durch die Einführung geeigneter Hilfsgrößen bedeutend vermindern!. Und zwar führen wir die beiden einheitenfreien $\boxed{\text{Hilfsgrößen x und P}}$ ein, durch die sich weitgehend alle auftretenden Terme ausdrücken lassen:

$$
\boxed{\mathrm{x}=\tfrac{\omega}{\omega_0}=\omega\sqrt{LC}} \qquad \boxed{\mathrm{P}=\mathrm{R}\sqrt{\tfrac{C}{L}}} \qquad
\begin{aligned}
\omega RC &= (\omega\sqrt{LC})R\sqrt{\frac{C}{L}} = xP \\
\omega C &= \frac{xP}{R} \qquad \omega L = \omega\sqrt{LC}\left(\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}\right)R = x\frac{R}{P}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\omega\mathrm{C}=\tfrac{xP}{R}} \qquad \boxed{\omega\mathrm{L}=\mathrm{x}\tfrac{R}{P}}
$$

Damit folgt für $\frac{1}{Z}$ sofort:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{-i}{\omega\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{(1-x^2+x^2P^2) + i\left[xP - xP(1-x^2)\right]}{1+x^2P^2} \\
\frac{1}{Z} &= \frac{-i}{x}\frac{P}{R}\frac{(1-x^2+x^2P^2) + ixP\left[1-(1-x^2)\right]}{1+x^2P^2} \\
\frac{1}{Z} &= \frac{-i}{x}\frac{P}{R}\frac{(1-x^2+x^2P^2) + ix^3P}{1+x^2P^2} = \frac{P}{R}\frac{Px^3 - i(1-x^2+x^2P^2)}{x\,(1+x^2P^2)}
\end{aligned}
$$

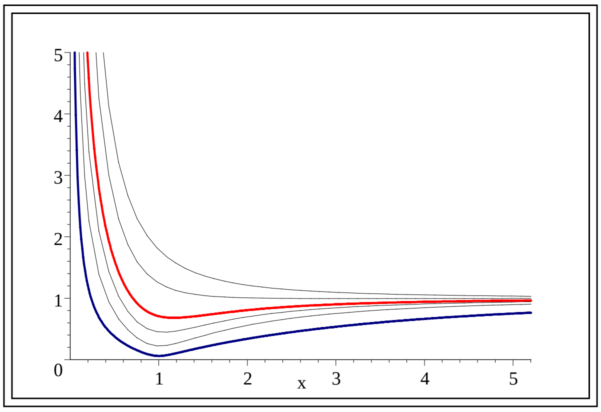
Bis auf den für die Form unwichtigen, aber für die richtige Einheit notwendigen Vorfaktor $\frac{1}{R}$ ist das eine Funktion von x, die nur von einem einzigen äußeren Parameter P abhängt. Will man also das Verhalten einer speziellen Schaltung des betrachteten Typs verstehen, muss man nur dass zugehörige P ausrechnen und dann zur Variablen x übergehen!

Beispielsweise erhält man für $\frac{I_0}{U_0} = \frac{1}{|Z|}$ die Funktion:

$$
\frac{1}{|Z|} = \frac{P}{R}\frac{\sqrt{\left[1-x^2+x^2P^2\right]^2 + x^6P^2}}{x(1+x^2P^2)} = \frac{P}{Rx}\frac{\sqrt{((1-x^2)^2+x^2P^2)\,(1+x^2P^2)}}{1+x^2P^2}
$$

$$
\boxed{\tfrac{1}{|Z|}=\tfrac{P}{Rx}\sqrt{\tfrac{(1-x^2)^2+x^2P^2}{1+x^2P^2}}}
$$

Nachfolgend einige zugehörige Graphen. P=1 (rot) und P=.25 (blau) - vertikal $\frac{1}{|Z|}$ und horizontal x.



27.9.06

- Einfache Aufgabe, die man beispielsweise rechnen und interpretiern können sollte (ohne Einheiten! 2-3 Minuten!):
  - U_0=220, $\omega = 314 \quad \varphi = 0$
  - Schaltung R=10 und L=2 in Reihe
  - Wie groß ist I(0) und I($0.3/\omega$)

Thema: *Effiziente Verarbeitung einer Informationsflut. Wie macht man es richtig, wie falsch. Das ist im Laufe des Kurses zu üben*
Beispiel: Gestrige Veranstaltung!

Nochmals Zusammenfassung

- Stromkreis: Spannung bestimmt eindeutig die Ströme, insbesondere den Gesamtstrom: Physik. Probleme:
  - Die Beobachtungsgr. messen
  - Die Ströme theor. berechnen / vorhersagen
- Zur Vorhersage: Es gilt das Ohmsch Gesetz I=I(U)=$\frac{1}{R}U$.
- Wie erhält man R?
  - Rekursiv: Parallel- oder Reihenschaltungsregel
  - Über lineares Gls (Kirchhoffsche Regeln)
- Wechselstrom **Analog**
  - Sinusförmige Vorgänge:

  - * Beschreibung $t \longmapsto A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Benötigt:$(\omega, A_0, \varphi)$
  - * Berechnung $t \longmapsto \tilde{A}(t) = A_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$
  - * Beisp. $\tilde{I}(t), \tilde{U}(t)$

- Botschaft: Wie im Gleichstromfall, nur mit komplexem Z statt R . Also
  Wie erhält man Z?
  - Rekursiv: Parallel- oder Reihenschaltungsregel
  - Über lineares Gls (Kirchhoffsche Regeln)

- Was folgt, wenn man $Z=U+iV=|Z|e^{i\alpha}$ hat???

$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$	$I(t)=I_0 \sin(\omega t + \psi)$	U gegeb. I gesucht!
$\tilde{U}(t) = U_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$	$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t+\psi)}$	$U_0 e^{i\varphi} = Z I_0 e^{i\psi}$
$U_0 e^{i\varphi} = Z I_0 e^{i\psi}$ Also	$U_0 e^{i\varphi} = \|Z\| I_0 e^{i(\psi+\alpha)}$	
$\boxed{U_0 = \|Z\| I_0}$	$\boxed{\psi = \varphi - \alpha}$	Benötigte Beziehungen!

- Jetzt kann man beispielsweise berechnen (ohne Einheiten!):
  - $U_0=220$, $\omega = 314$ $\varphi = 0$
  - Schaltung R=10 und L=2 in Reihe
  - Wie groß ist I(0) und $I(0.3/\omega)$

Antwort:

$Z=R+i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{iatn \frac{\omega L}{R}} = \sqrt{104} e^{i1.55}$ $\arctan \frac{314 \cdot 2}{10} = 1.5549$
Also $I(t)=\frac{220}{\sqrt{104}} \sin(314t - 1.55) = 21.5 \sin(314.0t - 1.55)$

$$I(0)=21.5 \sin(-1.55) = -21.5$$
$$I(\tfrac{.3}{\omega}) = 21.5 \sin(0.3 - 1.55) = -20.4$$

- Was ist "Spannung", was "Stromstärke"? Modell?

Rechenübungen zur Bestimmung von Z: **Fragen die man bei Start einer Aufgaben stellen kann und sollte**:

- "Ich habe den Überblick verloren, könnten Sie noch..." ...
- " Wie groß sollte Z für einen Kondensator sein? Hab ich nicht parat und kann den Krakel an der Tafel nicht lesen."
- "Gehörte $\frac{1}{Z}$ zur Parallelschaltug"
- "Ich seh nicht, wie man Z für diese Schaltung erhält"?
- "Warum noch soll ich Z eigentlich ausrechinen?"
- Usw.

Schlecht ist die leere FRage mit Fortgehen

Probeklausur: Ausgabe Freitag
$2-3$ Stunden Bearbeitungszeit, Hilfsm.
Montag früh: Einsammeln
Mi: Besprechung/ Ausgsabe
Didakt. u. persönliche Funktion der Klausur!

Jetzt Teil II des Kurses: Analysis

Kap.7 besprochen
Das allgemeine zugehörige Begriffsystem!

f=(U,x$\longmapsto f(x), W)$ Abbildung **gegeben.**
Zugeordnete Menge Bildf={ | }⊂ ...
Graph(f)={ | }⊂ ...

Die Definition rekonstruieren.und auf einfache Beispiele anwenden
Das machte gewaltige Probleme - nacharbeiten
Insbesondere: Matrix M:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Betimmung des Bildes, geometrische Interpretation.

Zweites Problem (zur allgemeinen Abbildungstheorie):
Inverse Abbildung
Also: Umkehrung der Zuordnung

Gegeben f=(U,x$\longmapsto f(x), W)$

Ist f bijektiv, d.h. hat f(x)=y für jedes y$\in W$ genau eine Lösung, dann existiert die inverse Abbildung.
Bezeichnung $\boxed{\mathrm{f}^{-1} = (W, y \longmapsto f^{-1}(y), U)}$
wobei $\mathrm{f}^{-1}(y)$ die Lösung von f(x)=y (y gegeben) ist.
Beispiele formulieren $\boxed{\mathrm{k(x)=x}^3}$, $\boxed{F : \vec{x}_P \longmapsto \vec{x}_P^K}$, endl.. Mengen, $\boxed{\mathrm{p}_2 = (\mathbb{Z}, n \longmapsto n+2, \mathbb{Z})}$
$\mathrm{p}_2^{-1} = (\mathbb{Z}, m \longmapsto m-2, \mathbb{Z})$

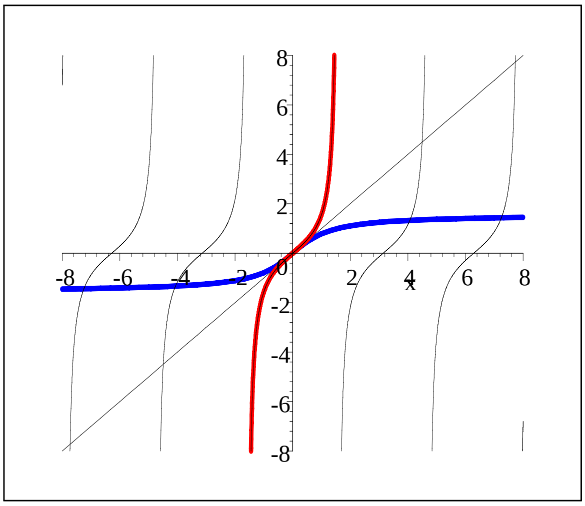
Allgemeine Beziehung
x$\in U$ f(x)=y $\mathrm{f}^{-1}(y) = x$
$\boxed{\mathrm{f}^{-1} \circ f(x) = \mathrm{f}^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in U}$

y$\in W$ $\mathrm{f}^{-1}(y) = x$ f(x)=y
$\boxed{\mathrm{f} \circ f^{-1}(y) = \mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(y)) = y \quad \text{alle } y \in W}$

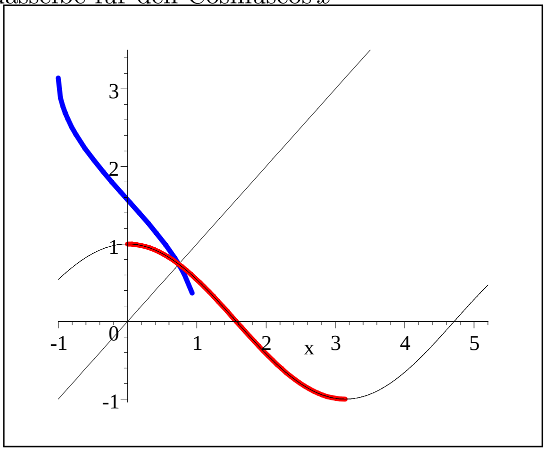
Das waren die wichtigen allgemeinen Gleichungen, die man zur Definition verwenden kann. Im Skript noch etwas ausgeführt.

Was tun, wenn die Invertierung nicht klappt? Zwei Gründe für den Fehlschlag aus den folgenden Beipielen abstrahieren
$\boxed{\mathrm{q}=(\mathbb{R}, x \longmapsto x^2, \mathbb{R})}$ und $\boxed{\exp=(\mathbb{R}, x \longmapsto e^x, \mathbb{R})}$
. Abhilfe?
$\mathrm{q}_+ = ([0,\infty[, x \longmapsto q_+(x) = x^2, [0,\infty[)$
$\mathrm{q}_+^{-1} = ([0,\infty[, y \longmapsto q_+^{-1}(y) = \sqrt{y}, [0,\infty[)$
Idee: Neue zur zu invertierenden Abb.ähnliche, davon abgeleitete Abbildung einführen, die man umkehren kann
Verändere die Mengen!

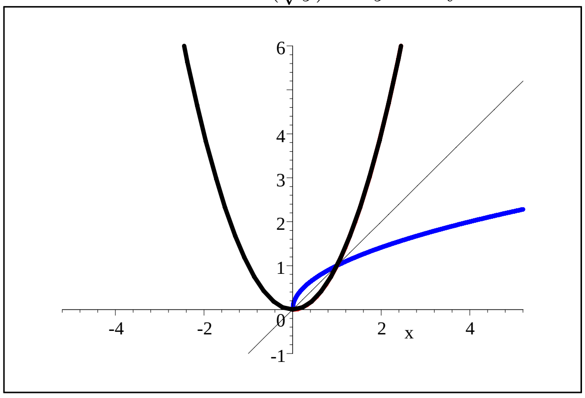
Weiteres Beispiel: Tangens
tan=($\mathbb{R} - N_{\cos}$,x$\longmapsto \tan(x), \mathbb{R})$
$\tan_R$=(]-$\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}$[,x$\longmapsto \tan(x), \mathbb{R})$
$\tan_R^{-1} = (\mathbb{R}, y \longmapsto \tan^{-1}(y) = \arctan(y)..,$]-$\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}$[)
Als Bild (rot der eingeschränkte Urbildbereich und blau die zugehörige inverse Funktion.



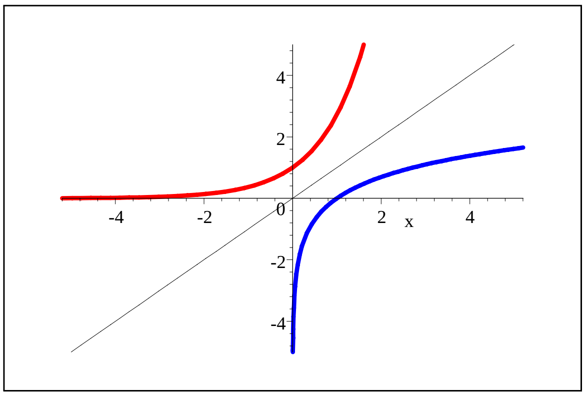
Und dasselbe für den Cosinus $\cos x$



Natürlich zuerst besprochen: Parabel und Exponentialfunktion
x^2 D.h. $\sqrt{x^2} = x$ für x$\geq$ 0 und $(\sqrt{y})^2 = y$ für y$\geq$ 0.



e^x und ln(x) D.h. $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$ und $\ln(\mathrm{e}^x) = x$



Morgen Kap. 8.

Glatte reelle Funktionen. Man sollte in der Lage sein, über den Graphen und den Rechenausdruck rasch Zugang zum Verhalten der Funktion zu erlangen. Das wird viele schöne Resultate und Fähigkeiten liefern.

28.9.06

Der elementare Mengenformalismus bereitete gestern noch Schwierigkeiten. Einige Fragen dazu:

★ Sei f=(A,x$\longmapsto$ $f(x)$,W) eine Abbildung und b$\in$ W. Für jedes w$\in$ W definieren wir die Menge $\boxed{\mathrm{U}_b(f)=\{x|x\in A, f(x)=b\}}$. ♦ a) Beschreiben Sie diese Menge in Worten. ♦b) gibt man jetzt f und b vor, so kann (und sollte) man die Menge weiter spezifizieren. Sei etwa q=$(\mathbb{R}, x\longmapsto x^2, \mathbb{R})$. Was ist dann $\mathrm{U}_4(q)$? Was $\mathrm{U}_0(q)$? Was $\mathrm{U}_{-1}(q)$? Und was ist $\mathrm{U}_0(\sin)$? ♦ Sei jetzt p ein Polynom. Was ist dann $\mathrm{U}_0(p)$ für eine Menge? (verbal!)

Nachmittags (bei der Division von Funktionen) wurde noch benutzt:

$$V_b(f)=\{x|x\in A, f(x)\neq b\}.$$

Was ist $\mathrm{U}_b(f)\cup V_b(f)$?

♦ Sei jetzt $\boxed{\text{U(f)=\{y|y}\in W, U_y(f)\text{ hat genau ein Element\}}}$. Was muss für U(f) gelten, damit f invertierbar ist?

★ Sei f=(A,x$\longmapsto$ $f(x)$,W) eine Abbildung. Dazu definieren wir die Menge

$$I(f)=\{a|a\in A, \text{die Gleichung f(x)=f(a) in x hat genau eine Lösung}\}$$

♦ Verbale Charakterisierung von I(f)? ♦ Sei q=$(\mathbb{R}, x\longmapsto x^2, \mathbb{R})$ und k=$(\mathbb{R}, x\longmapsto x^3, \mathbb{R})$. Was ist I(q), was I(k)? ♦ Was muss für I(f) gelten, damit f injektiv ist?

★ Sei h=$(\mathbb{R}, x\longmapsto ax(1-x), \mathbb{R})$. a äußerer Parameter. Bestimmen Sie $h\circ h(x)$ und $h\circ h\circ h(x)$.

f$\circ f(x)=f(f(x))$

h(y)=ay(1-y) h(h(x))=a$[ax(1-x)]\,(1-[ax(1-x)])$

$h(h(h(x)))=a^3x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x))\,\bigl(1-a^2x\,(1-x)\,(1-ax\,(1-x))\bigr): a^3x+6a^6x^5+2a^5x^3-6a^6x^4+2a^6x^3-a^4x^4+2a^4x^3-a^3x^2-a^5x^2-a^4x^2-a^7x^4+4a^7x^5-6a^7x^6+4a^7x^7-a^5x^4-2a^6x^6-a^7x^8$

Vorbereitung Skript Kap.8.2.1
f(x) mit Nullstelle bei x=0
Was soll wohl heißen *f(x) geht schneller als x^2 nach Null*
oder "geht quadratisch nach Null"
$\frac{f(x)}{x^2}$ was passiert für x$\to$ 0 ?

Beweis: Cosinussatz
Dreieck mit Kanten $\vec{a}, \vec{b}$ 3. Seite $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$
berechne $\vec{c}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$
c$^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Beweisen Sie den "Sinussatz" für ein allgemeines Dreieck, indem Sie im Dreieck ein Lot (von einem Eckpunkt auf eine gegenüberliegende) Seite fällen und die Lotlänge auf zwei Weisen ausrechnen.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Herleitung einer nützlichen Identität für sinx+siny

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$$
$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).}$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - cos(2\alpha)\right)}$$
$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - cos(x)\right)}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + cos(x)\right)}$$
$$\sin\frac{x}{3}$$

$$x^x = e^{x \cdot \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^x$$

Wachstumsfragen
(ein spezieller Aspekt des Verhaltensproblems)

1) Betrachte $\boxed{f(x) = e^x - x^{10}}$ für immer größere x. Der erste Summand geht gegen $+\infty$, der zweite gegen $-\infty$. Wer gewinnt? Oder gewinnt keiner?

2) Betrachte $\boxed{g(x) = x^5 e^{-x} = \frac{x^5}{e^x}}$ für immer größere x. Der Zähler ....Wer gewinnt? Oder gewinnt keiner?

Dasselbe für immer kleinere x also x$\to -\infty$

3) Betrachte $\boxed{f(x)=\frac{(\ln x)^{100}}{x^{0.1}}}$ für immer größere x. Der Zähler .... Wer gewinnt? Oder gewinnt keiner?
4) $\frac{\ln x}{\sin x}$ Was ist hier los?
Numerisches Beipiel:

$e^5 - 5^{10} = -9.7655 \times 10^6$ $e^6 - 6^{10} = -6.0466 \times 10^7$ $e^8 - 8^{10} = -1.0737 \times 10^9$
$e^{10} - 10^{10} = -1.00000 \times 10^{10}$ $e^{15} - 15^{10} = -5.7665 \times 10^{11}$
$e^{20} - 20^{10} = -1.0240 \times 10^{13}$ $e^{30} - 30^{10} = -5.798 \times 10^{14}$
$e^{100} - 100^{10} = 2.6881 \times 10^{43}$

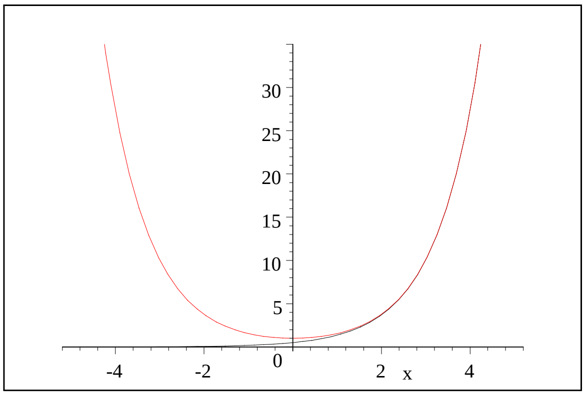
$\frac{x+3\sin(x)}{x^2+19}$ $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
Wie kommt man auf die Gleichung x=$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$

e$^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
Die nächsten Beispiele wurden ad hoc als Einstieg in die und später Begleitung der rekursiven Konstruktion neuer Funktionen benutzt.

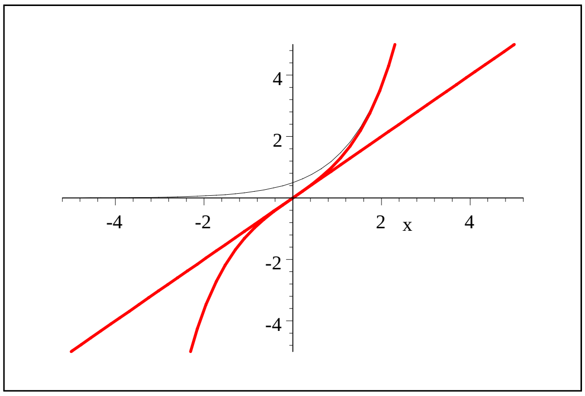
ch(x)=$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
sh(x)=$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
ch$^2(x) - sh^2(x) = 1$

4=$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

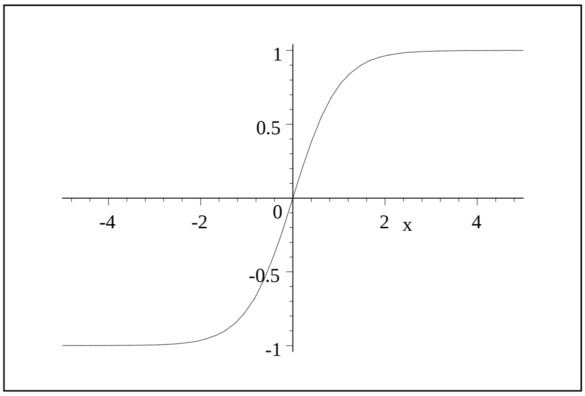
$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$



$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

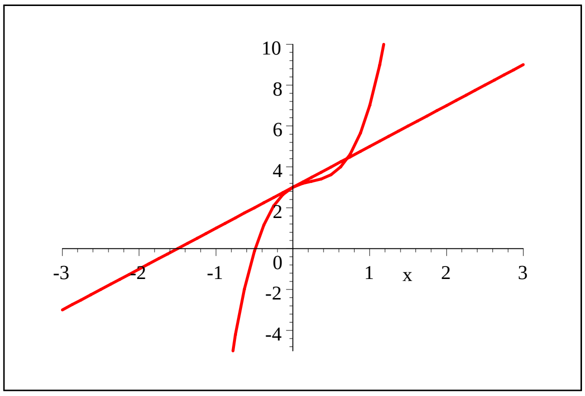


th(x)=$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$



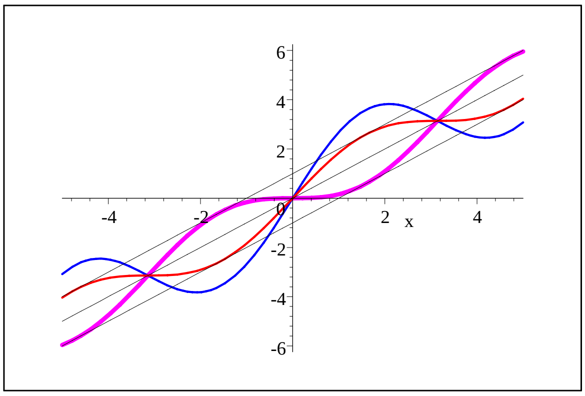
ch(x+y)=ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)
ch(x+y)=$\frac{1}{2}(e^{x+y}+e^{-x-y})$

ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)=$\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})$
=$\frac{1}{4}\left(2e^x e^y+2e^{-x}e^{-y}\right)$
p(x)=$7x^3-5x^2+2x+3$



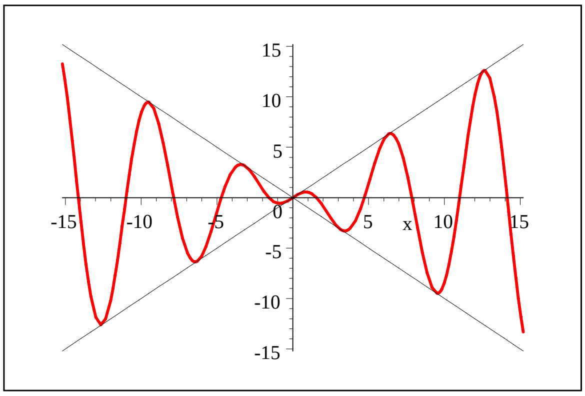
Verhalten von p bei x=0?

x+2sin(x) $\quad x$

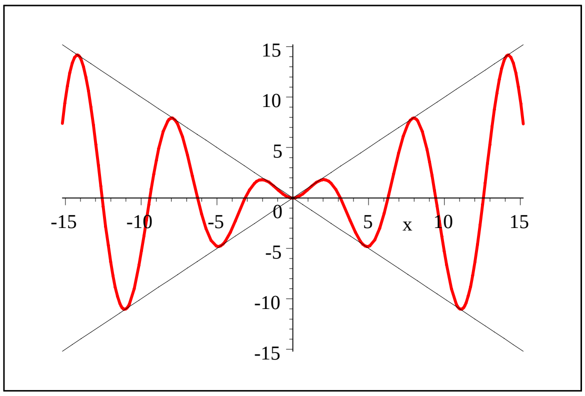


$\boxed{x}\boxed{\cos(x)}$ $\quad$ x=0 $\quad$ cos(0)=1 $\quad$ f(x)≈ x

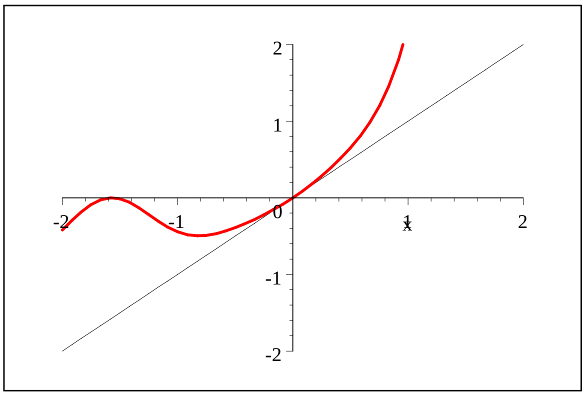
x



xsin(x)

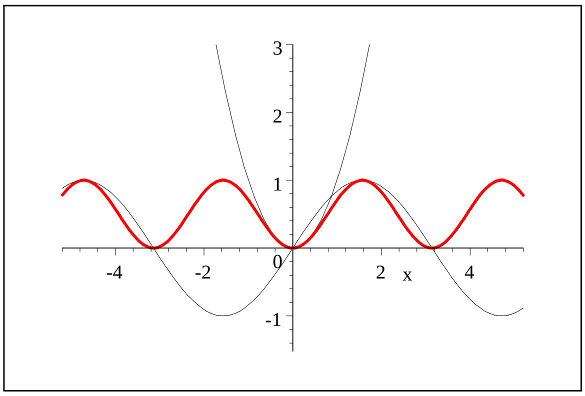


(1+sin^7(x))(e$^x - 1$)
$(1 + \sin^7 x)(e^x - 1)$

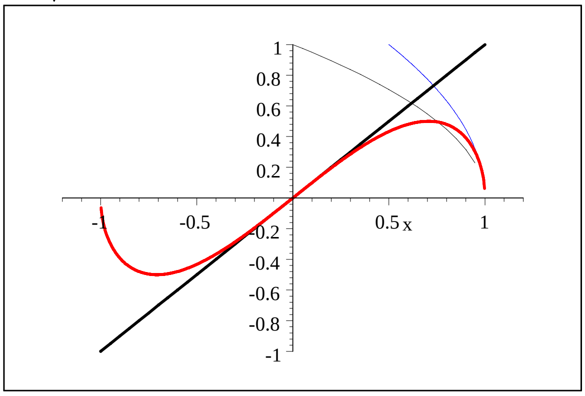


$\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ $\quad$ $\sqrt{|\sin(x)|}$

$\sin^2 x$

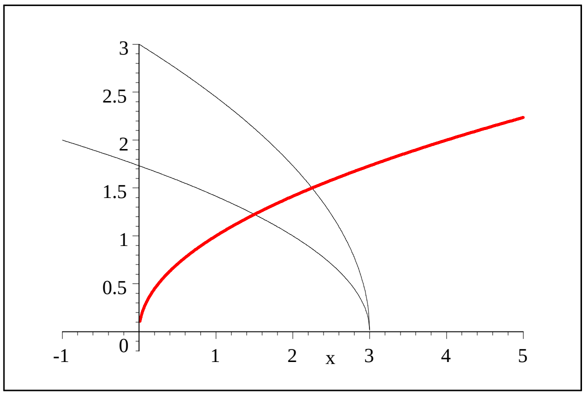


$F(x) = x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$

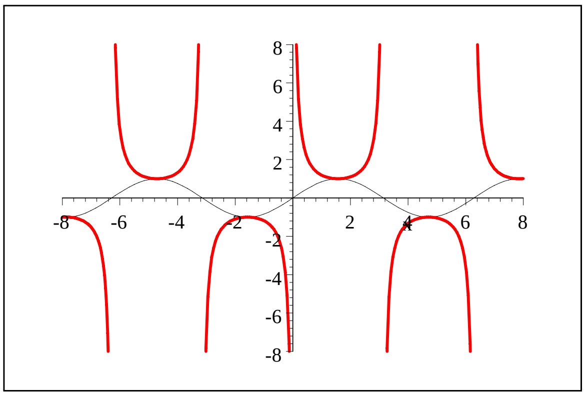


Verhalten bei x=0 $\quad$ x1
Verhalten bei x=1$\sqrt{1-x}\sqrt{2}$
Verhalten bei x=-1 $\sqrt{1+x}(-1)$

$\sqrt{x} \quad \sqrt{3}\sqrt{3-x}$



$\frac{1}{\sin x}$



29.9.2006

Das erste Hauptproblem des Analysiteils wurde eingeführt: Die Umsetzung von im Rechenausdruck enthaltener Information in Verhaltensinformation, die möglichst graphisch darzustellen ist. Da hier mehrheitlich einige Vorkenntnisse verfügbar zu sein schienen, wurde von Beispielen und gestellten Fragen ausgegangen, statt des festen Ablaufes, wie er vom Skript vorgegeben ist. Dadurch entstanden einerseits einige Lücken, andererseits dürfte die "performance" auf diese Weise besser sein wie auch die Übungsbeispiele zeigten. Auch tauchten einige gute Fragen auf.

Nochmals die Kapitelübersicht: (Dabei besonders wichtig unter den hilfen: Die kleinen Transformationen und die Umformung des Rechenasudrucks

Reelle Funktionen
Grundausstattung:

- Homogene Polynome (Parität, Paritätstest, Wachstums- und Nullstellenverhalten)
- Sinus und Cosinus (Additionstheoreme)
- Exponentialfunktion

Rekursive Konstruktionen

- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ Spiegelung x-Achse!
- (f+g)(x)=f(x)+g(x) (Dominanzargumentation)
- (fg)(x)=f(x)g(x) (Nullstellenverhalten - Regel!)
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (Pole!)
- $g \circ f(x) = g(f(x))$ $\boxed{\text{Graphenkonstr. fehlt noch ! Erledigt}}$
- $f^{-1}(x)$ über $\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(y)) = y$ und $\mathrm{f}^{-1}(f(x)) = x$

  2 **Testfragen:** $\boxed{\mathrm{e}^{3x+2} = 7}$?x $\boxed{\text{Bestimme alle x mit } \sin(x)=\frac{1}{2}}$

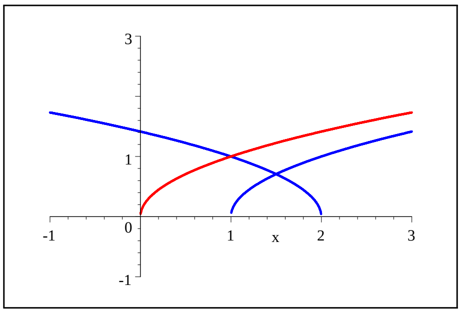
Hilfen:

- kleine Transformationen (Beispiel $\sqrt{1-x}$)
- Umformung Rechenausdruck
- Kurvenscharen
- Verlaufsdiagramme...

Kleine Transformationen:

Das Beispiel von Gestern:

- Man kennt das (normierte) Nullstellenverhalten von $\sqrt{x}$ insbesondere den Graphen.
- Dann kann man auch das Verhalten der Nullstellen $\sqrt{x-1}$ $\sqrt{x-x_0}$ $\sqrt{1-x_0}$ usw angeben!! Die Figur zeigt die Graphen von $\sqrt{x}$ (rot) , $\sqrt{x-2}$ und $\sqrt{2-x}$

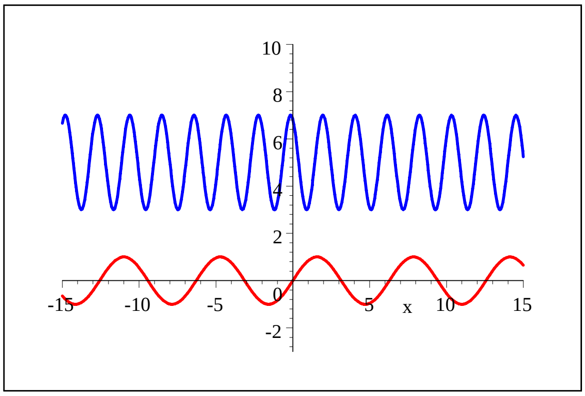


- Ebenso: sin hat bei x=0 die Nullstelle des Typs y=x (Nährerung). Infolge der Periodizität des sin sehen die Näherungen der anderen Nullstellen wie folgt aus: (-1)(x-π) bei x=π, +1(x-2π) bei x=2π usw. Es genügt also, Die Näherung bei x=0 zu kennen, dann folgen die Näherungen der übrigen Nullstellen über kleine TRansformationen.

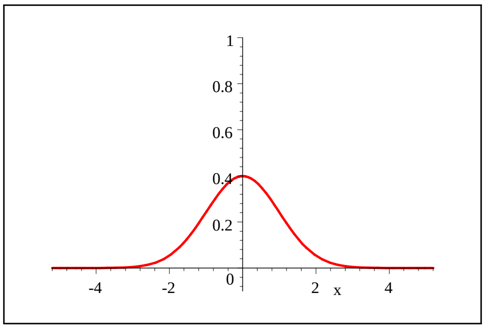
Ausgearbeitet Ausführungen im Skript!

Weiteres Beispiel: Aus dem bekannten Graphen von x$\longmapsto$ sin x soll das Verhalten von x$\longmapsto$x$\longmapsto$2sin(3x+2)+5=2sin(3(x (-$\frac{2}{3}$))) + 5 hergeleitet werden: Verschiebe nach -$\frac{2}{3}$ / Stauche den Graphen in x-Richtung um 3)/ Strecke in y-Richtung um 2 un Verschiebe in y-Richtung um 5. *Das sind alles Transformationen, die leicht vorzustellen sind!*

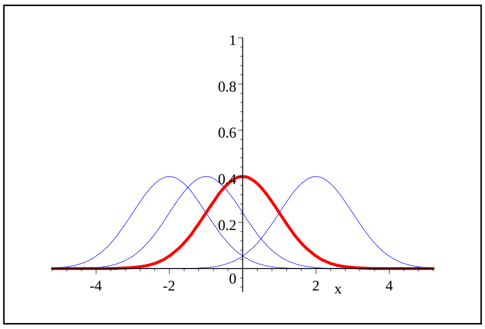
Die beiden Graphen:



Ein weiteres Beispiel: Die Normalverteilung: Start ist die Standardnormalverteilung $\mathrm{x} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$

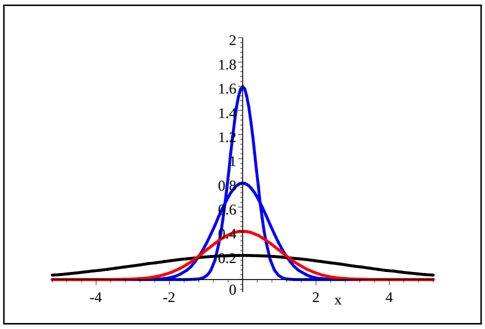


Ersetzt man das durch $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}}\right)^2}$, so wird in x-Richtung um x_o verschoben. Das Maximum liegt bei x_0 . Das Bild zeigt die drei Fälle $\mathrm{x}_0 = 2$ und $\mathrm{x}_0 = -1, -2$.



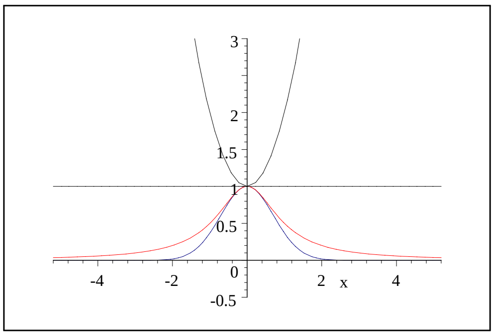
Außerdem wird noch Breite und Höhe des Graphen modifiziert und zwar so, dass der Flächeninhalt unter dem Graphen konstant bleibt. Das wird wie folgt erreicht: $\mathrm{x} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\sigma})^2}$ Also:

Der Graph wird in x-Richtung um σ gestaucht und in y-Richtung um $\frac{1}{\sigma}$ erhöht! Die Figur zeigt $\sigma = 2$ und $\sigma = \frac{1}{2}$ und $\sigma = \frac{1}{4}$ für $\mathrm{x}_0 = 0$.



Andere Funktionen mit glockenförmigen Graphen:

$\mathrm{x} \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ und $\mathrm{x} \longmapsto \frac{1}{1+x^4}$ usw. Die konstruktion:

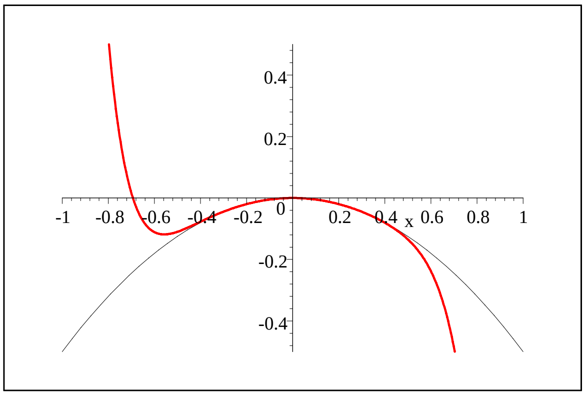


Das Problem der Bestimmung des Nullstellentyps. Zu verstehen ist die allgemeine Regel aus (8.3.31). Dazu muss man die Näherungen etwa von sin, cos und exp bei x=0 **wissen.** Dan kann man die meisten Fälle leicht angeben. **Aber die Anwendung macht immer Mühe, weil irgend: etwas nicht da ist.**

Beispiel: Verhalten bei x=0?

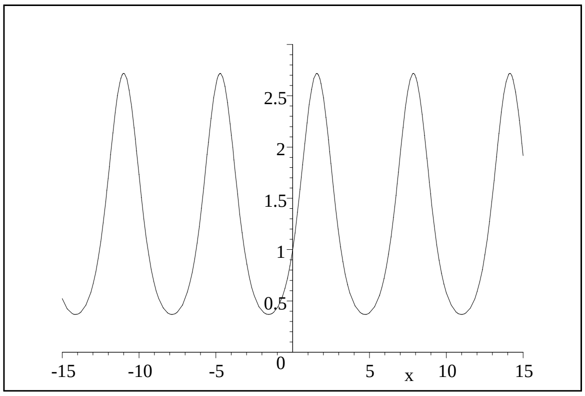
$$\underbrace{(1+13x^7)}_{\approx 1}\cdot\underbrace{(\cos(x)-1)}_{(1-\frac{1}{2}x^2)-1}\approx\ -\frac{1}{2}x^2$$

Der Graph, schwarz die Näherungsparabel x$\longmapsto -\frac{1}{2}x^2$

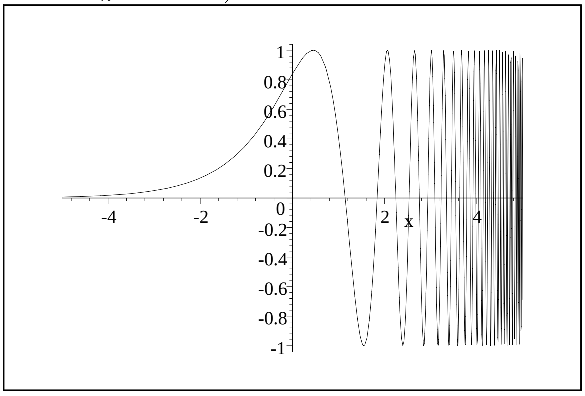


Beispiele für die Konstruktion des Graphen einer zusammengesetzten Funktion:

x$\longmapsto e^{\sin(x)}$ Sinus läuft zwischen -1 und +1, also e$^{\sin(x)}$*zwischen* e^{-1} und e^{1}.

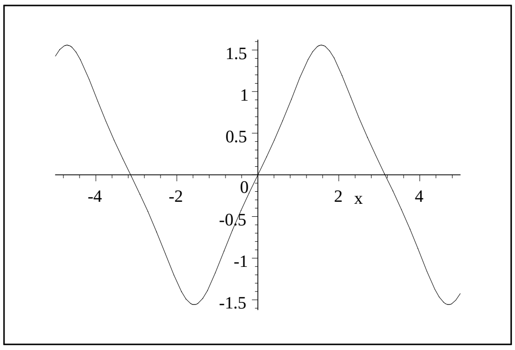


Und $\sin(e^x)$. Mit zunehmendem x wird der Abstand zwischen den Schwingungen immer kürzer. (Nullstellen bei $\sin(\mathrm{e}^{x_n}) = n\pi$. Das nach x_n auflösen!)



Die beiden Funktionern $\tan(\sin(x))$ und sin(tanx). Skript (8.3.56)

$\tan(\sin(x))$



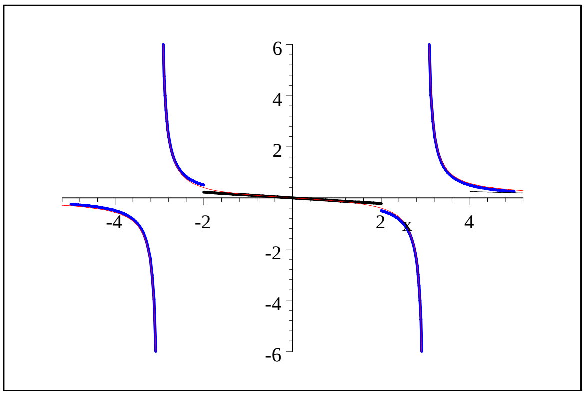
Umformung Rechenausdruck (erlaubt jeweils einen speziellen Verhaltenszug per Inspektion zu finden:

$$\mathrm{x} \longmapsto \frac{x}{x^2-9} = x\frac{1}{x-3}\frac{1}{x+3}$$

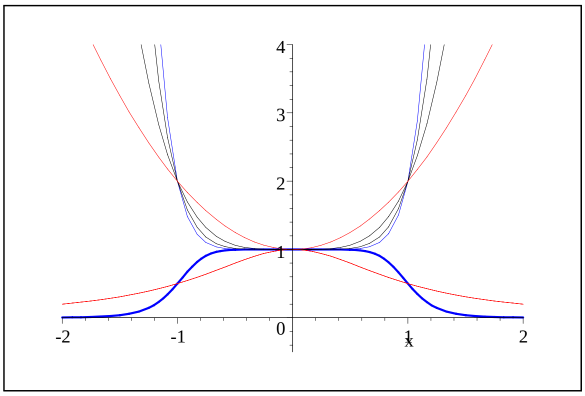
Esliegen zwei Pole bei x=3 und x=-3 vor und eine Nullstelle bei x=0.

$\approx \frac{3}{6}\frac{1}{x-3}$ bei x=3 und $\approx \frac{-3}{-6}\frac{1}{x+3}$ bei x=-3 und $\approx -\frac{1}{9}x$ bei x=0.

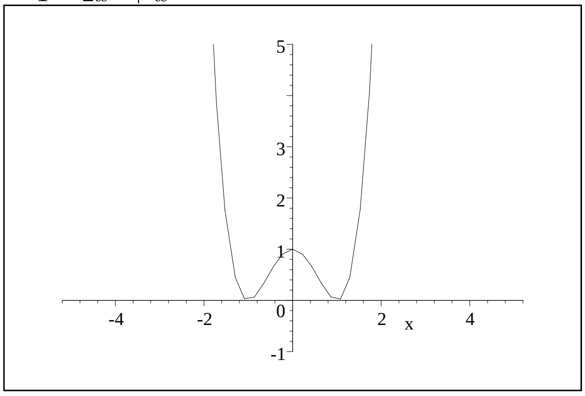
Im bild rot der Graph und blau und schwarz die Approximationen in ihren jeweiligen Bereichen.!



$\frac{1}{1+x^{2n}}$



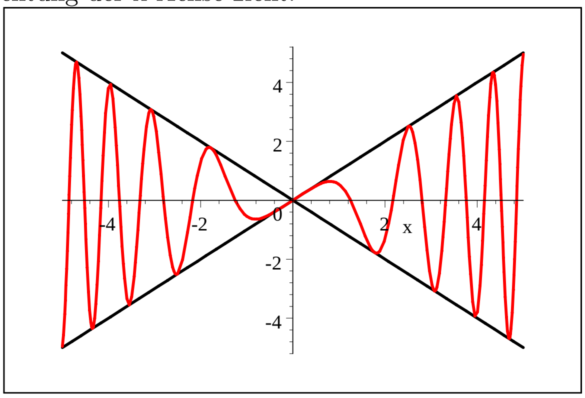
$1 - 2x^2 + x^4$



Eine Reihe von jetzt leicht machbaren Beispielen!

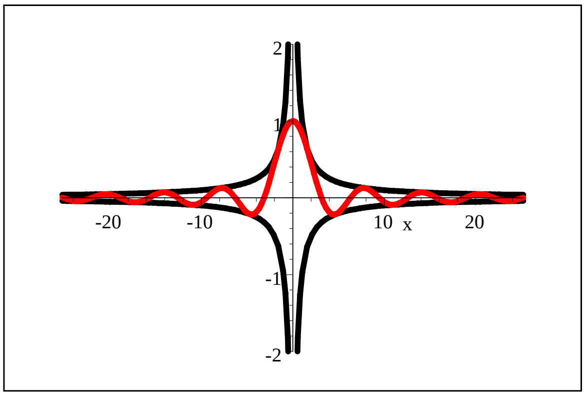
$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$	$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$	$x \mapsto x + (x-1)(x-2)(x-3)$	
$x \mapsto x - sin(x)$	$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	$x \mapsto \frac{x}{\sin x}$	$x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$
$x \mapsto \frac{x}{a^2-x^2}$ mit a>0	$x \mapsto x\cos(x^2)$	$x \mapsto x^2\cos(x)$	$x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$
$x \mapsto \sin(\sin x))$	$x \mapsto \cos(\sin(x))$	$x \mapsto e^x - x^{2m}$ m=0,1,2,....	

Einige Beispiel mit Einhüllender oder besser Begrezungskurven:
Betrachtet man F(x))=$x\cos(x^2)$, so gilt -x$\leq F(x) \leq x$, da der cos-Faktor den Funktionswert immer in Richtung der x-Achse zieht:



$\frac{-1}{2}\frac{1}{x-a}$ -$\frac{1}{2}\frac{1}{x+a}$

$\frac{\sin x}{x}$ Hier geht der GRph glatt durch x=0 hindurch



Einhüllende: Betrachte hierzu x$\longmapsto f_\omega(x) = \frac{\sin \omega x}{x}$ mit dem äußeren Parameter ω. Variiert man ω, so wird tatsächlich der gesamte Innenbereich ausgefüllt! Insbesondere ist f$_\omega(0) = \omega$. Im nächsten Bild sind die Graphen ´für $\omega = 0.4$, 0.6, 0.8,....1.6 eingezeichnet