Tagebuch 2. Woche!

18.9. Warmdenken

In der Ebene seien drei Massenpunkte mit Masse $\mathrm{m}_1$, $\mathrm{m}_2$,$\mathrm{m}_3$ und Ortsvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ aus $\mathrm{V}_0^2$ gegeben.

**Rekonstruieren** Sie die Schwerpunktformel für drei Massen!!!

a) Sei (a äußerer Parameter)

$$\begin{array}{lll} \mathrm{m}_1 = 1 & \mathrm{m}_2 = 3 & \mathrm{m}_3 = 2 \\ \vec{x}_1^K = (a, 0) & \vec{x}_2^K = (2a, a) & \vec{x}_3^K = (0, 2a) \end{array}$$

Bestimmen Sie den Ort des Schwerpunktes. (Endform)

b) Die Orte der drei Massenpunkte seien wie in a) gegeben. Kann man dann die Masse des ersten Massenpunktes so ändern, dass der Schwerpunkt in $\vec{x}_W^K = a(2,3)$ liegt? Formulieren Sie das zunächst als allgmeines Problem (ohne Zahlwerte in $\mathrm{V}_0^2$, drei Massenpunkte) und machen Sie sich Gedanken zur Lösbarkeit dieses Problems! Stellen Sie dazu eine allgemeine Gleichung auf. Rollenverteilung? Was wäre zu tun? Kann man die Problembehandlung auf den $\mathrm{V}_0^3$ übertragen?

**Textinterpretation:**

Die Schwerpunktformel für drei Massen läßt sich wegen $\frac{m_1}{M} = 1 - \frac{m_2}{M} - \frac{m_3}{M}$ wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{x}_S &= \frac{m_1}{M}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{x}_2 + \frac{m_3}{M}\vec{x}_3 \\ &= \vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \frac{m_3}{M}(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das als Weg.Wieso zeigt dieser Weg, dass der Schwerpunkt in der von den drei Punkten aufgespannten Ebene liegt:

---

---

Kap.4

**Zentralformel:** $\vec{x}$ ist Linearkombination der Vektorfamilie $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$\boxed{\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = x\tilde{\mathbf{a}} + y\tilde{\mathbf{b}} + z\tilde{\mathbf{c}}.}}$$

Dreidimensionaler räumlicher Fall. Typische Rollenverteilung! Vgl. mit Axiomen!!

Beispiel:

$$\begin{aligned} \vec{x}^K &= (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \qquad \text{oder} \\ & \boxed{\vec{x} = \mathrm{x}\vec{e}_1 + \mathrm{y}\vec{e}_2 + \mathrm{z}\vec{e}_3} \end{aligned}$$

Der Schluss von der Summe auf die Summanden!

Schwerpunktformel! Bestimmung eines Ersatzpunktes

1. Als Masse verwendet man die Gesamtmasse
$$M = m_1 + m_2 + .... + m_N.$$
2. Als Ort des neuen Massenpunktes wählt man eine Punkt $S \in E^3$, dessen Ortsvektor (bezüglich des Ursprunges 0) sich wie folgt berechnet:
$$\boxed{\vec{x}_S = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + ... + m_N\vec{x}_N}{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M}\vec{x}_i}.$$
Hierbei soll $\vec{x}_i$ der Ortsvektor des Punktes $P_i$ sein. S wird **der Schwerpunkt des Systems** genannt. Alle Vektoren aus $V_0^3$.
3. Übergang zu Koordinatenvektoren: Allg. Regel!

□ Kann man $\vec{x}_S$ sowie $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ zusammen mit zwei Massen vorgeben und die dritte dann so bestimmen, dass $\vec{x}_S$ der zugehörige Schwerpunkt ist?

▼ **Nein,** das geht in der Regel nicht. Forme dazu wie folgt um:

$$\begin{aligned} M\vec{x}_S - m_2\vec{x}_2 - m_3\vec{x}_3 &= m_1\vec{x}_1 \\ (m_1 + m_2 + m_3)\vec{x}_S - m_2\vec{x}_2 - m_3\vec{x}_3 &= m_1\vec{x}_1 \\ \underbrace{(m_2 + m_3)\vec{x}_S - m_2\vec{x}_2 - m_3\vec{x}_3}_{\vec{a}} &= m_1\underbrace{(\vec{x}_1 - \vec{x}_S)}_{\vec{b}} \end{aligned}$$

Das fällt unter das folgende allgemeinere Problem: $\vec{a}, \vec{b}$ vorgegebene Vektoren. Gibt es einen Zahlfaktor $\lambda$, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ ? Das ist i.a. nicht der Fall (Durch einen Vektor darf nicht dividiert werden!).

---

Vektorielle Beschreibung von Geraden, Ebenen und Flugparabeln

| | | |
|---|---|---|
| $\vec{x}(x, y, z)$ | $=x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ | Beliebiger. Punkt im Raum. Im Spat |
| $\vec{x}_g(u)$ | $=\vec{a} + u\vec{f}$ | Alle Punkte einer Geraden.... |
| $\vec{x}_E(u, v)$ | $=\vec{A} + u\vec{a} + v\vec{b}$ | Alle Punkte einer Ebene.... |
| $\vec{r}_P(t)$ | $=\vec{r}_0 + t\vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ | Alle Punkte einer Parabel... |

Wie beschreibt man Figuren im Konfigurationsraum?

Über eine Gleichungsbeschreibung (Kap.1) . oder eine **vektorielle Parametrisierung.** Die Liste enthält eine erste Gruppe von Parametrisierungen, die alle duch Spezialisierung der Zentralformel erhalten werden

- Genaue Größenbestimmung, typische Rollen! (Verlaufsdiagramm?) Vorgehen in einer typischen Problemsituation:

  Start: Geometrische Besingung für $\vec{x}$
  Umwandeln in Bestimmungsgl. für die Parameter
  Lösen
  Einsetzen der Parameter

Einige Lesitungen, die man für jede solche Parametzrisierung behrsschen sollte:

- Vorgabe einer Parametrisierueng, für einfache und jeweils leicht modifizierte Situationen
- Übergang zu Koordinatenvektoren. Anbringen des $()^K-$ Index.
- Parameterwechsel
- Zugehörige Problemsituation:
  - Schnittmengenbestimmung
  - Spezielle Punkte suchen

---

Spezielle Ergänzungen

**Gerade:**

- Zweipunkteformel mit Konvention (P,Q mit P$\neq Q$, $\vec{x}_P, \vec{x}_Q \in V_0^3$, g durch P und Q)

$$\vec{x}_g(u) = \vec{x}_P + u(\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$$

Besipiel: Die Koordinatenvektoren zweier Punkte der Geraden h seien $\vec{x}_P^K = (1,3,3)$ und $\vec{x}_Q^K = (0,1,H)$. Gebe eine Parametrisierung von h. In geometrische Form und Tupelform bringen.

$$\vec{x}_h^K(\alpha) = (1,3,3) + \alpha(-1,-2,H-3)$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_j^K(u) &= (1+u, 2-3u, u) = (1,2,0) + u(1,-3,1) \\
\vec{X}_E(a,b) &= (a+b, 7-a, 3b) = (0,7,0) + a(1,-1,0) + b(1,0,3)
\end{aligned}$$

Umwandlung Tupelform - geometrische Form unbedingt beherrschen.

- Eine typische Umparametrisierung, mit deren Hilfe man leicht die Umrechnungsformeln findet:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_g(u) &= \vec{a} + u\vec{e} = (\vec{a} + u_0\vec{e}) + (u - u_0)\vec{e} \\
&= \vec{A} + \frac{u-u_0}{k}(k\vec{e}) \\
&= \vec{A} + \lambda\vec{E} \qquad \begin{array}{ll} \vec{A} = \vec{a} + u_0\vec{e} & \text{neuer Punkt auf g} \\ \vec{E} = k\vec{e} & \text{neuer Richtungsv. von g} \\ \lambda = \dfrac{u-u_0}{k} & \text{neuer Parameter} \end{array}
\end{aligned}$$

- Geradlinig gleichförmige Bewegung: Mit spezieller Bedeutung des Parameters!

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{V}(t - t_0) \qquad \vec{V} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{a}$$

**Ebene: Dreipunkteformel** (P,Q,R verschieden)

$$\vec{x}_E(\lambda,\mu) = \vec{x}_P + \lambda(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) + \mu(\vec{x}_R - \vec{x}_P)$$

---

☐ Wieso darf man **nicht** schließen: Wenn $\vec{x}_P$ ungleich Null ist, geht die Gerade nicht durch den Ursprung?
☐ Was geschieht, wenn man in $\vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha\vec{d}$ den Vektor $\vec{d}$ festläßt, aber $\vec{x}_P$ durch $\vec{x}_Q$ ersetzt, wobei Q nicht auf g liegen muss? Was geschieht, wenn man umgekehrt $\vec{x}_P$ fest läßt, aber $\vec{d}$ verändert.

☐ Skizzieren Sie den Verlauf der durch die Parametrisierung $\vec{x}_g^K(a) = (0,0,2) + a(1,1,0)$ gegebenen Geraden im Raum.
☐ Geben Sie eine Parameterdarstellung der x-Achse und der ersten Winkelhalbierenden der y-z-Ebene.▼
☐ Was erhält man, wenn man in der Zuordnung $a \mapsto \vec{x}_g(a) = \vec{x}_P + a\vec{d}$ nur die Parameterwerte $0 \leq a \leq 1$ zuläßt? Was, wenn man $0 \leq a < \infty$ zuläßt?

☐ Der Aufpunktvektor $\vec{a}^K$ und Richtungsvektor $\vec{d}^K$ seien gegeben. Wie erkennt man, ob die zugehörige Gerade ganz in der x-z-Ebene verläuft? (Was muss gelten?)

■ 2.)Bringen Sie folgende Parametrisierungen (aus der Tupelform) in die geometrische Form:

$$\vec{y}_g(a) = (1-a, 2a, 5a-7) \qquad \text{und} \qquad \vec{x}_E(u,v) = (1+u-2v, a+2u, bv)$$

▼▲

■ 3.) Es sei $\vec{a} = (2,3,-1)$ und $\vec{b} = (1,0,7)$. Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden, die durch die Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt wird.

a) Liegt der Punkt Q mit $\vec{x}_Q^K = (4,9,-15)$ auf dieser Geraden?

$\vec{x}_g(a) = (2,3,-1) + a(-1,-3,8) = (2-a, 3-3a, -1+8a)$ (

$\vec{x}_g(a_0) = (4,9,-15) = (2-a_0, 3-3a_0, -1+8a_0)$
4=2-$a_0$ $\boxed{a_0 = -2}$ 9=3+6, -15=-1+8(-2)

b) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt nicht auf dieser Geraden liegt. Bestimmen Sie dann eine Parametrisierung der Ebene E, die durch den Nullpunkt geht und g enthält.

c) Wo schneidet E die x-y-Ebene.

■ 4) Ein bewegter Körper befinde sich zur Zeit $t_1 = -2$ am Orte A und zur Zeit $t_2 = 5$ am Orte B mit Koordinatenvektoren $\vec{r}_A = (-3,5,7)$ und $\vec{r}_B = (0,-4,13)$.

a?)Wie groß ist die mittlere vektorielle Geschwindigkeit in diesem Zeitraum?

▼ Das Result aus b) gibt mit T=t+2:

$$\vec{r}(t) = \frac{(-21,35,49) + (3,-9,6)T}{7} = \frac{1}{7}(-21+3T, 35-9T, 49+6T)$$

Für $T_s = -\frac{49}{6}$ gilt z=0. Es folgt für die gefragte Zeit $\underline{t_S = -\frac{61}{6}}$. (Mehr war nicht gefragt!)

■ 9.) Parametrisieren sie alle Geraden im Raum, die durch einen festen Punkt P$\in E^3$ gehen. Das ist mit 3 Parametern leicht, sollte aber auch mit zweien gehen. Was für ein Problem tritt auf?

■ 10.) Ein Mensch bewegt sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich die Spitze seines Schattens? (Bezeichnungen, Rollenverteilung, gesuchte Form des Resultates- dann Lösung.)

Die Vertikalrichtung sei $\vec{e}_3$. Die Horizontalebene sei die 1-2-Ebene. Die Laternespitze habe den Ort L$\vec{e}_3$.
$\vec{V}$ $\vec{e}_3$ $\vec{a}$

Lösung Aufgaben Kap. 4 Die Bewegung des Schattens

---

**Flugparabel. Besonder wichtiger Teil!**

- Konfiguration und Rahmen  Wann hat man eine flugparabel zu erwarten?
- Die beiden Formeln
  - Größeninterpretation
  - Festlegung, Benutzung der Hilfsgröße $T=t-t_0$

*Das sollte man selbsttätig rekonstruieren können!*

- Eine typische Beispielaufgabe:

■ 6.) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(2) = (0,0,0)$ und $\vec{v}^K(2) = (5,5,10)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0,0,-10)$. Wie lautet die Formel für die Flugparabel? (Geometrische und Tupelform!) Wie die vektorielle Geschwindigkeit?
★ Die benötigten Formeln:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (5,5,10)(t-2) + \frac{1}{2}(0,0,-10)(t-2)^2 = (5T, 5T, \underbrace{10T - 5T^2}_{z(t)}) \\
\vec{v}(t) &= (5,5,10) + (0,0,-10(t-2) = (5,5,10-10T)
\end{aligned}$$

★ Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=5? Also  T=5-2=3
$\vec{r}(5) = (15,15,-15)$

★ Wo liegt der Scheitel? Bei $T_S = 1$  d.h $t_S = 3$

★ Bestimme den Schnitt der Flugparabel mit der Ebene z=H
$t_S$  t  Rollenw  z(t)=H  $10T\text{-}5T^2 = H$

$$\begin{aligned}
T^2 - 2T + \frac{H}{5} &= 0 \\
T_{12} &= 1 \pm \sqrt{\frac{5-H}{5}} \\
t_{12} &= 3 \pm \sqrt{\frac{5-H}{5}}
\end{aligned}$$

Also:

$$\vec{r}^K(t_S) = 5(T_S, T_S, 0) = 5(3 \pm \sqrt{\frac{5-H}{5}}, 3 \pm \sqrt{\frac{5-H}{5}}, 0)$$

Das Problem der maximalen Flugweite: Wie ist der Abschusswinkel zu wählen? $\vec{r}^K(t) = (0, Vt\cos\alpha, Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)$

$$\begin{aligned}
Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \qquad (\text{t=0}) \\
t_W &= \frac{2V}{g}\sin\alpha \\
y(t_W) &= \frac{2V^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{V^2}{g}\sin(2\alpha)
\end{aligned}$$

Nochmals etwas anders:

▼ Die beiden immer verlangten Angaben:

$$\boxed{\vec{r}^K(\text{t})=(5,5,10)\text{T}+\tfrac{1}{2}(0,0,-10)\text{T}^2=(5\text{T},5\text{T},10\text{T-}5\text{T}^2)}$$

$$\boxed{\vec{v}^K(\text{t})=(5,5,10\text{-}10\text{T}) \qquad \text{wobei T=t-2 gesetzt ist.}} \quad ▼$$

a?) $\vec{r}^K(0) = ....?$ $\vec{r}^K(-2) = ...?$ $\vec{v}^K(-2) = ....?$ $\vec{r}^K(3) = ..?$ ▼

$$\begin{aligned}\vec{r}^K(0) &= (-10,-10,-40) \qquad \vec{r}^K(-2) = (-40,-40,-120)\\ \vec{v}^K(-2) &= (5,5,50) \ \ ......\end{aligned}$$

▲

b? )Wo liegt der Scheitelpunkt?
▼ Es muß $v_3 = 0$ gelten. Also 10-10T=0. Es folgt $T_S$=1 oder $t_S = 3$. Das gibt für den Ort des Scheitels

$$\vec{r}(t_S) = (5,5,5)$$

▲

c?) Wann und wo wird die Ebene z=2 getroffen?

▼ Für die zugehörigen Zeitpunkte folgt die Bedingung 10T-5T$^2$ = 2. Also

$$T_z = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \text{oder} \qquad \text{t}_z = 3 \pm \frac{1}{5}\sqrt{15}.$$

Einsetzen gibt für die beiden Orte (z=2 ohne zusätzliche Rechnung!):

$$\vec{r}(t_z) = (5 \pm \sqrt{15}, 5 \pm \sqrt{15}, 2)$$

▲

Das Schnittmengenproblem:

Gegeben zwei Ebenen E und F im Raum durch folgende Parametrisierungen gegeben:

$$\begin{aligned}\vec{x}_E(a,b) &= (1,1,0) + a(1,0,1) + b(0,1,2) = (1+a, 1+b, a+2b)\\ \vec{x}_F(u,v) &= u(1,-1,1) + v(2,0,1) = (u+2v, -u, u+v)\end{aligned}$$

Vorgehen im Beispiel:

$$\begin{aligned}v_S &= 1 - 2b_S\\ u_S &= -1 - b_S\end{aligned}$$

$$\vec{x}_F(-1-b_S, 1-2b_S) = (1-5b_S, 1+b_S, -3b_S) = (1,1,0) + b_S(-5,1,-3)$$

$$\begin{aligned} 1 + a_S &= u_S + 2v_S \\ 1 + b_S &= -u_S \\ a_S + 2b_S &= u_S + v_S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + a_S + b_S &= 2v_S \\ 1 + a_S + 3b_S &= v_S \end{aligned}$$

$$-a_S - 5b_S = 0 \qquad \boxed{\text{b}_S \quad \text{frei} \quad \text{a}_S\text{=-5b}_S}$$

$$\vec{x}_E(-5b_S, b_S) = (1-5b_S, 1+b_S, -3b_S) = \boxed{\text{(1,1,0)+b}_S\text{(-5,1,-3)=}\vec{x}_S(\text{b}_S)}$$

$$\begin{aligned} v_S &= 1 - 2b_S \\ u_S &= -1 - b_S \end{aligned}$$

.

---

Und am Ende über die Verallgemeinerung des gefundenen Schemas::

- Schnitt zweier ebenen in 4 Dimensionen
- Schnitt anderer Gebilde in unterschiedlichen Dimensionen
- Vierdimensionaler Würfel! Vgl. Übung zu Kap.2

---

---

19.9.

Erinnerung: **? Anzahl der zulässigen Beklammerungen?**
**Aus Kap. 1 "Scheinbare Tiefe des Wasserbeckens"?**

Aufwärmen:
☐ Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(-3) = (2,0,0)$ und $\vec{v}(-3) = (0,3,4)$. Weiter sei $\vec{g}$=(0,0,-g)
a) Wie lautet die Flugparabel? (2×2 Gleichungen!) 2min
b) In welcher Ebene verläuft die Flugbahn? 1min
c) Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=1? 1min
d) Wo liegt der Scheitel? 2min
e) Die Beschleunigung g werde eine Zeiteinheit nach dem Scheiteldurchgang abgeschaltet. (von da ab g=0). Mit welcher Geschwindigkeit fliegt der Körper dann weiter? Und wo trifft er die Horizontalebene? 4 min

---

.Beispiel: **Schnitt Gerade mit Ebene:**
☐ Es sei g eine Gerade mit Parametrisierung $\vec{x}_g(a) = (1,1,0) + a(1,2,H)$ und E eine Ebene mit Paramtrisierung $\vec{x}_E(u,v) = (1,-1,0) + u(0,0,1) + v(1,2,1)$. Bestimmen Sie die Schnittmenge.
▼ Inspektion: 3 Gl. für 3 Unbest und 1 ä.P. Im typischen Fall erwarten wir eindeutige Lösung. Sonderfall?

Tupelform:

$$\begin{aligned}\vec{x}_g(a) &= (1+a, 1+2a, Ha)\\ \vec{x}_E(u,v) &= (1+v, -1+2v, u+v)\end{aligned}$$

Gleichsetzen der Komponenten und Rollenwechsel (unabh. Variable $\longmapsto$ *Unbestimmte*)

| | |
|---|---|
| 1+a=1+v | d.h a=v |
| 1+2a=-1+2v | d.h 2a=2v-2 |
| Ha=u+v | Ha=u+v |

Was heißt das??? Wegen der daraus folgenden Forderung 2v=2v-2, also 0=-2 ist das System unlösbar.

Es gibt für keinen H-Wert einen Schnittpunkt.
Daher modifizieren wir die Ebene etwas:

---

□ Es sei g eine Gerade mit Parametrisierung $\vec{x}_g(a) = (1,1,0) + a(1,2,H)$ und E eine Ebene mit Paramtrisierung $\vec{x}_E(u,v) = (1,-1,0) + u(0\boxed{,m,}1) + v(1,2,1)$. Bestimmen Sie die Schnittmenge.

▼ Inspektion: 3 Gl. für 3 Unbest und 1 ä.P. Im typischen Fall erwarten wir eindeutige Lösung. Sonderfall?
Tupelform:

$$\begin{aligned}\vec{x}_g(a) &= (1+a, 1+2a, Ha)\\ \vec{x}_E(u,v) &= (1+v, -1+\boxed{\text{mu}}+2v, u+v)\end{aligned}$$

Gleichsetzen der Komponenten und Rollenwechsel (unabh. Variable $\longmapsto$ *Unbestimmte*)

$$\begin{array}{lcc} 1+a=1+v & & \\ 1+2a=-1+mu+2v & \text{d.h.} & \boxed{\begin{array}{l} a=v \\ 2a=mu+2v-2 \\ Ha=u+v \end{array}} \\ Ha=u+v & & \end{array}$$

a raus! (2 Gl. für u und v)

$$\begin{aligned} 0 &= mu - 2\\ (H-1)v &= u\end{aligned}$$

u raus!

$$m(H-1)v = 2$$

Also **Rollenwechsel und Verzweigung**:
i) m≠ 0, H≠ 1

$$\boxed{v=\frac{2}{m(H-1)} \quad u=\frac{2}{m} \quad a=\frac{2}{m(H-1)}}$$

(Probe: ....

$$\begin{aligned}\vec{x}_g(a) &= (1+a, 1+2a, Ha)\\ \vec{x}_E(u,v) &= (1+v, -1+\boxed{\text{mu}}+2v, u+v)\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}\vec{x}_g\left(\frac{2}{m(H-1)}\right) &= \left(1+\frac{2}{m(H-1)}, 1+\frac{4}{m(H-1)}, \frac{2H}{m(H-1)}\right)\\ &= \frac{1}{m(H-1)}(mH-m+2, mH-m+4, 2H)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_E(\frac{2}{m},\frac{2}{m(H-1)}) &= \left(1+\frac{2}{m(H-1)},-1+2\frac{2}{m(H-1)},\frac{2}{m}+\frac{2}{m(H-1)}\right)\\ &= \frac{1}{m(H-1)}\left(mH-m+2,mH-m+4,2H\right)\end{aligned}$$

Eindeutiger Schnittpunkt!

ii) $\boxed{\text{H=1}}$: Jetzt lauten die Gleichungen: $\boxed{\begin{array}{l}\text{a=v}\\ \text{2a=mu+2v-2}\\ \text{a=u+v}\end{array}}$ oder u=0 und 0=-2. Also erneut kein Schnittpunkt.

iii) m=0: Oben bereits behandelt. Auch unlösbar.

---

- **5.1: Begriffssystem**
  - Unterschied *Bestimmungsgleichung - Gültige Gleichung (* ist wahre Aussage!) *(Kap.1.8: Unbestimmte.)*
  - Lösung einer Bestimmungsgleichung, **Lösungsmenge** (Ergebnis, nicht der Weg ist wichtig. $IL_{M,\vec{b}}$
  - Was ist ein lineares Gleichungssystem? Normalform !
  - Matrix und Matrixschreibweise $\boxed{\text{M}.\vec{x}=\vec{b}}$ Regel *Zeile mal Spalte* / Vorgabe über M und $\vec{b}$. (Matrix, i-j-te Matrixkomponente, Zeile Spalte, Diagonale)
  - Zuordnungsinterpretation $\vec{x}\mapsto\vec{y}=M.\vec{x}$ Mit $\vec{x}\in\mathbb{R}^n\boxed{??}$ und $\vec{y}\in\boxed{??}$ Gesucht sind alle $\vec{x}$ für die M.$\vec{x}=\vec{b}$ gilt.
  - Die geometrische Interpretation von $\vec{x}\mapsto M.\vec{x}$ (Projektion, Drehung.)
  - Die **Linearitätsregeln** (Distributiv, jeder mit jedem, zugeh. Gebrauchsregel?)

$$\begin{aligned}M.(\vec{x}+\vec{y}) &= M.\vec{x}+M.\vec{y}\\ M.(\alpha\vec{x}) &= \alpha M.\vec{x}\end{aligned}$$

Daraus folgt z.B.

$$M.\left(\sum_{i=1}^N a_i\vec{x}_i\right)=\sum_{i=1}^N a_i\left(M.\vec{x}_i\right)\quad \text{distributives rechnen}$$

---

Das Elimnationschema: Siehe Skript

Kurzform:

▼ **Die Eliminationsschritte:**

★Bei jedem Eliminationsschritt wird eine Unbestimmte ausgewählt, die (mindestens) aus dem nachfolgenden System herausfallen soll. Das wird meist durch die üblichen Kombinationsbildungen der Gleichungen bewirkt. Keine Gleichung darf dabei vergessen werden. Triviale Gleichungen dürfen fortgelassen werden.

★Das **Ergebnis jedes Eliminationsschrittes** ist ein neues Gleichungssystem mit mindestens einer Unbestimmten weniger und mindestens einer Gleichung weniger.

▼ **Ende der Elimination:**

★ Nach endlich vielen Schritten gelangt man zu einem System (**mit einer einzigen Gleichung** mit mindestens einer Unbestimmten) oder (einem unlösbaren System).

★ Ist die verbleibende Gleichung lösbar, löst man nach einer (zu wählenden) Unbestimmten auf. Die übrigen Unbestimmten dieser Gleichung erhalten per Rollenwechsel die Rolle freier Parameter!

▼ **Das Rückeinsetzen:**

★Jetzt geht man zum jeweils vorangegangenen System zurück und wählt eine Gleichung dieses Systems, die man besonders gut nach einer (bei diesem Schritt) herausgeworfenen Unbestimmten auflösen kann. Das ergibt diese Unbestimmte. Sind weitere Unbestimmte mit herausgefallen, so werden diese per Rollenwechsel zu freien Parametern gemacht.

▼ **Die Endform:**

★Nach dem letzten Rückeinsetzungsschritt faßt man die erhaltenen Lösungsgleichungen zu einem Tupel zusammen. Sind freie Parameter vorhanden, wird man das Tupel auch in die geometrische Form bringen.

★ **Vergleich mit der Aufgabenstellung, eventuell Probe.**

---

Beispiele dazu:

| | |
|---|---|
| $1a + 2\overset{\downarrow}{b} + 3c + 5d = 3$ ; $0a - 1b + 0c + 2d = -2$   \| +1(1)+2(2) | $\longrightarrow$ $\boxed{a + 3c + 9d = -1}$ |
| $\underline{\underline{b = 2 + 2d}}$ $\longleftarrow$ | $\underline{\underline{a = -1 - 3c - 3d}}$   $\underline{\underline{c, d \quad frei}}$ |
| $\vec{x}_L(c,d) = \begin{pmatrix} -1-3c-3d \\ 2+2d \\ c \\ d \end{pmatrix}$ | $= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\overset{\downarrow}{x} + 3y - 2z = 1$ ; $2x - 2y + z = 2$ ; $3x + y + 2z = 0$   \| 2(1)-(2) ; 3(1)-(3)   $\rightarrow$ | $8\overset{\downarrow}{y} - 5z = 0$ ; $8y - 8z = 3$   \| (1)-(2)   $\rightarrow$ | $3z = -3$ $\downarrow$ |
| $x = 1 - 3(-\frac{5}{8}) + 2(-1)$ ; $\underline{\underline{x = \frac{7}{8}}}$ | $8y - 8(-1) = 3$ ; $\underline{\underline{y = -\frac{5}{8}}}$   $\leftarrow$ | $\underline{\underline{z = -1}}$ |
| $\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}}$ | | |

| | |
|---|---|
| $\overset{\downarrow}{x} + 3y - 2z = 1$ | 2(1)-(2) |
| $2x - 2y + 4z = 2$ | 3(1)-(3) |
| $3x + y + 2z = 0$ | |

$\rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} 8y-8z=0 \\ 8y-8z=3 \end{matrix}}$

Weitere zugeh. Aufgaben aus dem Skript Kap. 5 besprochen

---

Übungsmaterial - Also weitere Aufgaben

■ 4) Und mit äußerem Parameter:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ax+7y=a | 2x+7y=3<br>4ax+3y=4 | 2x+ay=3<br>(a-3)x+3y=5<br>3x+5y=4 | 2x+7y=3<br>4x+3y=4<br>3x+5y=a |

Und mit mehr Veränderlichen (a,b äußere Parameter)

| | | |
|---|---|---|
| 2x+7y-3z=0<br>2x+3y+3z=0<br>2x+5y+z=0 | 2x+7y-3z=0<br>2x+3y+5z=0<br>2x+5y+z=0 | 2x+7y-3z=a<br>2x+3y+5z=b<br>2x+5y+z=a |

■ 6) Und etwas größer:

| | |
|---|---|
| 2x+2y-z+t=4<br>4x+3y-z+2t=6<br>8x+5y-3z+4t=6<br>8x+5y-3z+4t=12<br>3x+3y-2z+2t=6 | 3a+4b-6c+7d=5<br>-3a-2b+c=6<br>5b-c+9d=0 |

■ 8) Bestimmen Sie die Schnittmenge und interpretieren Sie das Ergebnis

| | |
|---|---|
| x+2y+3z+4w=1<br>x+3y+5z+7w=2 | x+y/2+z/3+w/4=1<br>x+y/3+z/5+w/7=2 |

■ 9) Im Rahmen einer Klausuraufgabe im 2. Semester war folgendes Gleichungssystem in $\alpha, \beta, \gamma$ zu lösen. Infolge unzulänglicher Rechenkompetenz entstanden zahlreiche Fehler.

$$\begin{aligned} &\alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ &\alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ &\alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{aligned}$$

---

---

2x+ay=3a
2ax+y=4

$$\begin{aligned} &2x + ay = 3a \quad \text{...(-1)} \\ &2ax + y = 4 \quad \text{...(a)} \end{aligned} \qquad 2(\mathrm{a}^2 - 1)x = a$$

| | |
|---|---|
| Fall i): $a = \pm 1$<br>0x=$\pm$1<br>System unlösbar für a=$\pm$1. | Fall ii) $a^2 \neq 1$<br>x=$\frac{a}{2(a^2-1)}$<br>y=4-$\frac{2a^2}{2(a^2-1)}=\frac{3a^2-4}{a^2-1}$<br>$\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{2(a^2-1)}\begin{pmatrix} a \\ 6a^2-8 \end{pmatrix}}$<br>Erwartungsgemäß ist hier k=0. |

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{2(1-a^2)} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -2a & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\vec{x}_L=\mathrm{N}.\vec{b}}$ N eine $2 \times 2$-Matrix $\vec{b} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$$\frac{x}{\left(\frac{3a}{2}\right)} + \frac{y}{3} = 1 \qquad \frac{x}{\left(\frac{2}{a}\right)} + \frac{y}{4} = 1$$

Allgemein:

$\boxed{\begin{matrix} ax+by=A \\ cx+dy=B \end{matrix}}$ x,y unbestimmt, Rest äußere Parameter.

$\boxed{\begin{matrix} ax+by=A & \text{(c)} \\ cx+dy=B & \text{(-a)} \end{matrix}}$ (bc-ad)y=Ac-Ba $\boxed{\mathrm{y}=\frac{aB-cA}{ad-bc}}$

Langer Weg:
$ax + b\frac{aB-cA}{ad-bc} = A$ ax=A-$b\frac{aB-cA}{ad-bc} = \frac{A(ad-bc)-b(aB-cA)}{ad-bc} = \frac{Aad-baB}{ad-bc} = a\frac{Ad-bB}{ad-bc}$
x

$$\boxed{\vec{x}_L=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dA-bB \\ aB-cA \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{x}_L=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}$$

Beispiel:
M=$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

---

■ 3) Einige besondere Systemformen. D.h. man kann immer einen naheliegenden günstigen Weg zur Lösung finden.

| | | |
|---|---|---|
| x-2y+z/3+7w=1<br>y/3+7z-3w=2<br>z+w=0<br>2w=4 | y/3+7z-3w=2<br>z+w=0<br>x-2y+z/3+7w=1<br>x+w=2 | x+y=1<br>y+z=2<br>z+w=3<br>w+x=a |

| |
|---|
| x-2y+z/3+7w=1 |
| y/3+7z-3w=2 |
| z+w=0 |
| 2w=4 |

▼ Hier ist das Ende des Eliminationsprozesses bereits verfügbar. Man erhält nacheinander w=2, z=-2, y=3(2-7z+3w)=66, x=$\frac{359}{3}$ . Erwartungsgemäß ist hier $\ell = 4$ und k=0.

| |
|---|
| y/3+7z-3w=2 |
| z+w=0 |
| x-2y+z/3+7w=1 |
| x+w=2 |

Hier wird man sofort x und z eliminieren: $\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{3}y - 10w = 2 \\ -2y + \frac{17}{3}w = -1 \end{array}}$

.Ergebnis $\vec{x}_L = \frac{1}{163}\begin{pmatrix} 359 \\ -12 \\ 33 \\ -33 \end{pmatrix}$

a äußerer Parameter.

| |
|---|
| x+y=1 |
| y+z=2 |
| z+w=3 |
| w+x=a |

| |
|---|
| x+y=1 |
| -y+w=1 |
| w+x=a |

| |
|---|
| x+y=1 |
| x+y=a-1 |

Also : **Unlösbar** für a≠ 2 und für a=2 ist $\vec{x}_L(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ 2-x \\ 1+x \end{pmatrix}$

Verzweigung ! ▲

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Die folgende Aufgabe wurde ad hoc gerechnet:

x +2y-z=7 + -
4x- y+ 3z=2 +2
7x+ 2y-8z=9 +

$$\begin{array}{rcll} 9x+5z &=& 11 & 2 \\ 6x-7z &=& 2 & \text{-3} \end{array}$$

$31z = 16$ $\boxed{z=\frac{16}{31}}$

6x=$\frac{7\cdot 16+62}{31} = \frac{174}{31}$ x=$\frac{174}{31\cdot 6} = \frac{29}{31}$

y=4x-3z-2=$\frac{4\cdot 29-48-62}{31} = \frac{6}{31}$

$$\vec{x}_L = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 29 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

und für die, die schnell rechneten:

| | |
|---|---|
| 1a+1b+ 1c+ 1d = 1<br>1a+2b+4c+ 8d = 2<br>1a+3b+ 9c+27d = 6<br>1a+4b+16c+64d=24 | M=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$ |

$$\begin{array}{lllll}
1a+1b+1c+1d+1e= & 1 & - & & \\
1a+2b+4c+8d+16e= & 2 & + & - & \\
1a+3b+9c+27d+81e= & 6 & & + & - \\
1a+4b+16c+64d+256e= & 24 & & & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
b+3c+7d+15e= & 1 & - & \\
b+5c+19d+65e= & 4 & + & - \\
b+7c+37d+175e= & 18 & & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
2c+12d+50e= & 3 & - \\
2c+18d+110e= & 14 & +
\end{array}$$

Zunächst die Elimination:

$$\boxed{\begin{array}{lllll}
1a+1b+1c+1d= & 1 & - & & \\
1a+2b+4c+8d= & 2 & + & - & \\
1a+3b+9c+27d= & 6 & & + & - \\
1a+4b+16c+64d= & 24 & & & +
\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll}
b+3c+7d= & 1 & - & \\
b+5c+19d= & 4 & + & - \\
b+7c+37d= & 18 & & +
\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll}
2c+12d= & 3 & - \\
2c+18d= & 14 & +
\end{array}}$$

6d=11 Ende Elimination $\boxed{d=\frac{11}{6}}$

$$2c = 3 - 12d = 2 - 22 = -19 \qquad \boxed{c=-\frac{19}{2}}$$

$$b = 1 - 3c - 7d = 1 + \frac{57}{2} - \frac{77}{6} = \frac{50}{3} \qquad \boxed{b=\frac{50}{3}}$$

$$a = 1 - b - c - d = 1 - \frac{100}{6} + \frac{57}{6} - \frac{11}{6} = 1 - \frac{54}{6} \qquad \boxed{a=-8}$$

$$\boxed{p(x) = -8 + \frac{50}{3}x - \frac{19}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}, \text{ inverse: } \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -\frac{13}{3} & \frac{19}{2} & -7 & \frac{11}{6} \\ \frac{3}{2} & -4 & \frac{7}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \frac{50}{3} \\ -\frac{19}{2} \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix}$$

Was für ein Polynum wurde hier gesucht? p(x) sollte 3. Ordnung sein und p(k)=k! für k=1,2,3,4 erfüllen. D.h. die Werte für k=1,2,3,4 an diesen Stellen sind so vorgeschrieben!

---

| | | |
|---|---|---|
| 2x+3y+7z=2 | (-2) | (+1) |
| 9x+2y+8z=-4 | (+3) | (+1) |
| -5x-5y+11z=0 | | (+1) |

**Beschreiben Sie sorgfältig verbal,** wie man von diesen drei Gleichungen zu den nachfolgenden beiden kommt, bei denen y eliminiert ist. ("Termumformung", "Gleichungsumformung" verwenden. Erläutern, wieso keine schriftliche Zwischenrechnung erforderlich ist. Wenn diese doch unbedingt gemacht werden soll, auf Extrablatt!)

| | | |
|---|---|---|
| 23x+10z=-16 | (+13) | (-6) |
| 6x+26z=-2 | (-5) | (+23) |

$23 \cdot 13 - 30 = 269 \qquad -13 \cdot 16 + 10 = -198$

$$269x = -198$$

$$\boxed{x = -\tfrac{198}{269}}$$

$$10z = \frac{23 \cdot 198}{269} - 16 = \frac{250}{269}$$

Ausführung der Zwischenschritte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2x+3y+7z=2 | (-2) | (-2)(2x+3y+7z)=(-2)(2) | (-4x-6y-14z)=(-4) |
| 9x+2y+8z=-4 | (+3) | (3)(9x+2y+8z)=3(-4) | $(27x + 6y + 24z)$=-12 |
| | | Ergebnis: 1. neue Gleichung | 23x+0y+10z=-1 |

---

Invertieren der Matrix mit CAS und lösen der Gleichung:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 7 \\ 9 & 2 & 8 \\ -5 & -5 & 11 \end{matrix}\ \text{, inverse:} \begin{pmatrix} -\frac{31}{269} & \frac{34}{269} & -\frac{5}{269} \\ \frac{139}{538} & -\frac{57}{538} & -\frac{47}{538} \\ \frac{35}{538} & \frac{5}{538} & \frac{23}{538} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{198}{269} \\ \frac{253}{269} \\ \frac{25}{269} \end{pmatrix}$$

---

Zusammenfassung Kap. 5

- **Begriffssystem Kap. 5.1**

- **5.1: Begriffssystem**
  - Unterschied *Bestimmungsgleichung - Gültige Gleichung (* ist wahre Aussage!) *(Kap.1.8: Unbestimmte.)*
  - Lösung einer Bestimmungsgleichung, **Lösungsmenge** (Ergebnis, nicht der Weg ist wichtig. $IL_{M,\vec{b}}$
  - Was ist ein lineares Gleichungssystem? Normalform !
  - Matrix und Matrixschreibweise $\boxed{\mathrm{M}.\vec{x} = \vec{b}}$ Regel *Zeile mal Spalte* / Vorgabe über M und $\vec{b}$. (Matrix, i-j-te Matrixkomponente, Zeile Spalte, Diagonale)
  - Zuordnungsinterpretation $\vec{x} \mapsto \vec{y} = M.\vec{x}$ Mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \boxed{??}$ und $\vec{y} \in \boxed{??}$ Gesucht sind alle $\vec{x}$ für die M.$\vec{x} = \vec{b}$ gilt.

– Die geometrische Interpretation von $\vec{x} \mapsto M.\vec{x}$ (Projektion, Drehung.)
– Die **Linearitätsregeln** (Distributiv, jeder mit jedem, zugeh. Gebrauchsregel?)

$$\begin{aligned} M.(\vec{x}+\vec{y}) &= M.\vec{x}+M.\vec{y} \\ M.(\alpha\vec{x}) &= \alpha M.\vec{x} \end{aligned}$$

**Lösungskalkül Kap.5.2**

- **Festlegung** eines linearen Gleichungssystems Kap.5.1
- **Allgemeine Resultate** über die Lösungsmengen linearer Gleichungen Kap. 5.3
  – Geometrische Interpretation der Lösungsmenge als Figur in $\mathbb{R}^n_K$.

---

Beispiel zur Struktur der Lösungsmenge:
Die homogene 1×3 Gleichung

$$21x + 22y - 23z = 0$$

ergibt mit Elimination:

$$x = -\frac{22}{21}y + \frac{23}{21}z$$

die folgende Parametrisierung Ihrer Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} \vec{x}_L(y,z) &= \begin{pmatrix} -\frac{22}{21}y + \frac{23}{21}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{-22}{21} \\ \frac{21}{21} \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{23}{21} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{y}{21}\begin{pmatrix} -22 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{21}\begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist die Parametrisierung einer Ebene.

---

Führt man im folgenden $3\times3 - System$ den 1. Eliminationsschritt durch

$$\begin{pmatrix} 2x+3y-z=1 \\ 3x-y+2z=2 \\ 17x+9y+2z=10 \end{pmatrix} (2(1)+(2)) \quad (3)\text{-}(2)$$

erhält man nur eine unabhängige Bedingung, so dass statt des erwarteten k=0 eine Lösung mit k=1 folgt:
$\frac{8}{7} - \frac{10}{7}y + 3y - 1 = \frac{1}{7} + \frac{11}{7}y$

$$\begin{pmatrix} 7x+5y=4 \\ 14x+10y=8 \end{pmatrix} \text{y frei} \quad x = \frac{4}{7} - \frac{5}{7}y \qquad z = \frac{1}{7} + \frac{11}{7}y$$

$$\vec{x}_L(y) = \frac{1}{7}(4,0,1) + \frac{1}{7}y(-5,7,11)$$

Wählt man dagegen x frei, folgt :y=$\frac{4}{5} - \frac{7}{5}x$ und z=-1+2x+$\frac{12}{5} - \frac{21}{5}x = \frac{7}{5} - \frac{11}{5}x$

$$\vec{y}_L(x) = \frac{1}{5}(0,4,7) + \frac{x}{5}(5,-7,-11)$$

Das ist eine andere zweite Parametrisierung derselben Lösungsmenge: Die Richtungsvektoren liefern dieselbe Richtung und aus $\frac{4}{7} - \frac{5}{7}y = 0$ folgt für für y=$\frac{4}{5}$ gerade $x_L(\frac{4}{5}) = (0, \frac{4}{5}, \frac{7}{5})$. D.h. **der Aufpunkt von $\vec{y}_L$ liegt auf der von $\vec{x}_L$ beschriebenen Geraden.**
Zwei unterschiedliche Elimantionswege führen hier zu zwei verschiedenen Parametrisierungen derselben Lösungsmenge!

Derartige Erfahrungen mit den Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme legen die Vermutung nahe, dass es allgemeine Resultate über diese Lösungsmengen gibt, die gültig und auffindbar sind, auch wenn man die Lösung noch nicht bestimmt hat.

Diese sehen wie folgt aus:

- **Kap. 5.3: Allgemeine Resultate über lineare Gleichungssysteme**
  - Homogene ($\vec{b} = \vec{0}$) und inhomogene Gleichung ($\vec{b} \neq \vec{0}$), zugeordnetes homogenes System. nicht für nicht linear
  - Allgemeine Lösung des homogenen Systems ($\boxed{\text{k}}$=Zahl der freien Parameter in $\mathbb{L}$).

$$\begin{aligned} \vec{x}_{LH}(\alpha_1, ., \alpha_k) &= \Sigma_i \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + .. + \alpha_k \vec{a}_k \qquad \alpha_i \quad \text{frei} \\ M.\vec{a}_i &= \vec{0} \quad \text{für } i = 1, .., , k \end{aligned}$$

  - Inhomogenes System, $\boxed{\text{Unlösbar}}$ oder $\boxed{\text{Lösungsstruktur}}$ im lösbaren Fall: k aus zugeordn. hom. Fall

$$\begin{aligned} \vec{x}_{LIn}(\alpha_1, .., \alpha_k) &= \vec{x}_S + \vec{x}_{LH}(\alpha_1, ., \alpha_k) \\ &= \vec{x}_S + \alpha_1 \vec{a}_1 + .. + \alpha_k \vec{a}_k \end{aligned}$$

mit $\boxed{\text{M}.\vec{x}_S = \vec{b}}$ und $\boxed{\text{M}.\vec{a}_i = \vec{0}}$ i =1,2,..,k

  - Geometrische vektorielle Interpretation: Allgemeine Lösung der homogenen Gleichiung wird um $\vec{x}_S$ parallel verschoben.
  - Die Regel $\boxed{\text{k} + \ell = n}$ ($\ell$ =Zahl der unabhängigen Bedingungen). Nutzen: k interessiert! $\ell$ erhält man mathematisch. Also k=n-$\ell$. *(Rang)*

Der einfache **Beweis** findet sich im Skriptum. Er benutzt immer die Methode der vollständigen Fallunterscheidung.

---

Lineare Gleichungssysteme treten vielfach in unterschiedlicher vektorieller Verkleidung auf. Man kann sie dann natürlich immer in Matrixform bringen. Betrachten wir etwa das $2 \times 2 - System$ für zwei unbestimmte **Vektoren:**

| | | |
|---|---|---|
| $2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a}$ | +4 | 3 |
| $3\vec{x} - 4\vec{y} = \vec{b}$ | +3 | -2 |

Man kann es lösen, als wären die Unbestimmten Zahlen, denn alle für unser Elimantionsschema benötigeten Rechenregeln gelten auch für die Vektorrechnung. wir finden sofort: $17\vec{x} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$ und $17\vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

Wir haben 6 unbestimmte Komponenten und 6 skalare Gleichungen:

$$2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a} \qquad \text{gibt mit } \vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$3\vec{x} - 4\vec{y} = \vec{b} \qquad \text{gibt mit } \vec{b}^K = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ entsprechend ......}$$

Die erste der Gleichungen lautet dann:

$$2\text{x}_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1.$$

Insgesamt ergibt sich folgende Normalform::

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ A \\ B \\ C \end{pmatrix}}$$

Zur Illustration haben wir die inverse Matrix mit dem CAS bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ inverse: } \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & 0 & 0 & \frac{3}{17} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{17} & 0 & 0 & \frac{3}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{17} & 0 & 0 & \frac{3}{17} \\ \frac{3}{17} & 0 & 0 & -\frac{2}{17} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{17} & 0 & 0 & -\frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{17} & 0 & 0 & -\frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

Damit hätten wir dann dieselbe Lösung erhalten.

---

Was hat mit Gleichungen der folgenden Form auf sich. Auch sie läßt sich in Matrixform bringen:

$$x\vec{a}^K + y\vec{b}^K + z\vec{c}^K = \vec{d}^K$$

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

---

Kleine Zwischenbeobachtung: Die Matrixmultiplikation gemäß der Regel "Zeile mal Spalte" ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ & \end{pmatrix}$$

---

Die Mehrzahl der Teilnehmer rechnete in diesem Jahr die folgende Aufgabe problemlos:

■ 4) Im Rahmen einer Klausuraufgabe im 2. Semester war folgendes Gleichungssystem in $\alpha, \beta, \gamma$ zu lösen. Infolge unzulänglicher Rechenkompetenz entstanden zahlreiche Fehler. Rechnen Sie!

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}}\ .$$

▼

$$\begin{array}{r} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}$$

Zunächst $\alpha$, dann $\beta$ raus. Und dann Rückeinsetzen. Ergebnis

$$\vec{x}_L = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} -48A^{-4} + 120A^{-2} + 8A \\ -16A^{-4} + 10A^{-2} + 6A \\ 4A^{-4} - 5A^{-2} + A \end{pmatrix} = \frac{A^{-4}}{80} \begin{pmatrix} -48 + 120A^2 + 8A^5 \\ -16 + 10A^2 + 6A^5 \\ 4 - 5A^2 + A^5 \end{pmatrix}$$

▲

Die Aufgaben zu Kap. 5, Speziell Drehmatrix und nichtlineares System!

---

---

### Übungsmaterial - Also weitere Aufgaben:

### Erwartung für k und $\ell$ /Lösen / Endform!

■ 4) Und mit äußerem Parameter:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ax+7y=a | 2x+7y=3<br>4ax+3y=4 | 2x+ay=3<br>(a-3)x+3y=5<br>3x+5y=4 | 2x+7y=3<br>4x+3y=4<br>3x+5y=a |

k=$\ell = 1$ y= x frei 3-7 2a-1

$$\boxed{\vec{x}_L(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{7}(a-ax) \end{pmatrix} = \frac{a}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -a \end{pmatrix}} \text{k=1}$$

(6-28a)x=-19 (14a-3)y=6a-4

Für a=$\frac{3}{14}$ ist das System unlösbar

Sei a$\neq \frac{a}{14}$. Dann ist $\vec{x}_L = \frac{1}{6-28a}\begin{pmatrix} -19 \\ 8-12a \end{pmatrix}$ einzige Lösung.

---

y raus

| | | |
|---|---|---|
| 2x+ay=3 | | 5 |
| (a-3)x+3y=5 | 5 | |
| 3x+5y=4 | -3 | -a |

$(5a-24)\,x = 13$

(10-3a)x=15-4a

x=$\frac{13}{5a-24} = \frac{15-4a}{10-3a}$

$130 - 39a = (5a-24)(15-4a)$

$0 = -20a^2 + 210a - 490$

$2a^2 - 21a + 49 = 0$

$75 + 96 + 39 = 210$

-130-360

Und mit mehr Veränderlichen (a,b äußere Parameter)

| | | |
|---|---|---|
| 2x+7y-3z=0<br>2x+3y+3z=0<br>2x+5y+z=0 | 2x+7y-3z=0<br>2x+3y+5z=0<br>2x+5y+z=0 | 2x+7y-3z=a<br>2x+3y+5z=b<br>2x+5y+z=a |

$2x + 7y - 3z = 0$
$2x + 3y + az = 0$
$2x + 5y + z = 0$

, Solution is: $\{z = 0, y = 0, x = 0\}$

, Solution is: $\left\{x = -\frac{11}{4}y, z = \frac{1}{2}y, y\right\}$ $\vec{x}_L(y) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

, Solution is: $\{z=0, y=0, x=0\}$  Also k=1

■ 6) Und etwas größer:

| | |
|---|---|
| 2x+2y-z+t=4<br>4x+3y-z+2t=6<br>8x+5y-3z+4t=6<br>8x+5y-3z+4t=12<br>3x+3y-2z+2t=6 | 3a+4b-6c+7d=5<br>-3a-2b+c=6<br>5b-c+9d=0 |

■ 8) Bestimmen Sie die Schnittmenge und interpretieren Sie das Ergebnis

| | |
|---|---|
| x+2y+3z+4w=1<br>x+3y+5z+7w=2 | x+y/2+z/3+w/4=1<br>x+y/3+z/5+w/7=2 |

---

---

**Zwischenbilanz**: Wie ist Ihr Status?

Wo sind die geblieben, die es hauptsächlich nötig haben??
Die Teilnehmer:

- Rechenkompetenz: Bei vielen: Deutlich besser, als in den letzten Jahren.
- Vorwissen: Normal bis zu wenig
- Aktivität - Muss besser werden - Mitdenken und zugehörige sprachliche Darstellung..
- Formale Fähigkeiten: Reges Interesse, siehe Induktion

Zwei Vorwärmaufgaben zum aktiven Mitarbeiten:

---

**Textinterpretation:** Zu allen nachfolgende mit ★ *markierten* Stellen soll ein das Verständnis dder Argumentation erläuternder Kommentar gegeben werden. Die Aufgabe und ihre Lösung:

■Von einer Flugparabel wisse man $\vec{r}(t_1)=\vec{A}$ und $\vec{r}(t_2)=\vec{B}$ mit $t_1 \neq t_2$. Wie lautet die Flugparabel? Finden Sie eine Endform, die die Gleichwertigkeit der beiden Zeitpunkte verdeutlicht.

- Inspektion: Mindest. 2 Sachverhalte ★★ (Vorgehen? Idee? Endergebnis?)
- Ausführung: Setze T=t-$t_1$. Dann gilt $\vec{r}(t)=\vec{A}+\vec{V}T+\frac{1}{2}\vec{g}T^2$ mit T=t-$t_1$ Und es muss gelten:, wobei $t_2 \neq t_1$ :
$$\vec{B}=\vec{r}(t_2)=\vec{A}+\vec{V}(t_2-t_1)+\frac{1}{2}\vec{g}(t_2-t_1)^2 \qquad (\bigstar)$$
$$\boxed{\vec{V}=\frac{\vec{B}-\vec{A}}{(t_2-t_1)}-\frac{1}{2}\vec{g}(t_2-t_1)} \qquad \bigstar$$
- Einsetzen gibt ★ (was wo einsetzen?)

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{A}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(\vec{B}-\vec{A})-\frac{1}{2}\vec{g}(t_2-t_1)(t-t_1)+\frac{1}{2}\vec{g}(t-t_1)^2 \\ &= \vec{A}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(\vec{B}-\vec{A})+\frac{1}{2}\vec{g}(t-t_1)(t-t_2)\end{aligned}$$

In dieser Formel unterscheiden sich $t_1$ und $t_2$ noch etwas (★?). Aber man kann das auch wie folgt schreiben:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{t-t_2}{t_1-t_2}\vec{A} + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{g}(t-t_1)(t-t_2)}$$

Diese Formel ändert sich nicht, wenn man folgende Vertauschungen vornimmt ★

---

---

Der "Kugelstoßerwinkel"

*Unter welchem Winkel sollte ein Kugelstoßer seine Kugel im reibungsfreien Fall abstoßen?*

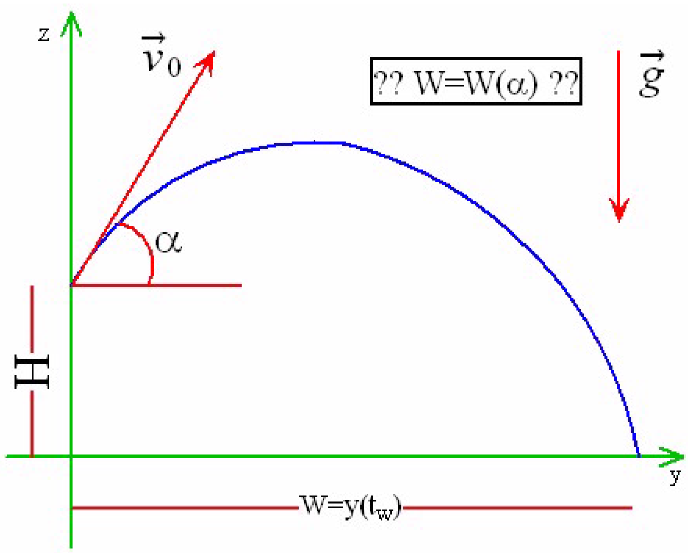
Das ist offensichtlich ein Flugparabelproblem. Im ersten Augenblick denkt man an die üblichen 45 Grad für die maximale Flugweite. Aber das ist nicht ganz richtig, da die Kugel ja nicht in derselben Höhe startet, in der sie auftrifft!

1. Fertigen Sie eine Skizze mit den zugehörigen Bezeichnungen. (Ursprung im Fuß des Kugelstoßers!)
2. Was sollte die Antwort leisten? Oder: Was für eine Funktion sollte man (zur Beantwortung der Frage) bestimmen?
3. Entwickeln Sie stichwortartig eine Lösungsstrategie. Was für Einzelschritte sind auszuführen.

Diese Punkte sollten Sie unbedingt **vor** der eigentlichen Aufgabenbehandlung ausführen!

---

**Die Skizze:** Der Startpunkt befinde sich in der Höhe H auf der z-Achse. Der Betrag $v_0$ der Abstoßgeschwindigkeit liegt fest. Der interessierende Abstoßwinkel sei $\alpha$. Sind H,$v_0$, g und $\alpha$ vorgegeben, dann liegt die Flugbahn fest. (Zunächst alles äußere Parameter!)




Offenbar liegt eine Schnittaufgabe vor: Zu bestimmen sind die Punkte der Flugbahn mit z=0. Und davon der spätere.

**Was sollte die Antwort leisten?** Sie sollte zu vorgegebener Konfiguration, also zu gegebenen $v_0, g$ und H den Winkel $\alpha_{\max}$ festlegen, der die größte Flugweite liefert. Man sucht also eine Funktion

$\boxed{\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(H, v_0, g\ )}$ , die das leistet. (Grenzfallbetrachtungen $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zeigen, dass es ein Maximum geben sollte!)

Einsetzen in die Flugparabel ergibt dann die zugehörige maximals Reichweite! Zu bestimmen ist die größe W=y(t$_W$) $= W(\alpha_{\max})$

**Vorgehen:**

1. Die Flugparabel aufstellen
2. Schnittaufgabe:
   (a) Über z(t)=0 die Auftreffzeit $t_w$ bestimmen
   (b) Einsetzen in y(t) gibt y($t_w$)=W($\alpha$) ........ (bis hier jetzt!)
3. Extremwertproblem: Rollenwechsel. In W=y(t$_W$) wird $\alpha$ vom äußeren Parameter zur unabhängigen Variablen!)
   (a) W$'(\alpha)$ bilden
   (b) W$'(\alpha_{\max}) = 0$ lösen
   (c) Endform von $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(H, v_0, g)$
4. Einsetzen: W=W($\alpha_{\max}$) bestimmen.
   (a) Endform W=W(H,v$_0$, $g$)
   (b) Grenzfallkontrolle, Beispiele

Schritt 3b erweist sich (zwischendurch) als etwas aufwendiger, aber durchführbar. Alle Schritte sind im Sinne modularen Arbeitens eindeutig vorgegeben.

---

**Ausführung:**

Bezeichnungen und Skizze: Siehe oben!
Die Flugparqabel:
♦ Vorgaben: $\vec{r}(t) = H + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ mit $\vec{g}^K = (0, 0, -g)$ und $\vec{v}_0^K = v_0(0, \cos\alpha, \sin\alpha)$.
Also

$$\boxed{\vec{r}^K(t) = (0, v_0 t\cos\alpha, H + v_0 t\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2)}$$

$\vec{v}_0^K(t)$ wird nicht benötigt.
Die Parabel ist mit der Ebene z=0 zu schneiden. Die Kugelstoßeraufgabe gehört zu H>0.
Die Konfiguration festgelegt durch: $\alpha, v_0, H$ und g. Die Masse m sollte herausfallen
Gesucht $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(v_0, H; g)$ und ebenso W=W$_{\max}(v_0, H; g)$

---

♦ $\boxed{\text{Ausführung von 2. (Schnittaufgabe)}}$: Den Schnittzeitpunkt $t_w$ bestimmen, W=y(t$_W$) ist die gesuchte Flugweite:

$$t_w^2 - 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} t_w - \frac{2H}{g} = 0 \qquad \text{(späten Wert nehmen!)}$$

$$t_w = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}$$

$$\boxed{\mathrm{t}_w = \mathrm{t}_S \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) = t_S \left(1 + \sqrt{1 + \frac{H}{S \sin^2\alpha}}\right) =}$$

$$\text{mit Hilfsgrößen} \quad t_S = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{und} \quad \mathrm{S} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Zusatzüberlegung (auf die man meist erst später kommt): Wo liegt der **Scheitel der Flugbahn ? Zur** Zeit $t_s$ bei

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha) = S \sin(2\alpha) \quad \text{und} \\ H_S &= H + \frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha - \frac{1}{2} \frac{g v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = H + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \end{aligned}$$

Vektoriell:

$$\begin{aligned} \vec{r}^K(t_S) &= \left(0, \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha), H + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}\right) = \left(0, S \sin(2\alpha), H + S \sin^2\alpha\right) \\ &= \frac{v_0^2}{2gH} \left(0, H \sin(2\alpha), H(1 + \sin^2\alpha)\right) \\ &= CH(0, \sin(2\alpha), 1 + \sin^2\alpha) = (0, y_S, z_S) \end{aligned}$$

Bei H=0 und $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hat man eine Flugweite S= $\frac{v_0^2}{2g}$ bis zum Scheitel! Das gibt der Hilfsgröße S physikalische Bedeutung. Auch die zweite Größe C läßt sich interpretieren als Verhältnis zweier Höhen bzw. Energien:

$$C = \frac{H}{S} = \frac{H}{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)} = \frac{mgH}{\frac{m}{2} v_0^2} \geq -\sin^2\alpha \geq -1$$

Zu kleines negatives H bedeutet: Die Horizontalebene z=0 wird nicht getroffen!

---

**Flugweite (Schritt 2b):**

$$\begin{aligned} y(t_w) &= v_0 \cos\alpha t_S \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) \\ &= v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \cos\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \left(\sin(2\alpha) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) + 2Hg \frac{4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \left(\sin(2\alpha) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) + 8 \frac{Hg}{v_0^2} \cos^2\alpha}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \left(\sin(2\alpha) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) + 4 \frac{Hg}{v_0^2} (1 + \cos(2\alpha))}\right) \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist als Funktion von $\alpha$ zu interpretieren. $v_0$ und g weiterhin äußere Parameter!

$$W(\alpha;v_0,H)) \quad = \quad y(t_W)=\frac{v_0^2}{2g}\left(\sin(2\alpha)+\sqrt{\sin^2(2\alpha)+2\frac{gH}{v_0^2}(1+\cos(2\alpha))}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{W}(\alpha;C,S)\mathrm{=S}\left(\sin(2\alpha)+\sqrt{\sin^2(2\alpha)+2C(1+\cos(2\alpha))}\right)}$$

$$W(\alpha;C,S) \quad = \quad S\sin(2\alpha)\left(1+\sqrt{1+2C\frac{(1+\cos(2\alpha))}{\sin^2(2\alpha)}}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{W}(\alpha;\mathrm{C,S})\mathrm{=Ssin}(2\alpha)\left(1+\sqrt{1+4C\frac{\cos^2(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}}\right)}$$

Damit ist Schritt 2 ausgeführt!
**Bis hierher mit bisherigem Stoff - In den Rechnungen die einzelnen Schritte verstehen und nachvollziehen!**

---

Skalarprodukt: Kap. 6.1 heute durchgesprochen.

Mit den folgenden 4 zu merkenden Hauptsachverhalten

- Komponentenform des Skalarproduktes
- Geometrische Form des Skalarproduktes
- Rechenregeln für das Skalarprodukt
  - Einschließlich: Aus gültiger Vektorgl $\vec{a}=\vec{b}$ eine gültige skalare Gl. $(\vec{N}\cdot\vec{a})=(\vec{N}\cdot\vec{b})$ machen
- Projektionsformel bzw. Zerlegungsformel $\vec{a}=\frac{(\vec{a}\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b}$ ( wie rekonstruieren?)

---

Fingerübungen:

$\vec{a}=(1,2,3)$ $\quad \vec{b}=(0,-7,11)$ $\quad \vec{c}=\frac{1}{3}(2,1,-1)$
☐ Berechne

$$\begin{array}{cc}
\vec{a}\cdot\vec{b} & =19 \\
\vec{a}\cdot\vec{c} & =\frac{1}{3} \\
\vec{a}(\frac{1}{7}\vec{b}-\vec{c})=\frac{1}{7}\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c} & =\frac{19}{7}-\frac{1}{3} \\
\vec{a}^2+\vec{b}^2 & 14+170 \\
(\vec{a}+\vec{b})^2 & (1,-5,14) \\
\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|} & \frac{(1,-5,14)}{\sqrt{222}} \\
\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|} & \frac{(1,-5,14)}{\sqrt{14}+\sqrt{170}} \\
\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} &
\end{array}$$

$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2 \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
☐Zerlege $\vec{c}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komp. Mit Proben

$\vec{p}=\frac{(\vec{a}\vec{c})}{\vec{a}^2}\vec{a}=\frac{1}{42}(1,2,3) \qquad \vec{s}=\vec{c}-\vec{p}=\frac{1}{3}(2,1,-1)-\frac{1}{42}(1,2,3)=\left(\frac{9}{14},\frac{2}{7},-\frac{17}{42}\right)$
☐Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $\qquad \cos\theta=\frac{19}{\sqrt{14}\sqrt{170}}=\frac{19}{1190}\sqrt{7}\sqrt{85}$

$\arccos\frac{19}{\sqrt{14}\sqrt{170}}=\arccos\frac{19}{2380}\sqrt{14}\sqrt{170}=1.1707$

☐Wie groß isrt der Flächgweninhalt des aus $\vec{a}$ und $\vec{c}$ geb. Parallelogramms

---

Verschieden Formen der Ebenengleichung

$\vec{a}\cdot\vec{x} = b$. Daraus $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{x}\right) = d$ (Bedeutung d)

$(\frac{1}{b}\vec{a}\cdot\vec{x}) = 1$ (Bedeutung von $\frac{1}{b}\vec{a}$??

Beispiele:

$\vec{A} = (1,2,3)$ E definiert durch $\vec{A}\cdot\vec{x} = 7$. Ausgeschrieben $\boxed{\text{1x+2y+3z=7}}$ Achsenabschnitte??

Achsenabschnittsform der Ebengl: $\boxed{\left(\frac{1}{7}\vec{A}\right)\cdot\vec{x} = 1}$

$\frac{1}{7}\vec{A} = (\frac{1}{7}, \frac{1}{(\frac{7}{2})}, \frac{1}{(\frac{7}{3})})$ denn die Gl. lautet. $\frac{x}{7} + \frac{y}{(\frac{7}{2})} + \frac{z}{(\frac{7}{3})} = 1$

---

---

Beweise:

**Der Schwerpunkt S (einer Konfiguration von Massepunkten) besitzt die folgende Eigenschaft**: Legt man eine Ebene E durch den Schwerpunkt S und bezeichnet der Index i alle die Massepunkte, die auf einer Seite der Ebene liegen mit Masse $m_i$ und mit kürzestem Abstand $a_i$ und bezeichnet j alle Punkte auf der anderen Seite der Ebene, mit Masse $m_j$ und jeweiligem Abstand $a_j$ von der Ebene, dann gilt das folgende verallgemeinerte Hebelgesetz

$$\Sigma m_i a_i = \Sigma m_j a_j$$

Zunächst das Rudiment einer Skizze ohn Bezeichnungen (schwarz Trennebene E, blau Ortsvektoren $\vec{x}_k$, rot deren Zerlegung (senkrechtv und parallel. zu E)

Wir legen den Ursprung in den Schwerpunkt. Also $\vec{x}_S = \vec{0}$ Es folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \sum_k m_k\vec{x}_k \\
\vec{0} &= \sum_i m_i\vec{x}_i + \sum_j m_j\vec{x}_j \\
\vec{0} &= \sum_i m_i(\vec{p}_i + \vec{s}_i) + \sum_j m_j(\vec{p}_j + \vec{s}_j) \\
0 &= \vec{N}\cdot\left(\sum_i m_i(\vec{p}_i + \vec{s}_i) + \sum_j m_j(\vec{p}_j + \vec{s}_j)\right) \\
0 &= \sum_i m a_i + \sum_j m_j(-1)a_j
\end{aligned}$$

---

**(6.1.37)** *Zusammenfassung: Das Skalarprodukt ist eine Bildung, die aus jeweils zwei Vektoren gleichen Typs eine Zahl, ein Skalar macht. Die Auswertung kann entweder über die* ***Komponentenform*** *oder über die* ***geometrische Form*** *erfolgen. Die Gleichheit des Resultates wird durch (6.1.31) sichergestellt.*
*Die Rechenregeln für den Umgang mit dem Skalarprodukt sind in (6.1.23) und (6.1.25) zusammengatellt. Man sollte sie zur Termumformung verwenden, aber auf Unterschiede zum Zahlrechnen achten.*

*Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich die geometrischen Begriffe Länge, Abstand und Winkel in das vektorielle Beschreibungsschema einfügen. Insbesondere stehen zwei Vektoren genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.*
*Eine nützliche Konstruktion ist die Zerlegung eines Vektors in eine zu einem zweiten Vektor senkrechte und parallele Komponente. Die Formeln werden in (6.1.33) gegeben.*
*Nachfolgend geben wir noch einige Anwendungsbeispiele, die aufzeigen, wie weit das Spektrum an Problemen ist, das durch einen Formalismus wie den des Skalarprodutes überdeckt wird. Die erste Anwendung besteht in der Abrundung unserer Einstiegsidee in das Thema. Die zweite ist vom Routinetyp, einer Winkelbestimmung. In der dritten Anwendung wird ein Winkel über eine zusätzliche Idee, also nicht routinemäßig bestimmt. Und bei der vierten geht es um eine Verallgemeinerung des Formalismus.*

---

Dann noch besprochen: Siehe Skript

- Winkel zwischen zwei Geraden
- Tetraederwinkel
- Eine Schnittpunkte im Dreieck (Formeln)
- Schnittmengenbestimmung mit Hilfe von Figur**gleichungen** statt Parametrisierungen

---

---

22.9.2006

Aufgaben zu Kap. 6.1 (Skalarprodukt) sind jetzt da. U.U. reload!

# Heute: 
Kap. 6.2 Vektorprodukt bis zur Anwendung *Normale* besprochen! Der Teil über die Formalisierung der Orientierung wurde ausgelassen.

---

*Antworten von Ihrer Seite fehlen oder sind unzulänglich, weil Sie zu wenig übergeordnete und genaue Begriffe verwenden. einige Testfragen:*

- Was ist ein *Ortsvektor,* was ein *Koordinatenvektor* ? Unterschied?
- Welcher Unterschied besteht zwischen einem *Rechenausdruck (Term)* und einer *Zuordnung?*
  - Ist das Skalarprodukt eher Term oder Zuordnung?
  - Was für eine Art (Typ) von Zuordnung wird durch eine Bahnkurve beschrieben?
  - *Zuordnungsverfahren:* Ist das eher eine Zuordnung oder ein Term?
  - Geben sie einen Term an, mit dessen Hilfe man den Winkel zwischen zwei Vektoren $\neq \vec{0}$ bestimmen kann.

---

*Nachfolgend eine Aufgabe, die problemlos zu lösen war, wenn man eine Reihe der von uns behandelten Methoden und Resultate verwendete. Dazu wurde zunächst die Vorgehensstrategie besprochen und dann sollte diese realisiert werden. In der Übungsstunde traten jedoch enorme Probleme auf! Vielleicht noch etwas mehr, als ich erwartet haben*

- Die Aufgabe: g und h seien zwei Geraden im Raum. Es soll deren kürzester Abstand zwischen diesen beiden Geraden bestimmt werden. Genauer, der Vektor des kürzesten Abstandes samt seiner Lage im Raum. Entwickeln Sie eine **Vorgehensstrategie**.

  1. *Dieser Schritt sollte klar sein. Nämlich?*
     - Soll man in $V_0^3$ oder in $\mathbb{R}_K^3$ arbeiten.
     - Welche Sonderfälle sind zu erwarten?..
     - Wie sollte eine günstige Antwort aussehen? (Form, Gleichung)
  2. Skizze (ist hier nicht besonders nützlich
  3. Idee? (Was ist gesucht, u.U. mit nur bezeichneten, aber noch nicht bekannten Größen. Wie kann man dann an diese Größen kommen?)
  4. Ausführung

---

---

1. Für beide Geraden zunächst eine vektorielle Parametrisierung einführen. Diese sind dann als gegeben, als bekannt vorauszusetzen
   - Möglichst in $V_0^3$ arbeiten. Und das geht hier.
   - Sonderfälle: g und h schneiden sich (Lösung Nullvektor) und g und sind h parallel (viele Lösungen, ein freier Parameter!)
   - Man sollte nach einer Parametrisierung der Geraden suchen, die den gesuchten Abstandsvektor enthält! Der Aufpunkt sei auf dem Schnittpunkt mit einer Geraden. Etwa g. Dann braucht man der Parameterwert für den Schnittpunkt mit der zweiten Geraden.
2. Ein Richtungsvektor der gesuchten Geraden läßt sich bestimmen. (Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren) Was bleibt offen? Wie erhält man Bedingungen für Parameter??? Die nachfolgenden Gleichungen realisierne das Vorgehen:

$$
\begin{aligned}
\vec{x}_g(\alpha) &= \vec{a} + \alpha\vec{e} \quad \text{Parametrisierung g} \\
\vec{x}_h(\beta) &= \vec{b} + \beta\vec{f} \quad \text{Param. h} \\
\vec{n} &\perp \vec{e}, \vec{f} \quad \text{jetzt} \quad \vec{n} = \vec{e} \times \vec{f} \\
\vec{x}_k(\lambda) &= \vec{c} + \lambda\vec{n} \quad \text{Angestrebte Parametrisierung.} \\
& \phantom{=} \vec{c} \text{ liegt auf g} \\
\vec{x}_k(\lambda) &= (\vec{a} + \alpha_S\vec{e}) + \lambda\vec{n} \text{ mit gesuchtem } \alpha_S \\
& \phantom{=} k \text{ muss h schneiden! Schnittbedingung} \\
(\vec{a} + \alpha_S\vec{e}) + \lambda_S\vec{n} &= \vec{b} + \beta_S\vec{f} \quad \text{Vereinfachen} \\
\underbrace{(\vec{a} - \vec{b})}_{\vec{D}} + \alpha_S\vec{e} + \lambda_S\vec{n} &= \beta_S\vec{f}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\vec{D} + \lambda_S\vec{n} = -\alpha_S\vec{e} + \beta_S\vec{f}} \quad \text{Vektorgleichung mit 3 skalaren Unbek.}$$

$$(\vec{D}\vec{e})\vec{f}^2 - (\vec{D}\vec{f})(\vec{e}\vec{f}) = -\alpha_S(\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2) \qquad \boxed{\alpha_S = \frac{(\vec{D}\vec{f})(\vec{e}\vec{f}) - (\vec{D}\vec{e})\vec{f}^2}{\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2}}$$

Jetzt hatten wir eine allgemeine Methode besprochen, wie man die gesuchten Unbestimmten leicht und ohne Koordinaten erhielt: Beide Seiten der Gleichung waren skalar mit mit einem geeigneten Vektor zu multiplizieren! Zunächst multiplizierte man mit $\vec{n}$. Das war ausführlich vorgemacht mit Ergebnis

$$\lambda_S \vec{n}^2 = -(\vec{D}\cdot\vec{n}) \text{ also } \boxed{\lambda_S\vec{n}\text{=-}\frac{(\vec{D}\cdot\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n}}$$

Das weitere Vorgehen wurde beschrieben: Die vektorielle Ausgangsgleichung je einmal skalar mit $\vec{e}$ und mit $\vec{f}$ multiplizieren. Das würde ein einfaches lineares 2×2-System geben, das ja bereits allgemein und effektiv gelöst war. In dieser Vekleidung gab es Probleme!!

Das sich ergebende System (mit den vorgeschlagenen Elimnationsschritten):

$$\begin{array}{lll} (\vec{D}\cdot\vec{e}) = -\alpha_S\left(\vec{e}^2\right) + \beta_S\left(\vec{e}\cdot\vec{f}\right) & \vec{f}^2 & \text{-}(\vec{e}\vec{f}) \\ (\vec{D}\cdot\vec{f}) = -\alpha_S(\vec{e}\cdot\vec{f}) + \beta_S(\vec{f}^2) & \text{-}(\vec{e}\vec{f}) & \vec{e}^2 \end{array}$$

Hier kam es auf das Rollenkonzept und den Termbau an. $\vec{e}^2(\vec{D}\vec{f})$ nicht aber $\vec{e}^2\vec{D}\vec{f}$ usw.

Die erste Elimination:

$$(\vec{D}\vec{e})\vec{f}^2 - (\vec{D}\vec{f})(\vec{e}\vec{f}) = -\alpha_S(\vec{e}^2\vec{f}^2 - (\vec{e}\vec{f})^2) \text{ also } \boxed{\alpha_S\text{=}\frac{(\vec{D}\vec{f})(\vec{e}\vec{f})-(\vec{D}\vec{e})\vec{f}^2}{\vec{e}^2\vec{f}^2-(\vec{e}\vec{f})^2}}$$

Usw. Alle Einzelschritte waren bekannt, besprochen. Trotzdem...

´Die vorgegebene, aber nicht realisierte Handlungsanweisung:

> Zur Bestimmung der Unbekannten die Vektorgleichung skalar mit geeigneten Vektoren multiplizieren! (Methode von gestern) Gibt $\lambda_S$ sofort und ein einfaches lineares 2×2-System für $\alpha_S$ und $\beta_s$. Lösungsformel!

---

Wann gilt das Distributivgesetz? eine allgemeine Regel konnte man dem Beweis des GEsetzes für das Skalrprodukt entnehmen:

**(6.1.20)** Wie steht es mit den **Distributivgesetzen**? Wir möchten $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ nachweisen. Wir rechnen wie folgt, wobei wir naheliegend die 1-Komponente von $\vec{a}+\vec{b}$ mit (a+b)$_1$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b+c)_1 + a_2(b+c)_2 + a_3(b+c)_3 \\ &= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3) \\ &\overset{!}{=} a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}. \end{aligned}$$

Am Anfang und Ende der Rechnung werden wieder nur Definitionen eingesetzt. In der mittleren Zeile ($\overset{!}{=}$) wird - entscheidend für die Gültigkeit der Rechnung - das Distributivgesetz für die reellen Zahlen benutzt. Wie kommt man schließlich auf die vorletzte Umformung?

$$\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K = \sum_i a_i b_i$$

Was sieht man:

Jeder Summand in der **Berechnungsformel** muss von jedem Vektorfaktor genau eine Komponente enthalten!!!

Also von der Form A$_{ij}$a$_i b_j$ mit irgendwelchen zulässigen i,j sein und einem weitern konstanten Faktor A$_{ij}$!!!

**Dann gilt das Distributivgesetz!**

Das gilt auch, wenn man ein vektorielles Produkt mit mehreren Komponenten betrachtet!

Mit Summenzeichen!

$\sum_{i,j} A_{ij}a_ib_j$

$$\sum_{i,j} A_{ij}a_i(b_j+c_j) = \sum_{i,j}(A_{ij}a_ib_j + A_{ij}a_ic_j) = \sum_{i,j} A_{ij}a_ib_j + \sum_{i,j} A_{ij}a_ic_j$$

---

**Fingerübungen** zum Vektorprodukt: *Das ging recht gut!*

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}^K = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c}^K = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie: $\vec{a}^K \times \vec{b}^K$ $\quad \vec{b}^K \times \vec{c}^K$ $\quad (\frac{1}{3}\vec{a}^K + \vec{c}^K) \times \vec{a}^K$ $\quad \frac{\vec{a}^K \times \vec{b}^K}{(\vec{a}^K \times \vec{b}^K)^2}$ $\quad \frac{\vec{a}^K}{|\vec{a}^K|} \times \frac{\vec{b}^K}{|\vec{b}^K|}$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ $\quad ?\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Weitere derartige Aufgaben in den Übungen zu Kap.6.2.

---

Erklärt und begründet:

Winkel zwischen Ebene und Gerade ist definitionsgemäß immer der Winkelzwischen Gerade und Normale der Ebene !!!

Nachmittags: Aber anders in der Schule!

---

*Fetteckengeometrie*

(Das ging wieder besser!)

K sei kartesisches Rechtssystem. Die Ebene E schneide die drei Achsen in den positiven Abständen u,v,w.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt des von den drei Achsenschnittpunkten gebildeten Dreiecks?

b) Unter welchem Winkel und wo schneidet die Ursprungsgerade g mit Richtungsvektor (a,b,c) die Ebene E?

c) Bestimmen Sie den Vektor des kürzesten Abstandes von E zum Ursprung.

▼ Zu $\boxed{\text{a)}}$ ZUnächst eine Parametrisierung von E

$$\vec{x}_E^K(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ -w \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u \\ \beta v \\ (1-\alpha-\beta)w \end{pmatrix} \qquad \text{Parametrisierung}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ -w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vw \\ uw \\ uv \end{pmatrix} = uvw \begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ \frac{1}{v} \\ \frac{1}{w} \end{pmatrix} \qquad \text{Normalenvektor}$$

$$\text{F}_{Dreieck} = \frac{1}{2}|\vec{n}| = \frac{1}{2}\sqrt{(vw)^2 + (uw)^2 + (uv)^2}$$

$\boxed{\text{b)}}$

$$\vec{x}_g(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} \quad \text{Schnitt mit E:} \quad \begin{array}{ll} \lambda a = \alpha u & \text{also } \alpha = \frac{a}{u}\lambda \\ \lambda b = \beta v & \text{also } \beta = \frac{b}{v}\lambda \\ \lambda c = (1-\alpha-\beta)w & \end{array}$$

also $\lambda c = (1 - \frac{a}{u}\lambda - \frac{b}{v}\lambda)w \qquad \lambda(c + \frac{aw}{u} + \frac{bw}{v}) = w \qquad \lambda = \frac{w}{c + \frac{aw}{u} + \frac{bw}{v}} = \frac{uvw}{cuv + avw + buw}$

Schnitt in $\boxed{\vec{x}_S^K = \frac{uvw}{cuv+avw+buw} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$

Winkel unten

$\boxed{\text{c)}}$

$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=1.$ Oder $\vec{A}\cdot\vec{x}=1$ mit $\vec{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ \frac{1}{v} \\ \frac{1}{w} \end{pmatrix}$

$|\vec{A}| = \sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{w^2}} = \frac{1}{uvw}\sqrt{(vw)^2+(uw)^2+(uv)^2}$

$\frac{1}{|\vec{A}|} = \frac{uvw}{\sqrt{(vw)^2+(uw)^2+(uv)^2}}$ (Kürzester skalarer Abstand)

Der kürzeste Abstand ist und der Vektor des kürzesten Abstandes ist

$$\frac{1}{\vec{A}^2}\vec{A} = \frac{u^2v^2w^2}{(vw)^2+(uw)^2+(uv)^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ \frac{1}{v} \\ \frac{1}{w} \end{pmatrix} = \frac{uvw}{(vw)^2+(uw)^2+(uv)^2}\begin{pmatrix} vw \\ uw \\ uv \end{pmatrix}$$

Winkel $\varphi$ zwischen $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ \frac{1}{v} \\ \frac{1}{w} \end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \frac{\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{w^2}}} = \frac{avw+buw+cuv}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(vw)^2+(uw)^2+(uv)^2}}$