****

Vorkurs Mathematik

Teil II Analysis

F. Krause

Kapitel 12
Integration

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Inhaltsübersicht Kap. 12

12.1 **Umkehrung des Ableitens**

12.1.1 **Die zentrale Formel**

Das gesamte Verständnis zum Bereich des Integrierens lässt sich erneut aus einer einzigen zentralen Formel entwickeln, deren Bedeutung wir zunächst erarbeiten wollen. Diese Formel lautet wie folgt:

$$\boxed{\bar{f} \cdot (x-a) = \int_a^x dt\ f(t) = F(x) - F(a).}$$

(12.1.1) Beginnen wir mit der Analyse des mittleren Termes. Dieser beschreibt offensichtlich eine Aufforderung, den Bestandteilen f, x und a etwas zuzuordnen, das durch den mittleren Term bezeichnet werden soll.

(12.1.2) Das Problem, um das es geht, ist die **Umkehrung des Ableitens.** So wie die Bezeichnung $\sqrt{x}$ die Aufforderung beinhaltet *suche eine (positive) Zahl, deren Quadrat x ist,* beinhaltet der mittlere Term die Aufforderung *suche ein Funktion F, deren Ableitung f ist.* Der Rechenausdruck f(t), der das gegebene f festlegt, ist Bestandteil des Termes.

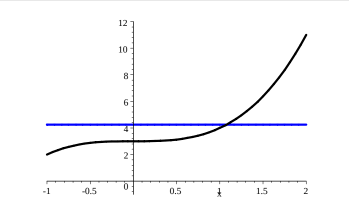
(12.1.3) Nun ist die Umkehrung der Ableitung ebensowenig wie das Wurzelziehen (als Umkehrung des Quadrierens) eindeutig. Wir benötigen eine Zusatzbedingung, die hier durch den im Term enthaltenen Parameter a festgelegt wird und die von uns unten erarbeitet wird. x ist zunächst äußerer Parameter, der in der Regel alle Werte des Definitionsbereiches von f annehmen darf. x legt die Stelle (den Urbildwert) fest, an der der Funktionswert (der Umkehrfunktion) zu nehmen ist.

(12.1.4) Die rechte Seite F(x)-F(a) der Gleichung gibt an, wie die vom mittleren Term beschriebene Aufgabe in der Regel gelöst wird. Diese Lösung erscheint zunächst als eher formale Spielerei: Man nimmt irgendeine Funktion, deren Ableitung gleich f ist und bildet die durch den Term gegebene Differenz, also die Änderung des Funktionswertes zwischen x und a.

(12.1.5) Die linke Seite liefert schließlich die inhaltliche Interpretation des Resultates, gibt ihm eine Bedeutung, die sich als ausgesprochen nützlich erweist. Das Ergebnis lässt sich schreiben als Produkt aus der Intervallänge (x-a) und dem **Mittelwert der Funktionswerte** zwischen x und a. Das ergibt eine globale Näherung der Funktion durch eine einzige Zahl $\bar{f}$ in dem von x und a festgelegten Intervall. Oder alternativ durch die konstante Funktion $x \mapsto \bar{f}$. In den Anwendungen koppelt die Problemsituationen meist an diese Bedeutung (der linken Seite) an, wogegen die rechte Seite die Bestimmung und Auswertung der gesuchten Größe erlaubt.

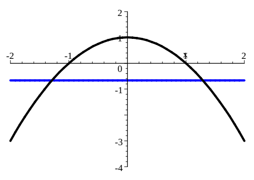
(12.1.6) Während die Tangentenapproximation eine **lokale** Approximation um einen Aufpunkt lieferte, erhalten wir jetzt ein **globale Approximation** durch eine konstante Funktion für ein vorgebbares Intervall. Das eingeschobene Bild verdeutlicht diesen Sachverhalt. Der Bereich, in dem die Funktionswerte den Mittelwert übersteigen ist kleiner als der in dem sie darunter liegen. Denn der typisch Überschuss ist viel größer als das Defizit im anderen Bereich.

$f(x) = 3 + x^3$
$a = -1, x = b = 2$
Berechnet: $\bar{f} = \frac{51}{12}$



(12.1.7) Selbstverständlich bleibt unsere Interpretation korrekt, wenn f im Integrationsbereich Nullstellen aufweist. Die manchmal an Schulen gelehrte Regel, man dürfe nicht über Nullstellen (von f) integrieren, ist Unfug.

☐ Ist $f(u) \geq 0$ für $a \leq u \leq x$, dann folgt aus unserer Mittelwertinterpretation die übliche "Flächeninhaltsinterpretation des Integrales." Begründen Sie das.

$f(x) = 1 - x^2$ $a = -2, b = 2$ Berechnet: $\bar{f} = -\frac{2}{3}$	

(12.1.8) Eine zweite Verdeutlichung der Formel erhalten wir, wenn wir sie im kinematischen Modell der eindimensionalen Bewegung deuten. Dann übernimmt die Eingabefunktion $t \mapsto f(t)$ die Rolle der momentanen Geschwindigkeit und F(x)-F(a) ist der im Zeitintervall $a \le t \le x$ zurückgelegte Weg. Die Handlungsaufforderung des mittleren Termes lautet: **Berechne mit Hilfe der (Funktion der) momentanen Geschwindigkeit den zurückgelegten Weg.** Denn die momentane Geschwindigkeit ist ja gerade die Ableitung der Wegkoordinate nach der Zeit. Und die linke Seite besagt: **Die infolge der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit möglicherweise sehr komplizierte Bewegung kann ersetzt werden durch eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit** $\bar{f}$. Eine solche Bewegung ergibt für das durch x und a festgelegte Zeitintervall dieselbe Wegänderung, wie die tatsächliche Bewegung. Denn unter Fortlassen des mittleren Termes, der ja hauptsächlich die Rechenaktionsaufforderung gibt, nimmt unsere Formel die folgende vertraute Gestalt nebst zugehöriger Interpretation an:

$\bar{f} \cdot (x-a) = F(x) - F(a)$	$\bar{v} \cdot (t_2 - t_1) = s(t_2) - s(t_1)$
$\bar{f} = \frac{F(x)-F(a)}{(x-a)}$ für x>a	$\bar{v} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{(t_2-t_1)}$ füt $t_2 > t_1$.

! *Unser weiteres Vorgehen sieht wie folgt aus: Zunächst behandeln wir die rechte formale Seite der Gleichung. Wir präzisieren das Umkehrproblem (für das Ableiten) genauer und lösen es. Das Resultat ergibt die rechte Gleichung der Formel nebst einem Satz allgemeiner Integrationsregeln.*

(12.1.9) Dabei taucht als zentrales Problem auf: Bestimme zu vorgebener Funktion f eine *Stammfunktion* F, also eine Funktion,deren Ableitung gleich f ist, also $F' = f$. Im Gegensatz zum Differenzieren ist dies Problem im Bereich der elementar konstruierbaren Funktionen keineswegs routinemäßig und schematisch lösbar! Man findet immer wieder Fälle, in denen man einen kreativen Einfall benötigt, um voranzukommen bzw. in denen es sogar unmöglich ist, eine Stammfunktion in Form eines elementar konstruierbaren Rechenausdrucks anzugeben. Der Teil *Technik des Integrierens* behandelt dies Problem genauer. Davor schieben wir noch einen Teil ein, der die linke in der Zentralformel enthaltene Gleichung diskutiert, der also die Frage der inhaltlichen Interpretation des Integrales klärt. Das schließt das Problem der numerischen Approximation von Integralen mit ein, insbesondere also den Fall, dass man eine Stammfunktion nicht (in Form eines elementaren Rechenausdrucks) angeben kann.

12.1.2 **Integration als formale Umkehrung des Differenzierens**

(12.1.10) Wie sieht das angesprochene Umkehrproblem genauer aus? Zu einer gegebenen differenzierbaren Funktion f haben wir in (9.2.10) die Ableitungsfunktion $f' = (D, x \mapsto f'(x), W)$ gebildet. Das ergibt eine Zuordnung (von Funktionen) $f \mapsto f'$. Etwa $\sin \mapsto \cos$ oder $h_3 \mapsto 3h_2$ usw. Diese neue Zuordnung bezeichnen wir mit D von *Derivation* (Englisch to derive=ableiten, lateinisch derivare. Gedächtnistechnisch erinnert D aber auch an das d aus Δx oder dy, also das Entstehen der Ableitung aus einer **Differenz**bildung.)

Nach unseren allgemeinen Regeln heißt das

$$D(cos) = -sin \quad \text{oder} \quad D(h_4) = 4h_3 = (\mathbb{R}, x \mapsto 4x^3, \mathbb{R}) \qquad \text{Usw.}$$

(12.1.11) Nun bezeicnen wir mit $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1(I)$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$. I sei gemeinsamer Definitionsbereich der betrachteten Funktionen. Das ist eine im Vergleich zu unseren sonstigen Mengen, auch den unendlichen, **große** Menge, von der wir nur einige wenige vertraute Elemente kennen. Der Rest verschwimmt (noch) im Nebel des Unwissens. Als Wertemenge (für D) nehmen wir $\mathcal{W}$ =Bild($\mathcal{D}$), denn wir wollen ja invertieren. D.h. $\mathcal{W}$ besteht aus allen Funktionen $I \mapsto \mathbb{R}$, die Ableitung mindestens einer Funktion I$\mapsto \mathbb{R}$ sind. Damit haben wir D als volles Abbildungstripel präzisiert:

$$\boxed{D = (\mathcal{D}(I), f \mapsto f', \mathcal{W}(\mathrm{I})).}$$

Der gemeinsame Definitionsbereich I aller beteiligten Funktionen ist äußerer Parameter.

Beachten Sie: Die Zuordnung D macht aus einem Funktionstripel ein anderes. Etwa:

$$(f = (\mathbb{R}, x \mapsto \sin(x^2), \mathbb{R}))\overset{D}{\mapsto}(\ f' = (\mathbb{R}, x \mapsto 2x\cos(x^2), \mathbb{R})).$$

Und diesen Ableitungsoperator wollen wir umkehren. (In der Schule wird die Umkehroperation neuerdings auch durchaus suggestiv *Aufleiten* genannt.)
(12.1.12) Oder etwas anders: Wir suchen nach Lösungen der Bestimmungsgleichung Df=g oder $f' = g$ mit vorgegebenem g und gesuchtem, unbestimmtem f.
(12.1.13) Wegen ihrer Bedeutung erhalten diese Funktionen einen besonderen Namen:

$\Rightarrow$	**Sei** f$\in \mathcal{W}$ mit f:I$\rightarrow \mathbb{R}$.
!!! ⊤	**Dann** heißen die Lösungen der Bestimmungsgleichung Df=g Stammfunktionen von g.
	Eine Stammfunktion F zu g erfüllt also $F'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

cos ist Stammfunktion zu sin und f mit $f(x) = 7 + \frac{1}{3}x^3$ ist eine (von vielen) Stamfunktionen zu h_2.
⊤ Um die Symbolik prägnanter zu machen und um Buchstaben zu sparen, ist es üblich, Stammfunktionen durch korrespondierende Großbuchstaben zu bezeichnen F ist also Stammfunktion zu f und G eine zu g usw. Für Funktionen mit fester Bedeutung gilt diese Konvention nicht. Auf Funktionen wie h_2 oder cos wendet man die Regel nicht an, schreibt also weder COS für -sin noch H_2 für $\frac{1}{3}h_3$. Eine andere Bezeichnungsweise von Stammfunktionen verwendet das Integralzeichen: Auch $\int dx f(x)$ soll einen Rechenausdruck einer Stammfunktion von f bezeichnen. Etwa $\int dx e^x$=e^x oder $\int dx \sin(x) = -\cos(x)$. Wir werden diese Schreibweise vornehmlich dazu verwenden, wenn wir durch Anwendung eines bestimmten Verfahrens nach einer Stammfunktion suchen. Eine weitere Konvention ist hierbei, dass die Integrationsvariable ebenso bezeichnet wird, wie die Variable der Stammfunktion. Also $\int dx\, x = \frac{1}{2}x^2$ und $\int dt\,(3x + 2t) = \frac{1}{4}(3x + 2t)^2$. Beim bestimmten Integral kommt dagegen der Bezeichnung der Integrationsvariablen außerhalb des Integrationstermes keine Bedeutung zu.

Wieso schreiben wir $\int dx f(x)$ und nicht $\int f(x)dx$? Letzteres ist die gebräuchlichere Schreibweise, die etwa bei der Nutzung eines Computeralgebrasystems unbedingt zu verwenden ist. Andererseits ist die erste Schreibweise in Zusammenhang mit den in der Physik wichtigen Mehrfachintegralen vorzuziehen. Sie ist generell besser geeignet, die Integraloperation zu decodieren. Wir verwenden sie daher durchgehend. Das geht allerdings auf Kosten einer sich in den letzten Jahren ausbreitenden problematischen Klammerersparnisregel, die möglichst nicht verwendet werden sollte. So findet man zunehmend Schreibweisen der folgenden Art

$$\int_0^1 x^3 + 2x - 7dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b \sin 2x + 3 + e^x dx$$

(12.1.14) Von den beiden Problemen aus (8.3.69), die beim Umkehren einer Zuordnung auftreten, haben wir das erste erledigt. Jedes f aus $\mathcal{W}$ besitzt **definitionsgemäß** wenigstens ein Urbild bezüglich D. Aber wie steht es mit dem zweiten Problem? Kann es mehrere Urbilder (eines einzigen Bildes) geben, enden mehrere Zuordnungspfeile in dem Element? Hier also: Kann eine Funktion g mehrere Stammfunktionen besitzen?
(12.1.15) Seien etwa F und G aus $\mathcal{D}$ mit DF=DG. Dann folgt aus der Linearität von D unmittelbar (F-G)$' = 0$ oder D(F-G)=0. D.h. F-G ist eine Funktion mit Ableitung Null.
(12.1.16) Hierfür (Funktion mit Ableitung Null) finden wir sofort eine ganze Reihen von Lösungen: Jede konstante Funktion $\underset{\sim}{c} = (I, x \mapsto \underset{\sim}{c}(x) = c, \mathbb{R})$ hat Ableitung Null. Und das heißt: F und G mit F=G+$\underset{\sim}{c}$ haben dieselbe Ableitung.

!!!	**Unterscheiden sich zwei Funktionen nur durch eine Konstante, dann haben sie dieselbe Ableitung!**

Die Graphen von F und G unterscheiden sich dann durch eine Parallelverschiebung um c in Richtung der y-Achse.

(12.1.17) Wir fragen, ob wir so bereits **alle Stammfunktionen** zu $g \in \mathcal{W}$ gefunden haben? Oder anders ausgedrückt: Kann es noch eine weitere Funktion H geben, die einerseits $H' = g$ erfüllt, aber andererseits nicht von der Form G+$\underset{\sim}{c}$ ist?

Nach etwas Überlegung findet man ein Beispiel:

I=$\mathbb{R} - \{0\}$	G=$h_{-1} = (I, x \mapsto \frac{1}{x}, \mathbb{R})$	H=(I,x$\mapsto H(x), \mathbb{R})$	H(x)=$\begin{cases} \frac{1}{x} + a \text{ für x>0} \\ \frac{1}{x} + b \text{ für x<0} \end{cases}$

Beide Funktionen haben dieselbe Ableitung. Aber für $a \neq b$ werden die beiden Hyperbeläste auch ungleich weit verschoben. Man fragt sich: Gibt es da vielleicht noch kompliziertere, der Anschauung nicht so leicht zugängliche Beispiele? Für ein solches Funktionenpaar F und G wäre die Differenz A=F-G einerseits nicht konstant, aber die Ableitung wäre überall Null. A$' = \underset{\sim}{0}$. Der Satz vom beschränkten Zuwachs zeigt, dass das unter bestimmten Bedingungen nicht der Fall sein kann. Gehen wir die Voraussetzungen des Satzes für unseren Fall durch:

> Angenommen A hat im Intervall $a \leq t \leq x$ die Ableitung 0. Also $A'(t) = 0$. Dann setzen wir $g_+(t) = g_-(t) = c$, für irgendein c. Es gilt trivialerweise $g'_-(t) \leq A'(t) \leq g'_+(t)$. (Das besagt ja 0$\leq 0 \leq 0$.) Der Satz ist anwendbar und liefert
>
> $$\begin{aligned} g_-(x) - g_-(a) &\leq A(x) - A(a) \leq g_+(x) - g_+(a) \\ c - c &\leq A(x) - A(a) \leq c - c. \end{aligned}$$
>
> **Und das heißt:** A(a)=A(x). Die Funktion A ist konstant. Dabei müssen allerdings alle t mit $a \leq t \leq x$ im gemeinsamen Definitionsbereich liegen!

(12.1.18) Und die letzte Bedingung ist im Gegenbeispiel nicht erfüllt! Wir müssen verlangen, dass der gemeinsame Definitionsbereich I unserer Funktionen ein Intervall ist!

> **Ist der gemeinsame Definitionsbereich I ein Intervall, dann unterscheiden sich die Stammfunktionen nur durch eine Konstante voneinander. Man erhält alle Stammfunktionen, indem man zu einer solchen alle möglichen (auf I) konstanten Funktionen hinzuaddiert. Graphisch: Man muss den Graphen einer Stammfunktion auf alle möglichen Weisen parallel zur y-Achse verschieben!**

☐ Wieso kann man die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu einem $f \in \mathcal{D}$ als "Gerade" interpretieren? (Beachte: $\underset{\sim}{c} = c \cdot \underset{\sim}{1}$!)

(12.1.19) Insbesondere ist $\mathbb{R}$ ein Intervall. Die Gesamtheit aller Stammfunktionen von cos wird gegeben durch f_c mit $f_c(x) = \sin(x) + c$, wobei c freier Parameter ist. Vielfach (besonders im schulischen Bereich) ist es üblich, $\int dx f(x)$ auch als Bezeichnung für die Schar aller Stammfunktionen anzusehen. Man schreibt dann $\int dx \sin x = -\cos x + c$ mit c als freiem oder äußerem Parameter. Der Leser muss dem jeweiligen Zusammenhang entnehmen, was gemeint ist: Eine spezielle Stammfunktion oder aber die Schar aller Stammfunktionen. In jedem Fall muss man vorsichtig sein, zu naiv von f(x)=g(x) auf $\int dx f(x) = \int dx g(x)$ zu schließen.

☐ Ein Beispiel: (3x+2)=3x+2. Wir finden $\int dx(3x+2) = \frac{1}{6}(3x+2)^2 + c$, wie man sofort durch Ableiten prüft. Und (mit der vorweggenommenen Linearität aus (12.1.32)):

$$\int dx(3x+2) = 3\int dx\, x + 2\int dx 1 = (\frac{3}{2}\mathrm{x}^2 + \mathrm{c}_1) + 2x + c_2 = \frac{3}{2}\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + \mathrm{c} \text{ mit } \mathrm{c} = \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2.$$

Ist hier "c=c"?

(12.1.20) Was für eine (die Umkehrbarkeit erzwingende) **Zusatzbedingung soll man nun an die Stammfunktion stellen?** Die graphische Darstellung der Schar der Stammfunktionen weist einem eine naheliegende Möglichkeit: Wählt man ein $x_0 \in I$ und dazu ein $y_0 \in \mathbb{R}$, dann gibt es genau eine Stammfunktion, deren Graph durch den Punkt (x_0, y_0) des Graphenraumes geht. Durch die Parallelverschiebung wird dieser Punkt genau einmal getroffen.

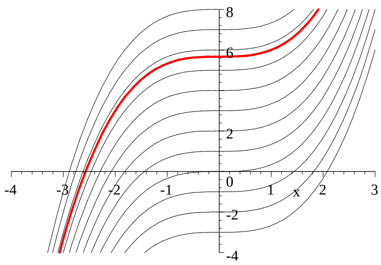
(12.1.21) Diese Eigenschaft verwenden wir zur Einführung der Zusatzbedingung! Rechnerisch bedeutet die Bedingung: Ist F irgendeine Stammfunktion von f, dann erhält man alle weiteren als F_c mit $F_c(x) = F(x) + c$. Es soll gelten $F_c(x_0) = y_0$. Oder $F(x_0) + c = y_0$. Es folgt $c = F(x_0) - y_0$ als eindeutige Lösung für c.

Beispiel: $\mathrm{x}_0 = 2$, $y_0 = -3$ und $f = h_2$. Dann ist $F = \frac{1}{3}h_3$ eine Stammfunktion. $F_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$. Wir erhalten $c = \frac{1}{3} \cdot 8 - (-3) = -\frac{17}{3}$. Folglich ist $\mathrm{F}_{-\frac{17}{3}}$ mit $\mathrm{F}_{-\frac{17}{3}}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{3}$ die gesuchte Stammfunktion.

(12.1.22) Sei $\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}$ die Teilmenge aller Funktionen aus $\mathcal{D} = \mathcal{D}(I)$, die durch den Punkt (x_0, y_0) des Graphenraumes geht. Auf diese Menge schränken wir die Ableitung D ein, betrachten also die Abbildung

$$(\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}, F \mapsto F', \mathcal{W}).$$

(12.1.23) Diese Abbildung ist nach Konstruktion jetzt umkehrbar. Für jede zulässige Wahl von (x_0, y_0) erhält man eine eigene zugehörige Umkehrabbildung des Differenzierens.

Kurvenschar $\mathrm{f}_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ Vorgegebener Punkt: $\mathrm{x}_0 = -2$ und $\mathrm{y}_0 = 3$ Der Graph mit c=$\frac{17}{3}$ geht durch diesen Punkt!	

(12.1.24) Für die übliche Integrationstheorie beschränkt man sich auf den Fall $\mathrm{y}_0 = 0$. Der allgemeine Fall ist für die Theorie der Differentialgleichungen grundlegend.
(12.1.25) Für diesen uns hier interessierenden Fall - also $\mathrm{y}_0 = 0$, d.h. die gesuchte Stammfunktion hat bei x_0 eine Nullstelle - führen wir die üblichen Bezeichnungen ein:

⇒	Sei	I ein Intervall und f∈ $\mathcal{W}(I)$. Weiter sei a∈ I.
!!	Dann	gibt es genau eine Stammfunktion F∈ $\mathcal{D}(I)$, die F(a) = 0 erfüllt. Diese Stammfunktion bezeichnen wir mit $\boxed{\int_a dt f(t) = \left(I, x \mapsto \int_a^x dt f(t), \mathbb{R}\right)}$
⊤		Die gesamte Funktion wird *unbestimmtes Integral von f ab x_0* genannt.
⊤		Jeder Wert dieser Funktion heißt ein *bestimmtes Integral von f.* t ist eine stumme Variable (genannt *Integrationsvariable*) . Sie nur dazu dient, einen f definierenden Rechenausdruck als Integranden formulieren zu können.
⊤		Die Funktion f bzw. der Rechenausdruck f(t) heißt der *Integrand*
		im Sinne von *Funktionsterm, für den eine Stammfunktion zu suchen ist.*

(12.1.26) Beispiel:

$$\int_3 dt\, t^3 = \left(\mathbb{R}, x \mapsto \int_3^x dt\, t^3, \mathbb{R}\right) = \left(\mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{81}{4}, \mathbb{R}\right)$$

Man überzeugt sich sofort, dass die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Da t eine stumme Variable ist, darf man schreiben

$$\int_3^x dt\, t^3 = \int_3^x da\, a^3 = \int_3^x du\, u^3 \text{ usw.}$$

Vermeiden sollte man dagegen die verbreitete (Un)sitte, die obere Grenze x und die Integrationsvariable mit demselben Buchstaben zu schreiben, also

$$\int_3^x dx\, x^3.$$

Das führt zu Problemen, wenn die obere Grenze als äußerer Parameter im Integranden auftritt, was nicht selten der Fall ist. Man sollte sich angewöhnen, die Integrationsvariable etwa durch einen zusätzlichen Strich abzusetzen. Soll das Integralzeichen "nur" einen Stammfunktion des Integranden (ohne Zusatzbedingung) bezeichnen, dann gelten die in (12.1.19) eingeführten Konventionen, dann sollte aber keine Integrationsgrenze angegeben werden.

! **(12.1.27)** Damit haben wir die rechte Gleichung unserer Hauptformel bereits verstanden:

■ $\int_a^b dt\, f(t)$ besteht in der Aufforderung: Suche zu f diejenige Stammfunktion, die bei a$\in I$ eine Nullstelle hat und berechnen ihren Wert an der Stelle b.

■ Ist nun F irgendeine Stammfunkttion, dann ist die gesuchte gleich F+$\underset{\sim}{c}$ und das unbestimmte c bestimmt sich wegen F(a)+c=0 zu -F(a). Der gesuchte Integralwert ist folglich F(b)-F(a) wie von der rechten Seite angegeben.

(12.1.28) Das Ergebnis ist die *technische Form des **Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung**.* Nochmals:

Sei	I=[a,b] ein endliches Intervall und f:I$\to \mathbb{R}$.
	Weiter sei F:I$\to \mathbb{R}$ **irgendeine** Stammfunktion von f
Dann	gilt
	$\int_a^b dt\, f(t) = F(b) - F(a)$

(12.1.29) Die übliche Technik zur Berechnung eines Integrales besteht daher darin, **irgendeine Stammfunktion** zu suchen und für diese - anschließend! - die Wertedifferenz

$$F(b) - F(a) = Wert(obere\ Grenze) - Wert(untere\ Grenze)$$

zu berechnen.

Da beide Schritte aufwendig und fehleranfällig sein können, ist es sinnvoll, einen trennenden **Zwischenschritt mit aufzuschreiben**. Man tut das so, dass man die Stammfunktion hinschreibt, sie in eckigen Klammern einschließt oder sie mit einem senkrechten Strich abschließt und die beiden einzusetzenden Grenzen anfügt. Also:

T	$\boxed{\int_a^b dt\, f(t) = F(t)\big\|_a^b = F(b) - F(a)}$
!	Zuerst eine Stammfunktion F zu f suchen und hinschreiben.
!	Dann die Grenzen einsetzen und die Differenz auswerten.

Es liegt hier eine gebräuchliche Realisierung unseres in (1.4.8) gegebenen Ratschlages zur Arbeitsökonomie vor.

(12.1.30) Ein typisches Beispiel dieses Vorgehens.

$$\int_{-1}^{1} dt\,(t^3 - t^4) = (\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5)\Big|_{-1}^{1} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - (\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{5}(-1)^5) = -\frac{2}{5}.$$

12.1.3 Die allgemeinen Integrationsregeln

(12.1.31) Mit Hilfe des Hauptsatzes können wir sofort eine Reihe wichtiger Rechenregeln für die Integration herleiten. Diese Regeln stellen wir jetzt zusammen. Dabei nehmen wir immer an, dass alle aufretenden Funktionen in den jeweils betrachteten Intervallen eine Stammfunktion besitzen.

(12.1.32)

Linearität	$\int_a^b dt\,(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \int_a^b dt\, f(t) + \beta \int_a^b dt\, f(t)$

Bei einer zu integrierenden Summe oder Linearkombination benötigt man daher nur Stammfunktionen für die einzelnen Summanden. Und konstante Faktoren können vorgezogen werden. Das haben wir in (12.1.19) bereits benutzt.

Zum **Beweis:** Sei F eine Stammfunktion zu f und G eine zu g. Dann ist $\alpha F + \beta G$ eine zu $\alpha f + \beta g$. Jetzt werte man beide Seiten mit dem Hauptsatz aus. Das ergibt die Gleichheit.

Die obere Grenze b ist in der Linearitätsformel freie Variable. Man kann b durch x$\in [a,b]$ ersetzen so dass die Linearität auch für unbestimmte Integrale mit **gleicher unterer Grenze** gilt.

☐ Aber die Linearität gilt nicht für **beliebige** Stammfunktionen. Wieso?

(12.1.33) Bei der Linearität bleiben die Integrationsgrenzen fest. Die nächsten Regeln beziehen sich auf deren Änderung. Dagegen bleibt jetzt der Integrand unverändert.

Additivität:	$\int_a^b dt\, f(t) = \int_a^c dt\, f(t) + \int_c^b dt\, f(t)$	$\int_a^b dt\, f(t) = -\int_b^a dt\, f(t)$	$\int_a^a dt\, f(t) = 0$

Bei der ersten Additivitätsformel muss c so gewählt sein, dass alle Integrale existieren. Ist F Stammfunktion von f, so besagt die erste Gleichung gemäß Hauptsatz einfach

$$F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)).$$

Und das ist offensichtlich korrekt. Die beiden anderen Gleichungen folgen entsprechend. Die mittlere Gleichung kann so interpretiert werden, dass sie zeigt, wie $\int_a^b$ .... zu verstehen ist, wenn b<a gilt.

(12.1.34) Trotz ihrer scheinbaren Banalität sind die beiden Regeln Linearität und Additivität für den konkreten Umgang mit Integralen von großer Bedeutung.

(12.1.35) Eine dritte wichtige Regel folgt aus dem Satz vom beschränkten Zuwachs. Wir nehmen die folgende Rollenfestlegung vor: Eingabegrößen seien f=F$'$ und g=G$'$. Und wir nehmen an, dass für f und g im gesamten Intervall $a \leq x \leq b$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und wir dürfen auf $F(b) - F(a) \leq G(b) - G(a)$ schließen. Nach dem Hauptsatz sind diese Differenzen aber gerade zwei bestimmte Integrale.

(12.1.36) Das Ergebnis:

	Monotonie der Integration.
Sei	I=[a,b] mit a<b. f und g seien in I integrabel.
	Und für alle x mit $a \leq x \leq b$ gelte $f(x) \leq g(x)$.
Dann	gilt $\int_a^b dt\, f(t) \leq \int_a^b dt\, g(t)$. Beachte a<b!
!!!	Kurz: **Eine Ungleichung darf integriert werden!**

(12.1.37) Dass eine Ungleichung unter (der Anwendung) irgendeiner mathematischen Operation (auf die beiden Seiten der Ungleichung) erhalten bleibt, ist keineswegs selbstverständlich. Differenziert man beide Seiten einer Ungleichung, so bleibt sie in der Regel nicht gültig! So gilt etwa $f(x) = e^{-x} > g(x) = -e^{-x}$ für alle x. Ableiten macht daraus die völlig falsche Ungleichung $f'(x) = -e^{-x} > g'(x) = e^{-x}$.

☐ Wie steht es mit dem Quadrieren der Seiten einer Ungleichung?

(12.1.38) Die Integration verhält sich diesbezüglich viel besser als die Differentiation! Die Montonieeigenschaft ist sehr nützlich, da man mit ihrer Hilfe auch für schwierigere Integrale leicht **Abschätzungen und Näherungen** erhält. Das Vorliegen einer Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ für die Integrandenfunktionen lässt sich vielfach mit Hilfe einfacher Grapheninspektion erkennen.

(12.1.39) Beachten Sie etwa, wie häufig Ungleichungen wie f(x)>0 oder f(x)$\leq c$ im Integrationsberich zur Verfügung stehen. Dann folgt sofort

$$\int_a^b dt\, f(t) \geq 0 \quad bzw. \quad \int_a^b dt\, f(t) \leq [ct]_a^b = c(b-a).$$

(12.1.40) Stets gilt $f(x) \leq |f(x)|$ und ebenso $-f(x) \leq |f(x)|$. Integration dieser beiden Ungleichungen ergibt die folgende vielfach nützliche Ungleichung:

$$\boxed{\left|\int_a^b dt\, f(t)\right| \leq \int_a^b dt\, |f(t)|\,.}$$

(12.1.41) Aber achten Sie bei Anwenden der Monotonie immer darauf, dass tatsächlich a<b gilt.

☐ Was geschieht bei a>b?

Abschließend führen wir noch zwei andere Schreibweisen des Hauptsatzes ein, die manchmal nützlich und vielfach gebräuchlich sind.

(12.1.42) Es sei f eine zwischen a und b differenzierbare Funktion mit Ableitung f′. Dann ist f eine Stammfunktion von f′. Der Hauptsatz gibt folgende Formeln:

$$\boxed{\int_a^x \mathrm{dt}\, \mathrm{f}'(\mathrm{t})=\mathrm{f(x)}-\mathrm{f(a)} \text{ oder } \int_a^x \mathrm{dt}\, \tfrac{d}{dt}\mathrm{f(t)}=\mathrm{f(x)}-\mathrm{f(a)}}$$

Beide Formeln zeigen, in welchem Sinne die Integration die Umkehrung der Ableitung ist.
(..43) Aber auch die umgekehrte Reihenfolge liefert eine wichtige Formel. Umgekehrte Reihenfolge sagt: *Erst Integrieren, dann Differenzieren.* Sei dazu F eine Stammfunktion von f. Dann gilt $\int_a^x dt\, f(t) = F(x) - F(a)$. Wir differenzieren beide Seiten nach x und finden:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dt\, f(t) = f(x).$$

Die Ableitung eines Integrales nach der oberen Grenze ergibt den Integranden!

☐ Konkretisieren Sie diese Schreibweisen für das Beispiel $f(t)=t^3$ und a=-1.
☐ Was ist $\frac{d}{dx}\int_x^b dt$ f(t)?
☐ Was ist $\int_a^x dt \int_b^t ds\ f(s)$? Etwa $\int_0^x dt \int_1^t ds s^2$?

12.2 Die inhaltliche Interpretation des Integrales

Wir kommen jetzt zur Frage nach der inhaltlichen Bedeutung des Integrales, also zu Herleitung der linken Gleichung in unserer Zentralformel der Integration.

(12.2.1) Es wurde behauptet, das Integral sei das Produkt aus Mittelwert (der vom Intervall erfassten Funktionswerte) und der Intervallbreite.
(12.2.2) Was "Mittelwert der Funktionswerte" genauer bedeuten soll, ist noch zu klären. Denn Funktionswerte gibt es ja unendlich viele. Klar ist zunächst nur, was der (arithmetische) Mittelwert endlich vieler Funktionswerte bedeutet.
(12.2.3) Zur Herleitung der inhaltlichen Interpretation benötigen wir mehrere Schritte. **Das zugehörige Szenenbild** sollte man sich gut einprägen, da es für die Integration grundlegend ist.

- Wir teilen unser Intervall I=[a,b] in N gleiche Teilintervalle. Die Rand- bzw. Grenzpunkte dieser Teilung bezeichnen wir der Reihe nach mit $x_0, x_1, ..., x_N$. Dabei ist $x_0 = a$ und $x_N = b$. Das erste Teilintervall ist $[x_0, x_1]$ usw. Beachten Sie, dass wir insgesamt N+1 Punkte vorliegen haben. Die Länge der Teilintervalle ist $\Delta = \frac{1}{N}(b-a)$. Weiter sei z_i ein irgendwie aus dem (i+1)-ten Teilintervall gewählter Punkt und $f(z_i)$ der zugehörige Funktionswert. Da unsere Funktionen glatt sein sollen, können wir z_i etwa so wählen , dass $f(z_i)$ typisch für das Teilintervall ist. (☐ Fertigen Sie hierzu selbst eine Skizze an für N=4 oder 5.)

- Nun fordern wir (als einschränkende Bedingung an f), dass man eine feste Zahl M finden kann, für die $-M \le f\,'(x) \le M$ für all x$\in I$ gilt. D.h., im gesamten Integrationsbereich darf der Graph nicht zu steil werden. (Für $x \mapsto \sqrt{|x|}$ etwa wächst die Steigung bei x=0 über alle Grenzen. Ein M mit der gewünschten Eigenschaft lässt sich dann **nicht** finden.) Jetzt integrieren wir die vorausgesetzte Ungleichung im Bereich $x_i \le t \le x_{i+1}$

$$\begin{aligned} -M(s-z_i) &\le f(s) - f(z_i) \le M(s-z_i) \text{ für } x_{i+1} \ge s > z_i \\ -M(z_i - s) &\le f(z_i) - f(s) \le M(z_i - s) \text{ für } x_i \le t_u < z_i. \end{aligned}$$

Erneute Integration dieser Ungleichungen gibt zunächst

$$\begin{aligned} -\frac{M}{2}(t_0 - z_i)^2 &\le \int_{z_i}^{t_o} ds(f(s) - f(z_i)) \le \frac{M}{2}(t_o - z_i)^2 \text{ für } x_{i+1} \ge t_0 > z_i \\ -\frac{M}{2}(z_i - t_u)^2 &\le \int_{t_u}^{z_i} ds(f(z_i) - f(s)) \le \frac{M}{2}(z_i - t_u)^2 \text{ für } x_i \le t_u < z_i. \end{aligned}$$

Für die untere Gleichung folgt dann aber auch (Aus -A$\leq X \leq A$ folgt -A$\leq -X \leq A$!)

$$-\frac{M}{2}(z_i - t_u)^2 \leq \int_{t_u}^{z_i} ds(f(s) - f(z_i)) \leq \frac{M}{2}(z_i - t_u)^2 \text{ für } x_i \leq t_u < z_i.$$

Addition dieser Gleichung mit der ersten gibt

$$-\frac{1}{2}M\left[(t_o - z_i)^2 + (t_u - z_i)^2\right] \leq \int_{t_u}^{t_0} dt(f(t) - f(z_i)) \leq \frac{1}{2}M\left[(t_o - z_i)^2 + (t_u - z_i)^2\right]$$

Da nun $|t-z_i| \leq \Delta$ ist folgt für (die zulässigen Werte) $t_o = x_{i+1}$ und $t_u = x_i$ die Ungleichung

$$-M\Delta^2 \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt(f(t) - f(z_i)) \leq M\Delta^2$$

Das so gewonnene Resultat werden wir gleich benötigen.

- Im dritten Schritt betrachten wir unser eigentliches Integral. Mit Hilfe der Additivität und der im ersten Schritt eingeführten Zerlegung folgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b dt\, f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, \left[f(z_i) + (f(t) - f(z_i))\right] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, f(z_i) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt(f(t) - f(z_i)) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, f(z_i) + \sum_{i=0}^{N-1} R_i \end{aligned}$$

  Dabei ist R_i eine Abkürzung für das entsprechende Integral im vorangegangenen Term. Jetzt benutzen wir die im zweiten Schritt gewonnene Abschätzungen für R_i und finden:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, f(z_i) - N \cdot M\Delta^2 \leq \int_a^b dt\, f(t) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, f(z_i) + N \cdot M\Delta^2$$

  Oder aber mit selbsterklärenden Hilfsgrößen

$$S_N - Z_N \leq \int_a^b dt\, f(t) \leq S_N + Z_N$$

  Nun gilt aber $Z_N = NM\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 = \frac{M(b-a)}{N.}$. **Und diese Größe geht mit N nach Null!**

- Wir haben (da der Integrand in S_n konstant ist):

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt\, f(z_i) = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i) = (b-a)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)\right)$$

  Das ist aber der Mittelwert der N ausgewählten Funktionswerte mal Intervallänge (b-a).. **Lassen wir jetzt N nach unendlich gehen, so geht $\mathbf{Z}_N$** nach Null und unsere gesuchte Interpretation entsteht. Das Integral nähert sich dem Mittelwert der N aus ihrem jeweiligen Intervall gewählten Funktionswerte beliebig an. Im Grenzwert (unendlich feiner Unterteilung) entsteht Gleichheit.

Als Formel:

$$\boxed{\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b dt\, f(t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(z_i).}}$$

(12.2.4) Damit ist auch die linke Seite unserer Zentralformel für die Integration in der eingangs skizzierten Weise erklärt. Diese linke Seite können wir auch als inhaltliche Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung interpretieren.

(12.2.5) Es ist eine Aufgabe der Mathematik, zu klären, inwieweit die soeben gefundene Interpretation des Integrales nicht nur für die von uns betrachteten gutartigen Funktionen gilt, sondern auch für weitere weniger glatte. Die von uns gemachte Annahme $|f'(x)| \leq M$ ist jedenfalls viel zu stark, erlaubt dafür aber die einfach und durchsichtige Herleitung der Mittelwerteigenschaft. Wir gehen auf die Frage der Abschwächung dieser Voraussetzung nicht ein.

Beispiel: I=$\int_0^2 dx x^2 = \frac{8}{3}$. Wir wählen N=8 und nehmen für z_i die Mitte des zugehörigen Intervalles.

$\int_0^2 x^2 dx \approx \sum_{i=0}^{7} \left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{16}\right)^2 = 2.6563$ statt des exakten 2.666...Als mittelwert erhalten wir 1.333.. Vgl. (12.2.11)

☐ Schreiben Sie die gefundene Integralnäherung mit Hilfe des Summenzeichens:

$$\int_a^b dx f(x) = \bar{f} \cdot (b-a) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(.?.)$$

(Vgl. Kap 12.2.3)

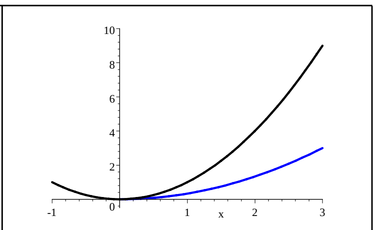
12.2.1 Die Mittelwertfunktion

(12.2.6) Interessant und nützlich ist die über die folgende Zuordnung entstehende *Mittelwertfunktion*

$$\boxed{\mathrm{x} \mapsto \mu_{f,a}(\mathrm{x}) = \frac{1}{x-a} \int_a^x dt\, f(t) = \frac{F(x)-F(a)}{x-a}}$$

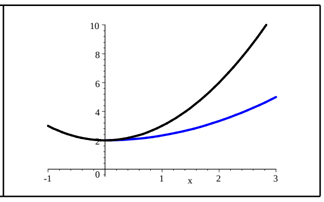
(12.2.7) Die Größe $\mu_{f,a}(x)$ ist zu interpretieren als **Mittelwert der Funktionswerte von f von a bis nach x.** Mit Grenzwert $\mu_{f,a}(a) = f(a)$ im Startpunkt x=a. Will man Integral und Integrand in einem Bereich miteinander vergleichen, dann ist es meist besser, diese Funktion anstelle der Stammfunktion zu wählen. U.a. schlägt sich das in der Gleichheit der Einheiten nieder.
(12.2.8) Ist f(x) im betrachteten Bereich positiv, so folgt jetzt natürlich auch sofort die traditionelle Flächeninhaltsinterpretation, auf die wir nicht weiter eingehen wollen. (Flächeninhalt unter dem Graphen gleich Flächeninhalt des Rechtecks mit derselben Breite und dem Mittelwert als Höhe.)
(12.2.9) Einige Beispiele, bei denen wir jeweils f ab a einzeichnen und dazu das zugehörige $\mu_{f,a}$. Der Graph von f ist fett gezeichnet. Denken Sie daran: Der Funktionwert ist der Mittelwert der vorangegangenen Funktionswerte von f.

f(x)=x^2
a=0
$\mu_{f,a}(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}x^2$



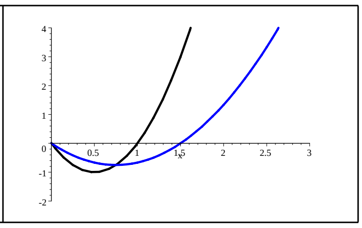
Jetzt startet der Funktionswert bei x=2:

f(x)=$\mathrm{x}^2 + 2$
a=0
$\mu_{f,a}(x) = \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3 + 2x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$

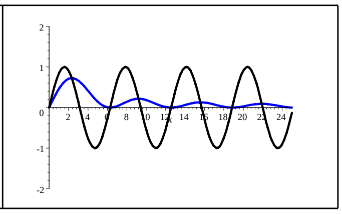


Jetzt ein Beispiel mit Vorzeichenwechsel. Die Nullstelle der Mittelwertfunktion ist entsprechend verschoben.

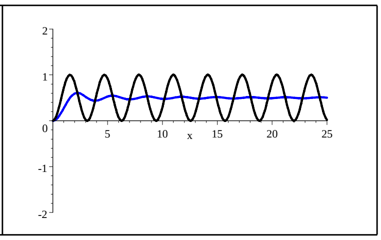
f(x)=4x(x-1)
a=0
$\mu_{f,a}(x) = \frac{4}{x}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)$



Und jetzt zwei periodische Funktionen:

f(x)=sin(x) a=0 $\mu_{f,a}(x) = \frac{1}{x}(1-\cos(x))$	

Das nächste Bild zeigt eindrucksvoll die Annäherung der Mittelwertfunktion an einen Mittelwert:

f(x)=$\sin^2$(x)=$\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ a=0 $\mu_{f,a}(x) = \frac{1}{x}(1-\cos(x))$	

12.2.2 Numerische Approximation von Integralen

(12.2.10) Die letzte Formel aus (12.2.3) kann benutzt werden, um Integrale durch endliche Summen zu approximieren. Dabei sollte man darauf achten, die Zwischenwerte a_i der Teilintervalle günstig zu wählen. Hierdurch kann die Qualität der Approximation (bei gleichem N) beträchtlich gesteigert werden. Nochmals die Formel leicht umgeschrieben:

$$\int_a^b dt\, f(t) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i) = \Delta_N \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i).$$

(12.2.11) Zur Illustration betrachten wir $\int_0^2 dx x^2$. Wir wissen, dass das exakte Ergebnis $\frac{1}{3}x^3|_0^2 = \frac{8}{3} =$ 2.66... ist. Wir haben b-a=2, also $\Delta_N = \frac{2}{N}$. Als Zwischenwert a_i wählen wir die Mitte des zugehörigen Teilintervalles.

N=1	$\frac{2}{1}(1^2)$	2
N=2	$\frac{2}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) =$	$\frac{5}{2} = 2.5$
N=3	$\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2\right) =$	$\frac{70}{27} = 2.59...$
N=4	$\frac{2}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right) =$	$\frac{21}{8} = 2.625$
N=5	$\frac{2}{5}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2\right) =$	$\frac{66}{25} = 2.64$

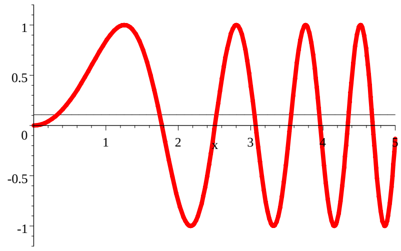
Wir sehen, wie wir bereits für kleine N eine recht gute Näherung des Integralwertes erhalten. Teilweise liegt das allerdings an der Wahl des Zwischenwertes. Wir rechnen das jetzt noch für N=100 und N=1000 aus. Mit Hilfe der Computer sind derartige Rechnungen kein Problem. Natürlich ist hier die Summenschreibweise angebracht

N=100	$\frac{2}{100}\sum_{k=0}^{99}\left(\frac{2k+1}{50}\right)^2 =$	$\frac{13\,333}{1250} = 10.6664$
N=1000	$\frac{2}{1000}\sum_{k=0}^{999}\left(\frac{2k+1}{500}\right)^2 =$	$\frac{1333\,333}{125\,000} = 10.66666$

(12.2.12) Als weiteres Beispiel betrachten wir das Integral I=$\int_0^5 dx \sin(x^2)$. Man kann zeigen, dass sich für f(x)=sin(x^2) keine elementar konstruierbare Stammfunktion angeben lässt. Der Graph lässt einen kleinen positiven Mittelwert erwarten. Wir raten 0.2. Das ergibt einen Integralwert von 1. Exakt ist $\int_0^5 \sin(x^2)dx =$

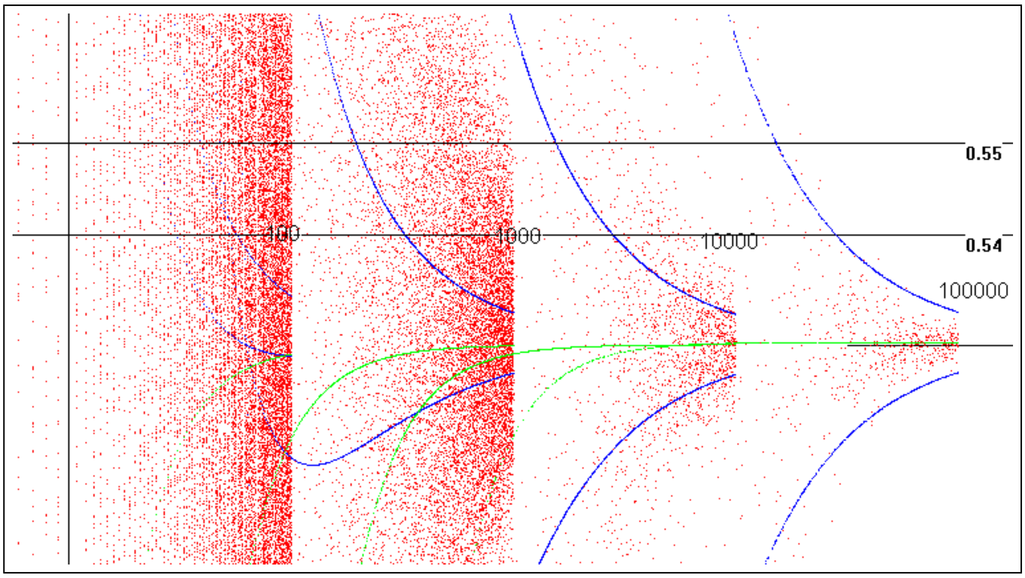
.527 917 3. Also etwas weniger. Als allergröbste Abschätzung über die Extremwerte der Funktion hat man

$-5 \leq I \leq 5$.



$\int_0^5 \sin(x^2)dx = 0.528$
$\text{f}=\frac{0.528}{5} = 0.106$ (Mittelwert)

An diesem Beispiel soll verdeutlicht werden, wie die Approximation von N und der Wahl des Zwischenwertes abhängt. Dazu wählen wir ein N zufällig zwischen 1 und 100000. Und überdies wählen wir a_i zufällig (innerhalb des zugehörigen Teilintervalles) aus. D.h. wir wählen a_i zufällig aus $[i\Delta_i, (i+1)\Delta_i]$. Bisher haben wir immer genau die Mitte genommen. Die Anzahl N tragen wir horizontal logarithmisch auf. Vertikal dagegen das Resultat der zugehörigen Summe. Die erkennbaren Stufen gehören zu N=100,1000,10000 und 100000. Der vertikale Fensterbereich wird bei jeder Zehnerpotenz (Stufe) um einen Faktor 10 (um den wahren Integralwert) hochskaliert. Man sieht, wie die Approximation sich mit zunehmendem N verbessert, selbst bei ungünstiger Wahl der Zwischenwerte und zwar etwa eine Stelle bei Vergrößerung von N um einen Faktor 10. Die drei erkennbaren Kurven gehören zu den beiden Randwahlen von a_i (blaus) und zur Mittelpunktswahl (grün, jeweils für alle i.). Die rein zufällige Wahl (rot) ist für kleine N relativ schlecht. Später werden die Ausreisser seltener. Aber denken Sie daran: Bei jeder Stufe ist die vertikale Skala um einen Faktor 10 um den Grenzwert herum vergrößert!



12.2.3 Ergänzung: **Das Summenzeichen**

(12.2.13) Bezeichnungs- und Schreibweisen sollen so sein, dass sie einem einerseits die Arbeit möglichst erleichtern und dass sie andererseits die in ihnen enthaltene Information neuen Lesern möglichst rasch und getreu übermitteln. Die Schreibweise mit dem "Summenzeichen" ist hierfür ein gutes und wichtiges Beispiel, auch wenn sie manchmal zunächst etwas Einarbeitung erfordert. Aber diese Bemühung lohnt sich, auch in Hinblick auf Einübung vieler weiterer ähnlicher Schreibweisen.

(12.2.14) Wir sind häufig Summen begegnet, deren Summanden eine gleichartige Struktur hatten, etwa durch Indizes festgelegt wurden. Die Gleichartigkeit haben wir bisher durch "usw. Pünktchen" zum Ausdruck gebracht. Etwa beim Distributivgesetz

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)(b_1 + ... + b_n) = a_1b_1 + ...a_mb_n.$$

Bei der Binomialformel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^{n-0} + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + ... + \binom{n}{n}a^bb^{n-n}.$$

Bei der Matrixschreibweise von linearen Gleichungen oder bei Konstruktionen vom Typ der vektoriellen Zentralformel mit N Summanden:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_N\vec{a}_N.$$

(12.2.15) In jedem dieser Fälle gibt es eine Bezeichnung oder aber eine Konstruktionsformel für den "allgemeinen Summanden", der in der Summe auftritt. Diesen sollte man mittig mit aufschreiben. In den drei Beispiele:

$$(a_1 + a_2 + ...\boxed{+\mathrm{a}_i} + ... + a_m)(b_1 + ...\boxed{+\mathrm{b}_j} + ... + b_n) = a_1b_1 + ..\boxed{+\mathrm{a}_i\mathrm{b}_j} + ... + a_mb_n$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^{n-0} + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + ...\boxed{+\tbinom{n}{k}\mathrm{a}^k\mathrm{b}^{n-k}} + ... + \binom{n}{n}a^bb^{n-n}$$

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ..\boxed{+\alpha_n\vec{a}_n} + ... + \alpha_N\vec{a}_N$$

Das ist eine Zuordnung oder besser Parametrisierung der Summanden durch einen oder mehrere Indizes.

Meist ist es ein einziger in Form einer reellen Zahl. Nehmen wir einen Index i und $i \mapsto a_i$. Zusammen gibt das wieder eine Abbildung $(I, i \mapsto a_i, M)$, wobei I die Menge der möglichen Indexwerte ist, meist ein Abschnitt natürlicher Zahlen und M ist die Menge in der die Summanden liegen müssen. Sagen wir $\mathrm{I}_N = \{1, 2, .., N\}$. Im Fall der Binomialformel haben wir $k \mapsto a_k = \binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ für den allgemeinen Summanden. Auf der rechten Seite der Distributivformel haben wir (i,j)$\mapsto a_ib_j$ mit (i,j)$\in I_{nm} = \{(a,b)|a = 1, 2, ..., m$ und b=1,2,..,n$\}$ usw.

Also: Man sucht einen Parameter oder Index, legt über eine Parametrisierung den allgemeinen Summanden fest und die Menge, aus dessen Elemente der Index durchlaufen soll. Dann wird über alle möglichen Summanden summiert. Diese letzte Aufforderung wird durch das Summenzeichen dargestellt $\sum$, ein großes grichisches "Sigma". Dabei notiert man an diesem Zeichen noch in geeigneter Weise, welche Werte der Index durchlaufen soll. Es gibt keine normierte eindeutig festgelegte Schreibweise, wie man die zulässigen Parameter festlegt. Man muss nur aus dem jeweiligen Zusammenhang erkennen können, was gemeint ist.

Unsere Ausdrücke und Gleichungen oben schreiben sich dann beispielsweise

$$\begin{aligned}
\left(\Sigma_{i=1}^m a_i\right)\left(\Sigma_{j=1}^m b_j\right) &= \Sigma_{(i,j)\in I_{mn}} a_ib_j \\
(a+b)^N &= \Sigma_{k=0}^N \binom{N}{k} a^kb^{N-k} \\
& \quad\ \Sigma_{n=1}^N \alpha_n\vec{a}_n.
\end{aligned}$$

Der Index ist im Sinne von Kap.1.8 eine *stumme Variable.*

(12.2.16) Also nochmals: Das Σ samt Zusatz gibt die möglichen Werte oder Bezeichnungen der beteiligten Parameter oder Indizes und die Aufforderung über die Summanden zu summieren. Hinter dem Summenzeichen steht der allgemeine Summand als Bezeichnung oder Rechenausdruck, der aus dem Index den zugehörigen Wert macht. Einige weitere Beispiele:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{k=2}^{6} k a_k &= 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 \\
\Sigma_{k=2}^{5} k^2 a &= 2^2 a + 3^2 a + 4^2 a + 5^2 a = 54a^2 \\
\Sigma_{n=0}^{3} (2n+1) &= 1 + 3 + 5 + 7 = 18
\end{aligned}$$

(12.2.17) Es kommen auch kompliziertere Konstruktionen vor und die lassen sich mit Hilfe des Summenzeichens viel besser verarbeiten als durch ausgeschriebene Summen. Nachfolgend ein Beispiel für eine Umformung mit dem Summenzeichen. (M_{ij}) ist dabei eine Matrix , wie wir sie im Zusammenhang mit den linearen Gleichungen eingeführt haben:

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{i=1}^{3} a_i (\Sigma_{k=1}^{4} M_{ik} x_k) \stackrel{(1)}{=} \Sigma_{i=1}^{3} (\Sigma_{k=1}^{4} a_i M_{ik} x_k) \stackrel{(2)}{=} \Sigma_{i=1}^{3} \Sigma_{k=1}^{4} a_i M_{ik} x_k \\
& \stackrel{(3)}{=} \Sigma_{k=1}^{4} \Sigma_{i=1}^{3} a_i M_{ik} x_k \stackrel{(4)}{=} \Sigma_{k=1}^{4} (\Sigma_{i=1}^{3} a_i M_{ik} x_k) \\
= \; & \Sigma_{k=1}^{4} (\Sigma_{i=1}^{3} a_i M_{ik}) x_k
\end{aligned}$$

☐ Wir schreiben die entsprechende Rechnung einmal für den einfacheren Fall $\Sigma_{i=1}^{2} \Sigma_{k=1}^{2} \ldots.$ aus. Erläutern und rechtfertigen Sie die einzelnen Rechenschritte anschließend selbst:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{i=1}^{2} a_i (\Sigma_{k=1}^{2} M_{ik} x_k) &= a_1(M_{11}x_1 + M_{12}x_2) + a_2(M_{21}x_1 + M_{22}x_2) \\
&\stackrel{(1)}{=} (a_1 M_{11} x_1 + a_1 M_{12} x_2) + (a_2 M_{21} x_1 + a_2 M_{22} x_2) \\
&\stackrel{(2)}{=} a_1 M_{11} x_1 + a_1 M_{12} x_2 + a_2 M_{21} x_1 + a_2 M_{22} x_2 \\
&\stackrel{(3)}{=} a_1 M_{11} x_1 + a_2 M_{21} x_1 + a_1 M_{12} x_2 + a_2 M_{22} x_2 \\
&\stackrel{(4)}{=} (a_1 M_{11} x_1 + a_2 M_{21} x_1) + (a_1 M_{12} x_2 + a_2 M_{22} x_2) \\
&\stackrel{(5)}{=} (a_1 M_{11} + a_2 M_{21}) x_1 + (a_1 M_{12} + a_2 M_{22}) x_2 \\
&= (\Sigma_{k=1}^{2} (\Sigma_{i=1}^{2} a_i M_{ik}) x_k
\end{aligned}$$

12.3 Die Technik des Integrierens

Jetzt geht es darum: Wie rechnet man Integrale aus, wenn man sie überhaupt ausrechnen kann. Konzentrierte sofortige Behandlung der ergänzenden Fragen ist hier besonders wichtig.

12.3.0 Vorbemerkung

Es ist nicht möglich, ein Regelsystem anzugeben, mit dessen Hilfe man beispielsweise für alle elementar konstruierbaren Funktionen eine Stammfunktion bestimmen könnte. Ja, man kann zeigen, dass relativ einfache Funktionen wie $g(x)=e^{-x^2}$ überhaupt keine elementar konstruierbare Stammfunktion besitzen. D.h., dass man die Stammfunktion nicht durch einen unserer üblichen Rechenausdrücke darstellen kann. Beim Integrieren gibt es kein generell anwendbares Kochrezept, durch dessen reine Anwendung man zum Ziel kommt. Beim Ableiten war das noch der Fall. Dort leistete der Satz der Ableitungsregeln eben dieses.

Beim Integrieren muss man stattdessen eine ganze Reihe von Methoden durchgehen, sich etwas einfallen lassen, ohne dass man die Gewähr hat, erfolgreich zu sein. Von Studienanfängern wird das vielfach als unangenehm, wenn nicht gar unzumutbar empfunden, wogegen mathematisch orientierte Personen es geradezu als Vorzug ansehen, wenn Integrale als intellektuelle Herausforderung an Geist und Einfallsreichtum auftreten und nicht nur rein schematischer Vollzug verlangt wird. Mathematik hat in einer breiten Öffentlichkeit den Ruch, unkreativ zu sein, und dann soll sie das gefälligst auch sein.

Nichtsdestoweniger lassen sich viele, wenn nicht die meisten der in den elementaren Anwendungen auftretenden Integrale schematisch lösen. Bei ihnen treten dann stärker Probleme der Arbeitseffizienz und der Kontrollierbarkeit des Weges in den Vordergrund: **Wie rasch wird das Ergebnis gewonnen und wie weit ist es kontrollierbar und gegen Fehler gesichert?** Und Fehler treten vielfach auch auf, wenn Formelsammlungen oder Computeralgebraprogramme benutzt werden! Erfahrungsgemäß tauchen bereits bei einfachen Integralen häufig umständliche Rechnungen und grobe Fehler auf, die das Verständnis und die Bearbeitung der eigentlich relevanten Anwendungsprobleme behindern!

Machen Sie es sich einmal klar, was es bedeutet, wenn im Semester vielleicht 50 Integrale zu bearbeiten sind und pro Integral im Durchschnitt 30 Minuten anstelle von 5 Minuten benötigt werden. Die nachfolgende Darstellung orientiert sich daher an diesen Punkten:

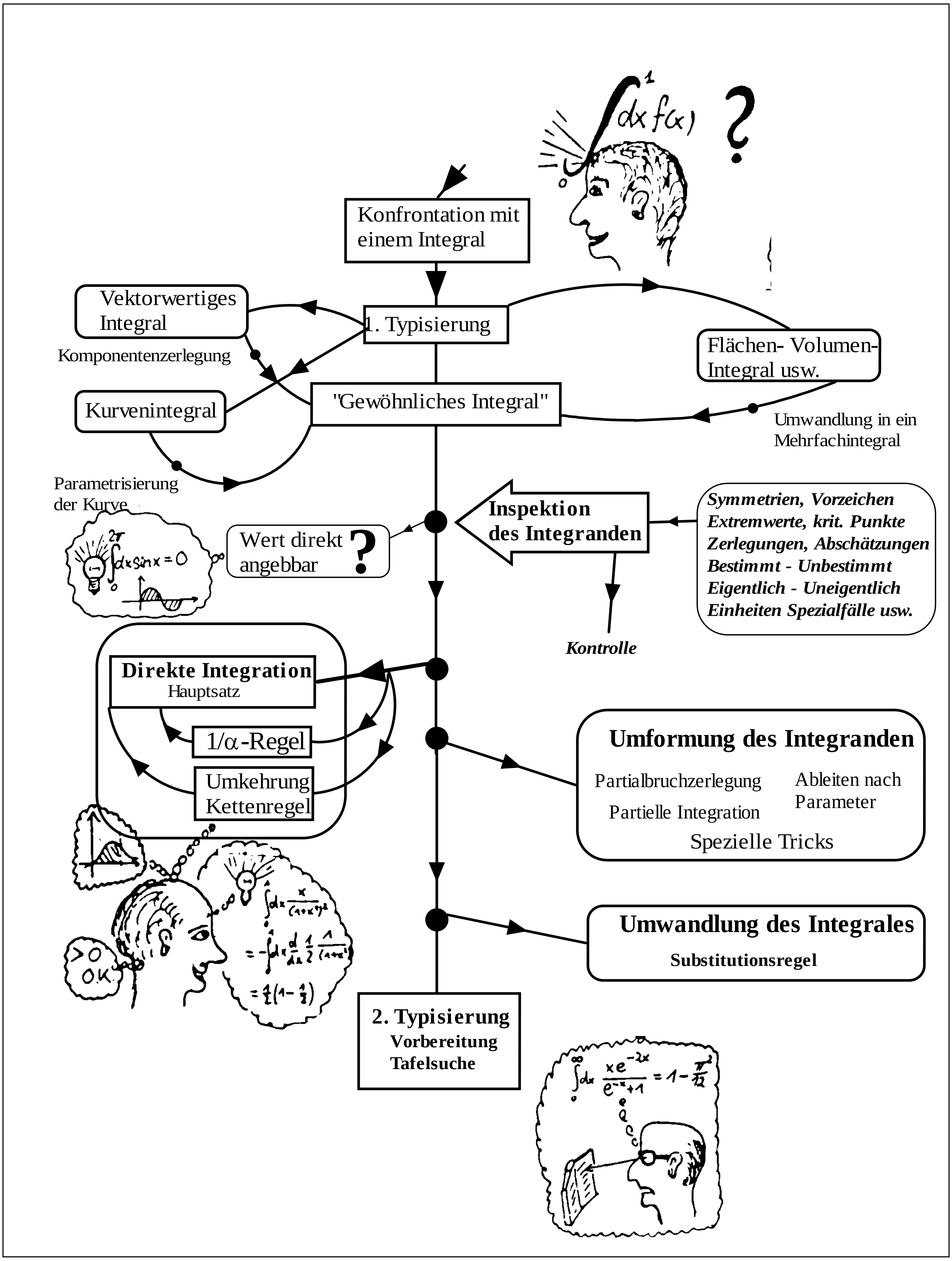
Effizientes Integrieren, insbesondere auch einfacher, dafür aber häufiger auftretender Funktionen und Kontrolle des Resultates.

Die einzelnen Regeln werden in der Reihenfolge besprochen, die man in etwa verwenden sollte, wenn man mit einem Integral konfrontiert wird. Dazu ist ein Schema angegeben, das die einzelnen Punkte benennt und das auch der Leser als Orientierungs- uns Erinnerungshilfe bei der Behandlung konkreter Integrale verwenden kann und sollte.

Dieses Schema bildet ebenso den Leitfaden des nachfolgenden Textes. Es orientiert Sie daher gleich über den Textaufbau.

Bei der Behandlung eines konkreten Integrales sollten Sie die einzelnen Punkte des Schemas bewusst durchgehen und überprüfen, welcher Punkt als erster zum Erfolg führt. Mit wachsender Erfahrung wird man immer mehr dieser Punkte sofort durch Inspektion ausschließen bzw. sogleich einen erfolgversprechenden Ansatz sehen. Diese Erfahrung benötigt man auch, wenn man effektiv mit einem Computeralgebrasystem arbeiten will.

Das Schema beginnt unter dem Stichwort "1. Typisierung" mit einer Vorwegnahme späteren Stoffes. Neben den "gewöhnlichen Integralen" wie wir sie hier besprechen, werden in den Anwendungen noch eine Reihe weiterer Integraltypen benötigt, die in dem Schema an dieser Stelle bereits vorweggenommen sind. Durch mathematische Umformungen lassen sie sich alle auf gewöhnliche Integrale zurückführen, was angedeutet ist. Der weitere Weg mündet dann in unseren jetzigen ein: Die Berechnung eines gewöhnlichen Integrales.

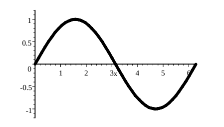

Konfrontation mit einem Integral
1. Typisierung
Vektorwertiges Integral
Komponentenzerlegung
Kurvenintegral
Parametrisierung der Kurve
"Gewöhnliches Integral"
Flächen- Volumen-Integral usw.
Umwandlung in ein Mehrfachintegral
Wert direkt angebbar ?
Inspektion des Integranden
Symmetrien, Vorzeichen
Extremwerte, krit. Punkte
Zerlegungen, Abschätzungen
Bestimmt - Unbestimmt
Eigentlich - Uneigentlich
Einheiten Spezialfälle usw.
Kontrolle
Direkte Integration
Hauptsatz
1/α-Regel
Umkehrung Kettenregel
Umformung des Integranden
Partialbruchzerlegung
Partielle Integration
Ableiten nach Parameter
Spezielle Tricks
Umwandlung des Integrales
Substitutionsregel
2. Typisierung
Vorbereitung
Tafelsuche
>0
O.K.

12.3.1 **Inspektion des Integrales**

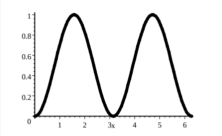
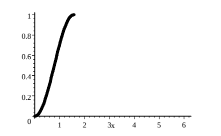
Zu Anfang einer Integration sollte eine (möglichst automatische) Inspektion des Integrales, also des Integrationsbereiches sowie des Integranden stehen. Mit etwas Übung erhält man darüber bereits eine Reihe wichtiger Informationen.

12.3.1a **Konsequenzen von Symmetrien**

(12.3.1) Es folgen verdeutlichende Beispiele. Dabei sollte man immer von einer geistigen Skizze des Integranden (im Integrationsbereich) ausgehen und an die Mittelwertinterpretation des Integrales denken.
(12.3.2) In einigen Fällen ergibt die Inspektion, dass das Integral den Wert Null hat.

$\boxed{\int_0^{2\pi} dx \sin(x) = 0}$	
Folgt über die Mittelwertinterpretation (12.2.3)	$\int_{-2}^{2} dx\ \mathrm{x}^3 = 0$

(12.3.3) Vielfach ist die Additivität (12.1.33) nützlich. Damit kann man u.U. den Integrationsbereich verkleinern, was häufig vorteilhaft ist. Zusätzlich benutzt man die Unabhängigkeit des Mittelwertes von der Lage auf der x-Achse. Im Beispiel ergeben die 4 Bereiche offenbar denselben Mittelwert.

	
$\int_0^{2\pi} dx \sin^2 x =$	$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^2 x.$

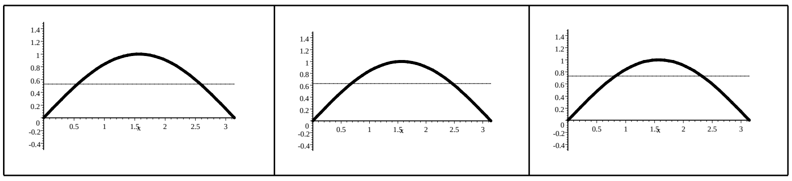
☐ Vereinfachen oder berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften:

$\int_{-2}^{2} dx\, x^4$	$\int_{-2}^{2} dx\, x^5$	$\int_{-1}^{1} dx\, (2x^2 - x^3)$	$\int_{-1}^{1} dx\, \frac{x}{1+x^2}$

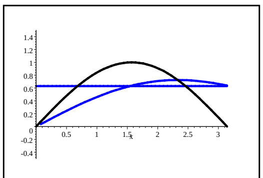
☐ Berechnen sie $\int_0^A dx\, x$ und $\int_A^B dx\, x$ mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft.

12.3.1b **Abschätzungen**

(12.3.4) Hat man eine Vorstellung vom Graphen der Integrandenfunktion, dann folgt daraus häufig eine recht gute Abschätzung des Integralwertes. Genauer gesagt schätzt man den Mittelwert $\overline{f}$ der Funktionswerte und daraus folgt mit I= $\overline{f} \cdot (b-a)$ der gesuchte Integralwert. Wir verdeutlichen das an einem Beispiel. In der nachfolgenden Figur ist der Mittelwert einmal etwas zu hoch und einmal etwas zu niedrig angesetzt. Im ersten Bild ist der Anteil an Funktionswerten oberhalb der Strecke größer als der darunter. Das mittlere Bild gibt den korrekten Mittelwert.



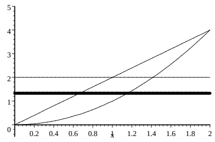
Als Ergänzung noch die zugehörige Mittelwertfunktion:



(12.3.5) Vielfach kann man auch mathematisch gesicherte Schranken für den Integralwert angeben. Die Grundlage ist die Monotonieeigenschaft (12.1.36) der Integration. Gilt etwa $U \leq f(x) \leq O$ im Integrationsbereich, so folgt

$$U(b-a) \leq \int_a^b dx f(x) \leq O(b-a).$$

Ein Beispiel: Für $0 < x < 2$ ist $0 \leq x^2 \leq 2x$. Damit folgt $0 \leq \int_0^2 dx x^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 4$. Das Bild zeigt die Verhältnisse einschließlich des tatsächlichen Mittelwertes$\frac{4}{3}$:



☐ Geben Sie je eine obere und eine untere Abschätzung für folgende Integrale

$\mathrm{I}_1 = \int_0^2 dx x^2$	$\mathrm{I}_2 = \int_{-1}^2 dt e^{-t}$	$\mathrm{I}_3 = \int_o^A dx \sin^2(5x)$

12.3.1c **Einheitenkontrolle**

(12.3.6) In vielen Fällen tragen die Terme, die im Integranden auftreten, eine physikalische Einheit wie Länge, Zeit oder Temperatur. Ist K die Einheit des Integranden f(x) und D die von x, dann hat das gesamte Integral $\int dx f(x)$ die Einheit DK, wie beispielsweise die Gleichheit mit $\overline{f} \cdot (b-a)$ zeigt.

!!Kurz: **dx erhält dieselbe Dimension wie x.** Auch die beiden Integrationsgrenzen haben diese Einheit.
(12.3.7) Hat man keine Einheit zur Verfügung, dann kann man den Termen u.U. willkürlich eine solche zuordnen. Dabei muss man manchmal künstlich äußere Parameter in den Integranden einführen.

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \qquad \text{wird ersetzt durch} \qquad \int_{2h}^{5h} \frac{dx}{x^2+h^2}$$

Jetzt kann man x und h eine gemeinsame Einheit, etwa m, zuordnen. Das Integral hat dann die Einheit m^{-1}.
(12.3.8) Jeder Summand des resultierenden Integrales $\int_a^b dx f(x)$ muss dann dieselbe Dimension KD (wie das Integral) haben! Ist F eine Stammfunktion von f, dann hat F auch die Einheit KD. Mit Hilfe dieses Sachverhaltes, kann man häufig Rechenfehler aufdecken, teilweise das Resultat auch besser interpretieren.

☐ Wir betrachten das Integral I(a,T)=$\int_0^T dt\, e^{-at}$. Wir geben t und damit auch T die Einheit der Zeit. Auch I hat diese Einheit. Dann hat a notwendig die Einheit der reziproken Zeit, weil die Größe at einheitenfrei sein muss. Welche der nachfolgenden Rechenausdrücke sind dann als Summanden für I(a,T) sicherlich zu verwerfen, welche sind akzeptabel?

$\frac{1}{a}e^{-aT}$	$\frac{1}{a}e^{-at} - 1$	$\mathrm{T}(\mathrm{e}^{-aT} - 1)$	$\mathrm{Te}^{-a} + a$

☐ $(a+b)^n = ...$ a und b haben dieselbe Einheit. Was lässt sich über die Einheit der Summanden sagen, die im Binomialssatz auftreten?

12.3.2 **Direkte Integration**
12.3.2a **Kenntnis einer Stammfunktion**

Gewisse Stammfunktionen sollte man auswendig wissen. Wir geben zunächst eine Liste, die über eine Zusammenstellung bekannter elementarer Ableitungen folgt. Anschließend besprechen wir eine Reihe von Verfahren, wie man sich mit Hilfe dieser bekannten Stammfunktionen in weiteren Fällen Stammfunktionen verschafft. Alle diese Verfahren fassen wir unter dem Titel "Direkte Integration" zusammen, weil man hier in allen Fällen direkt nach der Inspektion des Integrales eine Stammfunktion angeben kann und sollte.

(12.3.9) Die Liste der wichtigsten Stammfunktionen

f(x)	$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{x}$	cosx	sinx	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
F(x)	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	sinx	-cosx	e^x	atn(x)	asn(x)

Einige Bemerkungen zu dieser Liste:

- Stammfunktion zu x^{-3} ist $-\frac{1}{2}x^{-2}$. Vielfach findet man stattdessen fehlerhaft die Potenz x^{-4}. Bei negativem a verkleinert sich der Absolutwert. (Daher die Stammfunktion zur Probe möglichst differenzieren!)
- Ein anderes wichtiges Beispiel: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dx x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
- 1/x ist eine ungerade Funktion. Dann gibt es dazu eine gerade Stammfunktion und das ist $\ln|x|$ .Man sollte die Betragsstriche immer erst fortlassen, wenn man sich vergewissert hat, dass im Integrationsbereich nur positive Werte vorkommen. Etwa $\ln\left|1+x^2\right| = \ln(1+x^2)$. Über Null darf hier nie integriert werden.
- Denken sie an das Minuszeichen bei $\int dx \sin x = -\cos x$.
- $\int dx \frac{1}{1+x^2} = atn(x)$ ist eine sehr nützliche und vielfach benötigte Stammfunktion.

(12.3.10) Die Stammfunktionen der Liste sind alle über bekannte Ableitungen gewonnen. Das verallgemeinert sich zu der folgenden einfachen, aber nützlichen

Kontrollmethode:

Eine gewonnene Stammfunktion sollte zur Kontrolle differenziert werden.

☐ Sie suchen eine Stammfunktion von $x^{-\frac{7}{2}}$. Sie raten "Faktor$\times x^{-\frac{5}{2}}$". Bestimmen Sie den Faktor über eine Ableitungsprobe. Jemand anders gibt $\frac{2}{9}x^{-\frac{9}{2}}$ an. Wieso ist das falsch?

12.3.2b **Die " 1/α-Regel"**

Mit Hilfe geeigneter Verfahren lässt sich aus der Liste bekannter (=gewußter) Stammfunktionen eine Vielzahl weiterer Stammfunktionen gewinnen. Man muss jeweils nur erkennen, wahrnehmen, dass der Integrand eine bestimmte Struktur besitzt.

(12.3.11) Wir haben bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass physikalische Größen in der Regel Einheiten besitzen, wogegen die Argumente der mathematischen Funktionen einheitenfrei sind. Etwa (9.3.28). Als Konsequenz hat man es meist mit Zuordnungen wie $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$oder $x \mapsto e^{-\alpha x+\beta}$ zu tun anstatt von $x \mapsto \sin(x)$ usw. Was ist, wenn man eine derartige Funktion integrieren will? Nun, beim Ableiten erhält man einen zusätzlichen Faktor α. Und den muss man beim Integrieren wieder beseitigen, was aber infolge der Linearität leicht möglich ist.

⇒	**Die "1/α-Regel"** Gesucht wird eine Stammfunktion für $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ mit $\alpha \neq 0$. Man kenne eine Stammfunktion $y \mapsto F(y)$ zu $y \mapsto f(y)$.
!!	**Dann ist** $x \mapsto \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$ eine Stammfunktion der gesuchten Zuordnung. Als Formel: $\int dx f(\alpha x+\beta)=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$.

Der Beweis folgt sofort durch Ableiten. Als Verlaufsdiagramm:

$x \mapsto$	$\alpha x+\beta$		$\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$	$\int dx f(\alpha x+\beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$
	y	$\mapsto$	$\frac{1}{\alpha}F(y)$	
α		$\frac{1}{\alpha}F'(y)$		

(12.3.12) Die $1/\alpha$-Regel ist ausgesprochen nützlich, da sie in einer Vielzahl von Fällen eine sehr effiziente Integration erlaubt. Bemerkt man die angegebene Struktur, dann schreibt man den Faktor $\frac{1}{\alpha}$ hin und dazu die bekannte Stammfunktion mit dem neuen Argument! Wir illustrieren das Vorgehen an einer Reihe von Beispielen.

(12.3.13) $\boxed{\mathrm{I}_1 = \int_0^1 dx(3-2x)^7.}$ Hier ist $\alpha = -2$.Es folgt $\mathrm{I}_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left[(3-2x)^8\right]_0^! = \frac{1}{16}(3^8-1)$.

(12.3.14) $\boxed{\mathbf{I}_2 = \int_0^3 \frac{dx}{5+x}}= [\ln|5+x|]_0^5 = ...$ Hier ist $\alpha = 1$.

$\boxed{\mathbf{I}_2 = \int_6^{10} \frac{dx}{5-x}} = -[\ln|5-x|]_6^{10} = -(\ln(5)-\ln(1)) = -\ln(5) = -1.6$. Hier ist $\alpha = -1$. Dieses Vorzeichen nicht vergessen! Im Definitionsbereich gilt -1$\leq x \leq -\frac{1}{5}$. Das gibt die Abschätzung $-5 \leq I_2 \leq -1$.

(12.3.15) $\boxed{\mathbf{I}_3 = \int dt\, 3\cos(\omega t+\varphi)} = \frac{3}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$.

(12.3.16) $\boxed{\mathbf{I}_4 = \int_0^A dte^{-3t+2}} = -\frac{1}{3}\left[e^{-3t+2}\right]_0^A = \frac{1}{3}e^2\left(1-e^{-At}\right)$.

(12.3.17) $\boxed{\mathbf{I}_5 = \int \frac{dt}{1+4t^2}} = \int \frac{dt}{1+(2t)^2} = \frac{1}{2}atn(2t)$

12.3.2c **Die Umkehrung der Kettenregel**

(12.3.18) Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der $1/\alpha$ – Regel. Wie der Name bereits andeutet, erhält man diese Regel, indem man die Kettenregel umgekehrt liest. Betrachten wir noch einmal das zugehörige Verlaufsschema, wobei wir $f(x) = F'(x)$ setzen.

x	$\overset{g}{\mapsto}$	g(x)	$\mapsto$	F(g(x))
		y	$\overset{F}{\mapsto}$	F(y)
x	$\mapsto$		g$'(x)f(g(x)$	

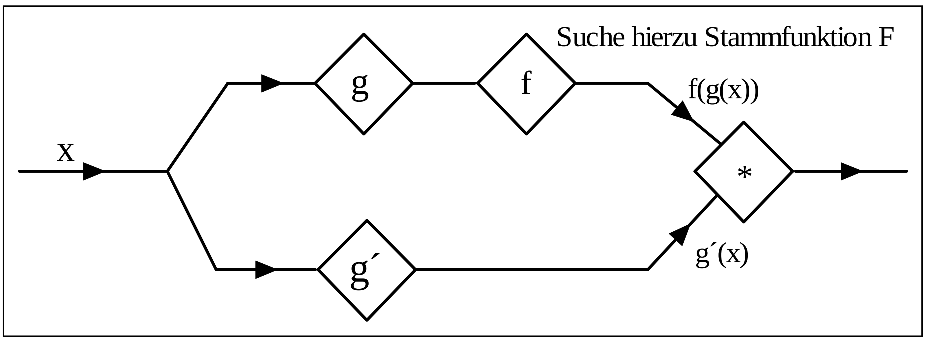
(12.3.19) Von oben nach unten gelesen ergibt sich die Kettenregel. Startet man dagegen mit der unteren Zeile, dann liefert die obere ein zugehörige Stammfunktion. Das gibt folgende Integrationsregel

	Die **Umkehrung der Kettenregel**
$\Rightarrow$	Der Integrand haben die Form $g'(x)f(g(x)$
$\Rightarrow$	Weiter sei F(y) Stammfunktion zu f(y).
!!!	**Dann** ist F(g(x)) Stamfunktion zu g$'(x)f(g(x)$
	$\int dx$ g$'(x)f(g(x)) = F(g(x))$.

Oder auch (vgl. (12.1.42)):

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{dxg}'(\mathrm{x})\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \int_a^b \mathrm{dx}\frac{d}{dx}\mathrm{F}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \mathrm{F}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))\Big|_a^b.}$$

Wieder liegt eine Ausweitung der direkten Integration vor. Hat der Integrand die gegebene Struktur, die man sich am besten als Verlaufsdiagramm einprägt, dann benötigt man nur eine Stammfunktion F zu f.



(12.3.20) Nochmals**:**Wie hat der Integrand auszusehen? Es muss ein Produkt vorliegen, bei dem der eine Faktor $g'(x)$ - wir werden ihn den *kleinen Faktor* nennen - die Ableitung von dem ist, was x im anderen

großen Faktor (im Verlaufsdiagramm) zuerst erlebt. Nur das, was x anschließend an g im großen Faktor erlebt, ist zu integrieren!
(12.3.21) Ein Beispiel

$$\int_0^1 dx\,(2x)(1+x^2)^5 = \frac{1}{6}(1+x^2)^6|_0^1 = \frac{1}{6}\left(2^6-1\right)$$

(12.3.22) Fehlt ein **konstanter Faktor**, so macht das wegen der Linearität nichts. Man erweitert einfach mit ihm. Das nächste Beispiel zeigt das Vorgehen:

$$\int_0^1 dx\,(x^2)(1+x^3)^5 = \frac{1}{\mathbf{3}}\int_0^1 dx\,(\mathbf{3}x^2)(1+x^3)^5 = \frac{1}{3}.....$$

Vielfach lässt man beim ersten Hinschreiben an den entsprechenden Stellen Platz, um dann dort den fehlenden Faktor einzufügen:

$$\begin{aligned} I(a,A) &= ....\int_o^A dt(...t)e^{-3at^2} = \frac{1}{-6a}\int_o^A dt(-6at)e^{-3at^2} \\ &= \frac{1}{-6a}\left[e^{-3at^2}\right]_0^A = ... \end{aligned}$$

(12.3.23) Im großen Faktor geht man immer so weit, wie der kleine Faktor die zugehörige Ableitung liefert! Das nächste Beispiel zeigt, wie das gemeint ist:

$$\int_0^1 dx\,(x^2)(1+7x^3)^5 = \frac{1}{21}\int_0^1 dx\,(21x^2)(1+7x^3)^5 = \frac{1}{21}....$$

Also nicht etwa g(x)=x^3 setzen, sondern $g(x) = 1+7x^3$ mit $g'(x) = 21x^2$. Das verbleibende f ist dann einfacher zu integrieren.
(12.3.24) Ein anderes Beispiel geht wie folgt:

$$\int dt\ \tan(t) = \int dt\,\frac{\sin t}{\cos t} = \ln|\cos t|\,.$$

(12.3.25) Weitere Beispiele, wobei wir immer nur bis zum Auffinden einer Stammfunktion rechnen:
$\int \frac{du\cos(u)}{1+\sin^2(u)} = atn(\sin(u))$
$\int dt \frac{e^{at}}{(2+e^{at})^3} = \frac{1}{a}\int dt \frac{ae^{at}}{(2+e^{at})^3} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{(2+e^{at})^2}\right]$
$\int \frac{dx}{x}\ln(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ (mit g(x)=ln(x) und f(y)=y!)
$\int dx\, x\sqrt{1-2x^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}$.

☐ $\int dx \frac{2x+3}{(x^2+3x-5)^5} = ...$ $\int dt \frac{ax+b}{(ax^2+2bx+c)^3} = ...$ $\int du \frac{u}{1+u^4} = ..$
☐ Wieso ist die $1/\alpha$-Regel ein Spezialfall?

12.3.4 Umformungen des Rechenausdrucks

*Häufig kann man Stammfunktionen finden, indem man den Rechenausdruck des Integranden umformt. Hier gibt es einmal gewisse **fallspezifische** Tricks und zum anderen eine Reihe von Methoden, die man in bestimmten Fällen systematische Anwendung erlaubt. Wir beginnen mit einigen Beispielen für spezielle Tricks, die aber gut zeigen, wie wirksam eine Umformung des Rechenausdrucks sein kann. Die Umformung läuft meist darauf hinaus, dass den umgeformten Integranden direkt integrabel zu machen. Anschließend entwickeln wir drei allgemeinen Methoden, die auf derartigen Umformungen basieren.*

12.3.4a Beispiele von Umformungen

(12.3.26) Im Falle von trigonometrischen Funktionen sollte man immer nach Umformungen suchen, die aus den Additionstheoremen (8.2.31) folgen. Die Beherrschung des folgenden Integrales ist wichtig, da es häufig benötigt wird.

Das Additionstheorem für cos gibt cos(2t)=$\cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int dt\, \sin^2 t &= \frac{1}{2}\int dt\,(1-\cos(2t)) \\ &= \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin(2t)) = \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)\end{aligned}$$

Dabei wurde auch die $1/\alpha$-Regel benutzt. Durch Differenzieren bestätigt man leicht, dass tatsächlich eine Stammfunktion vorliegt.

☐ Berechnen Sie $\int dt \cos^2 t$.

(12.3.27) Ein anderes Beispiel.

$$\int dt\, \sin^3 t = \int dt\, \sin t \cdot \sin^2 t = \int dt\, \sin t \cdot (1 - \cos^2 t) = \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t.$$

Hier wird die Umformung offensichtlich dadurch motiviert, dass man die Umkehrung der Kettenregel anwenden möchte. (Benötigt wird dann nur das leichte Integral $\int dy(1-y^2)$.)

☐ $\int dt\ \cos^4 t = ...$

(12.3.28) Häufig ist **quadratische Ergänzung** hilfreich.

$$\int \frac{du}{u^2+6u+15} = \int \frac{du}{(u+3)^2+6} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{(\frac{u+3}{\sqrt{6}})^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{6} atn(\frac{u+3}{\sqrt{6}}).$$

Über (12.3.9) kennen wir $\int dx/(x^2+1)$. Daher haben wir im zweiten Schritt gezielt die 6 im Nenner ausgeklammert um die benötigte 1 zu erhalten. Statt ax^2 ist dann $(\sqrt{a}x)^2$ zu schreiben, damit im letzten Schritt die $\frac{1}{\alpha}$−Regel angewandt werden kann, die das zusätzliche $\sqrt{6}$ ergibt.

☐ Beschreiben Sie kurz, welche Integrale mit der $1/\alpha$-Regel und quadratischer Ergänzung auf die Integration von $\frac{1}{1+x^2}$ zurückgeführt werden können.

(12.3.29) Sehr nützlich sind auch Umformungen der folgenden Art, die einem letztlich eine Polynomdivision ersparen.

$$\begin{aligned}\int dx \frac{x+3}{2x+5} &= \frac{1}{2}\int dx \frac{(2x+5)+1}{2x+5} = \frac{1}{2}\left(\int dx\, 1 + \int dx\, \frac{1}{2x+5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\ln|2x+5|\right)\end{aligned}$$

Der Integrand wird in eine Summe aufgespalten, für die jeder Summand einzeln direkt integrabel ist. Erneut arbeitet man dann mit der $1/\alpha$-Regel.

☐ Erproben Sie das an folgenden Beispielen

$$\int \frac{3x dx}{1-3x} \qquad \int \frac{x^2 dx}{1-x} \qquad \int \frac{x^2+5x}{x^2+1} \qquad \int \frac{x(x+2)}{2x^2+1}$$

☐ $\int dt \frac{1}{e^t+e^{-t}} = ...$ Erweitern Sie mit e^t!

Jetzt beschreiben wir drei allgemeine Methoden, mit deren Hilfe man systematisch gewisse Rechenausdrücke so umschreiben kann, dass die neue Form eine direkte Integration gestattet. Wir geben für jede dieser Methoden zunächst ein Beispiel, das wir dann später verallgemeinern. Neben der Beherrschung des Vorgehens kommt es zunächst immer darauf an, per Inspektion zu erkennen, dass das Verfahren anwendbar ist.

(12.3.30) Hauptnennerbildung liefert die folgende Gleichung

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

Die linke Seite lässt sich problemlos bezüglich x integrieren und ergibt eine Stammfunktion für die rechte Seite. Die Funktion der rechten Seite hätten wir mit den bisherigen Methoden nicht integrieren können. Die Umschreibung liefert ein neues Integral. Unter dem Stichwort "Partialbruchzerlegung" werden wir das verallgemeinern.
(12.3.31) Jetzt dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch (a-b) und finden

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right).$$

Diese Gleichung leiten wir partiell nach a ab:

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right) + \frac{1}{a-b}\frac{1}{(x-a)^2}$$

Erneut lässt sich die rechte Seite direkt bezüglich x integrieren, die linke dagegen mit den bisherigen Methoden nicht. Unter dem Stichwort "Ableiten nach einem Parameter" werden wir auch dies Beispiel verallgemeinern.
(12.3.32) Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich

$$x\cos x = \frac{d}{dx}(x\sin x) - 1\cdot\sin x.$$

Erneut lässt sich für die rechte Seite unmittelbar eine Stammfunktion angeben, für die linke dagegen noch nicht. Diese Umschreibung der Produktregel führt zur Methode der "partiellen Integration".

12.3.4c **Die Partialbruchzerlegung**

(12.3.32) Das zugehörige Einstiegsbeispiel bestand in der folgenden Umschreibung eines Rechenausdrucks, deren Gültigkeit man sofort durch Hauptnennerbildung der rechten Seite bestätigt:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right).$$

Dabei muss aber $a \neq b$ gelten. Für $a = -b \neq 0$ erhält man folgenden nützlichen Spezialfall:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

(Im Kopf unbedingt rechts Hauptenner bilden!)
(12.3.33) Für die linke Seite kennen wir bisher keine Stammfunktion. Für die rechte dagegen kann man leicht eine angeben. Die zweite Gleichung (a=-b) beispielsweise gibt

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

☐ $\int\frac{dx}{x^2-3x+2} = ...$
(12.3.34) Es erhebt sich die Frage nach der Verallgemeinerbarkeit des Resultates und nach einer Methode, derartige Umformungen des Rechenausdrucks systematisch zu finden.

? Sachlich geht es dabei immer darum, **das Verfahren der Hauptnennerbildung umzukehren**. Von rechts nach links hat man es mit einer Hauptnennerbildung zu tun. Aber wie kommt man vom Ergebnis links zu den einzelnen Summanden, den *Partialbrüchen*?

(12.3.35) Zunächst kann man mit dem obigen Beispiel etwas herumspielen und versuchen, es zu verallgemeinern. Dabei wird man jeweils mit der rechten Seite starten und dann die linke durch Hauptnennerbildung bestimmen. Man kann so untersuchen, welche linken Seiten man überhaupt erhält. Ein Beispiel:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} = \frac{(A_1+A_2)x - A_1b - A_2a}{(x-a)\,(x-b)} = \frac{Bx+C}{(x-a)\,(x-b)}$$

mit naheliegenden Hilfsgrößen B und C.

□ Zeigen Sie: Gibt man B und C als äußere Parameter vor, dann gibt es dazu immer genau ein Paar A_1, A_2,das obige Gleichung erfüllt, sofern a$\neq b$. D.h.: Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (a,b,B und C äußere Parameter)

$A_1 + A_2 = B$	$bA_1 + aA_2 = -C$

.

Zeigen Sie, dass es für $a \neq b$ immer eindeutig lösbar ist! Das bedeutet: Gibt man die rechte Seite vor, kann man die linke angeben und dann auch integrieren.

Durch Überlegungen dieser Art kommt man ziemlich leicht zu korrekten Vermutungen über die Ausdrücke die man mit Partialbruchzerlegung behandeln kann. **Aber man sollte nicht versuchen, daraus einen Beweis zu entwickeln.** Ebensowenig sollte man versuchen, die benötigten Koeffiziente A_1 und A_2 auf diese Weise zu bestimmen, wie es leider vielfach geschieht. (Wir verzichten hier darauf, zu beweisen, dass die Partialbruchzerlegung immer existiert. Der Beweis lässt sich relativ leicht führen, wenn man unser Konstruktionsverfahren durch einige einfache Rsultate der Analysis ergänzt.)

Wir geben nachfolgend ein effizientes Rechenschema zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung und kommentieren es anschließend. In der Literatur findet man meist Verfahren, die weitaus aufwendiger sind.

(12.3.36) Das Partialbruchschema

■ **Das Ausgangsszenenbild:**

- Gegeben eine rationale Funktion r(x)=$\frac{P(x)}{q(x)}$, für die eine Stammfunktion gesucht wird.
- Durch Polynomdivision kann man erreichen, dass der Zählergrad kleiner als der Nennergrad wird. D.h. man kann ein Polynom A(x) abspalten mit

$$r(x) = A(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei p jetzt einen kleineren Grad als q hat. Vielfach gelingt das bereits durch geschicktes Umschreiben des Nenners.

■ **Die Bestimmung der Partialbruchzerlegung:** Der Grad von p sei kleiner als der von q. Die Bestimmung erfolgt in drei Schritten, die wir *Faktorisierung, Ansatz und Koeffizientenbestimmung* nennen.

- **Faktorisierung des Nenners:** Der Nenner q(x) ist reell zu faktorisieren! Reelle Nullstellen treten als Faktoren (x-a) auf und komplexe paarweise als Faktoren $((x-u)^2+v^2) = (x-(u+iv))(x-(u-iv))$. Gleiche Faktoren sind zusammenzufassen zu einem einzigen Faktor (x-a)^k bzw. $((x-u)^2+v^2)^\ell$. Dass sich das Polynom stets so faktorisieren lässt, werden wir später begründen. Praktisch ist diese Faktorisierung teilweise schwierig herzustellen.
- Ist q auf diese Weise faktorisiert, kann man den **Partialbruchansatz** (mit noch zu bestimmenden Koeffizienten) machen. Dieser sollte wie folgt aussehen:
  - Zu jedem Faktor (x-a)^k des Nenners q(x) ist ein Summand hinzuschreiben, der für die ersten k wie folgt aussieht:

$(x-a)^1$	$(x-a)^2$	$(x-a)^3$	usw.
$\frac{A_0}{x-a}$	$\frac{A_0+A_1(x-a)}{(x-a)^2}$	$\frac{A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2}{(x-a)^3}$	usw.

  - Entsprechend ist zu jedem Faktor $((x-u)^2+v^2)^\ell$ ein Summand hinzuschreiben, der für die ersten ℓ wie folgt anzusetzen ist:

$((x-u)^2+v^2)^1$	$((x-u)^2+v^2)^2$	usw.	
$\frac{A_0(x-u)+B_0}{((x-u)^2+v^2)}$	$\frac{(A_0(x-u)+B_0)+(A_1(x-u)+B_1)((x-u)^2+v^2)}{((x-u)^2+v^2)^2}$		

Die Bildung der Summanden ist leicht zu merken, wenn man die folgenden beiden Sachverhalte beachtet:

    * Der Zählergrad ist immer um Eins geringer als der Nennergrad,
    * Die Variable x sollte auch im Zähler immer in der Kombination x-a bzw. x-u auftreten, wie sie vom Nennerfaktor vorgegeben wird.

- **Die Koeffizientenbestimmung** (alle A_i, B_i gesucht!)**.** Hierzu geht man wie folgt vor:

  – Für jedes Nennerprodukt $(x-a)^k$ multipliziere man beide Seiten der Ansatzgleichung mit $(x-a)^k$ und kürze soweit möglich. Das ergibt eine Gleichung G_a. Dann setze man in G_a für x den Wert a ein! Das gibt sofort den Koeffizienten A_0. Ist k=1, so ist der zugehörige Partialbruch bestimmt.

  – Ist k≥1 differenziere man G_a nach x. Ergebnis $G_a^{(1)}$.**Dann** in $G_a^{(1)}$ für x den Wert a einsetzen.. Das gibt A_1.

  – Usw. ($G_a^{(1)}$ differenzieren. Gibt $G_a^{(2)}$....)

  – Für jeden Nennerfaktor $((x-u)^2+v^2)^\ell$ multipliziere man mit $((x-u)^2+v^2)^\ell$ und kürze soweit möglich. Das gibt eine Gleichung G_{uv}. In diese setze man für x die komplexe Nullstelle $x_0 = u+iv$ ein. Es entsteht eine Gleichung zwischen komplexen Zahlen, aus der man A_0 **und** B_0 abliest.

  – Ist $\ell > 1$, ist G_{uv} nach x zu differenzieren und dann für x die Nullstelle u+iv einsetzen.

  – Usw.

■ **Die Integration**:
(12.3.37) Am Ende ist die gesamte Partialbruchzerlegung bestimmt (Alle A_i und B_i) sin d berechnent). Alle Summanden lassen sich einzeln integrieren, d.h. wir kennen eine zugehörige Stammfunktion. Dabei ist es besonders vorteilhaft, dass x immer als x-a bzw. x-u vorkommt, also als innere Ableitung der Nennerpotenzen. Die Integrierbarkeit aller Beiträge, die im Fall komplexer Nullstellen auftreten, werden wir mit Hilfe der Methode der Ableitumg nach einem Parameter zeigen. Denn für die Terme, die bei mehrfachen komplexen Nullstellen ($\ell > 1$) auftreten, können wir bisher noch kein Stammfunktion angeben.
(12.3.38) Damit ist natürlich nicht bewiesen, dass dies Verfahren immer funktioniert. Die Bedingung für das Funktionieren ist, dass **alle gleichen Nullstellen zusammengefasst** sind. (Den Beweis überlassen wir - wie bereits angedeutet - der Analysis) Sind alle Nullstellen einfach, so ist die Bestimmung der Koeffizienten offensichtlich besonders einfach, sie können meist einfach im Kopf berechnet werden. Die zweite Lücke liegt im Bereich der Faktorisierung des Nenners: Kann man eventuelle komplexe Nullstellen immer in der angegebenen Weise zusammenfassen? Wir werden das unten in einer Ergänzung zeigen.
Beispiele:
(12.3.38) Wir gehen einige Beispiele zunehmender Komplexität durch. Wir setzen die Beispiele etwas allgemeiner an, als üblich, indem wir für den Zähler vielfach allgemeine Polynome (zulässigen Grades) wählen. Generell sei nachfolgend $p_k(x)$ immer ein Polynom vom Grade k.
(12.3.39) Meist schreiben wir nacheinander die zu zerlegende rationale Funktion, den Ansatz und dann das Resultat hin. Der Nenner sei von vornherein faktorisiert. Großbuchstaben bezeichnen zu bestimmende Koeffizienten des Ansatzes. Kleine Buchstaben vom Anfang des Alphabets sind äußere Parameter. Vergleichen Sie immer mit den Schritten des allgemeinen Schemas!
(12.3.40) Beispiel 1: *Zwei einfache reelle Nullstellen.* Ansatz und Ergebnis:

$$\boxed{\tfrac{p_1(x)}{(x-a)(x-b)} = \tfrac{A}{x-a} + \tfrac{B}{x-b} = \tfrac{1}{a-b}\left(\tfrac{p_1(a)}{x-a} - \tfrac{p_1(b)}{x-b}\right).}$$

Wie erhält man etwa A? Also den Ausdruck rechts? Multiplikation (der Gleichung links) mit x-a gibt die Gleichung

$$\frac{p_1(x)}{x-b} = A + (x-a)\frac{p_1(x)}{x-b}.$$

Setzt man hierin x=a, so folgt A zu A=$\frac{p_1(a)}{a-b}$ wie angegeben. Beachten Sie: Der zweite Summand rechts gibt für x=a Null! Multipliziert man mit x-b und setzt dann x=b, so folgt entsprechend B. Die Rechnung lässt sich problemlos im Kopf oder einem Hilfszettel ausführen.
Inspektion des Resultates:

1. a=b gibt für A und B Probleme. Die Nullstellen müssen verschieden sein.

2. Vertauscht man links a und b, so ändert sich die Ausgangsfunktion nicht. Dasselbe ist rechts der Fall, da sich zwei Vorzeichen kompensieren. Üblicherweise wählt man a>b.
3. Die Einheit von A und B ist die von 1/x mal der von p(x).
4. b+a=0 gibt den Nenner $x^2 - a^2$.

(12.3.41) Beispiel 2: *Eine doppelte Nullstelle.* Die erste Zeile enthält den Ansatz.

$$\begin{aligned}\frac{p_2(x)}{(x-a)(x-b)^2} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B_1(x-b)+B_2}{(x-b)^2} \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{p_2(a)}{x-a} - \frac{p_2(b)-p_2'(b)(b-a)}{x-b} + \frac{p_2(b)(b-a)}{(x-b)^2}\right).\end{aligned}$$

A und B_2 erhält man erneut unmittelbar und problemlos wie in (12.3.40). B_2 liefert den dritten angegebenen Partialbruch. B_1 folgt, indem man nach Multiplikation mit $(x-b)^2$ nach x differenziert. Auszuführen ist das **nur** für die linke Seite der entstehenden Gleichung:

$$\frac{p_2(x)}{x-a} = (x-b)^2 \cdot \frac{A}{x-a} + B_1(x-b) + B_2.$$

Leitet man den ersten Summanden rechts nach der Produktregel ab, bleibt immer noch mindestens ein Faktor (x-b), der diesen Beitrag beim nächsten Schritt zum Verschwinden bringt. B_2verschwindet beim Ableiten und aus $B_1(x-b)$ wird B_1.**Und das bleibt stehen, wenn man x=b setzt.** Also

$$\frac{p_2'(x)(x-a) - p_2(x)\cdot 1}{(x-a)^2} = (x-b)\,[..] + B_1.$$

Jetzt folgt für x=b der Koeffizient B_1 wie angegeben.
Inspektion des Resultates:

1. a=b geht nicht. Einheitenkontrolle ist stimmig.
2. $p_2(x) = x - b$. Das gibt für die linke Seite das erste Beispiel. Damit wird $p_2(b) = 0$. Auch rechts steht somit das alte Resultat.

(12.3.42) Beispiel 3: *Zwei doppelte reelle Nullstellen.* Das gibt:

$$\begin{aligned}\frac{p_3(x)}{(x-a)^2(x-b)^2} &= \frac{A_1(x-a)+A_0}{(x-a)^2} + \frac{B_1(x-b)+B_0}{(x-b)^2} \\ &= \frac{1}{(b-a)^3}\{\frac{2p_3(a)+p_3'(a)(b-a)}{(x-a)} + \frac{p_3(a)(b-a)}{(x-a)^2} + \\ &\quad + \frac{-2p_3(b)+p_3'(b)(b-a)}{x-b} + \frac{p_3(b)(b-a)}{(x-b)^2}\}\end{aligned}$$

Beachten Sie, auf welche Weise auf der rechten Seite die Symmetrie beim Vertauschen von a und b gesichert wird.
(12.3.43) Beispiel 4: *Eine reelle Nullstelle und ein Paar komplexer.*
Also:

$$\frac{p_2(x)}{(x-a)((x-u)^2+v^2)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1(x-u)+B_0}{(x-u)^2+v^2}$$

A folgt wie üblich. Für B_1und B_0 gibt das Verfahren die folgende Gleichung, wobei für x bereits die Nullstelle u+iv eingesetzt ist:

$$\frac{p_2(u+iv)}{u+iv-a} = B_1(iv) + B_0.$$

Wir nehmen an, dass p_2 reelles Polynom ist (keine komplexen Koeffizienten!). Dann ist $p_2(u+iv)=p_r + ip_i$ mit $p_r = \frac{1}{2}(p_2(u+iv) + \bar{p}_2(u+iv))$ und $p_i = \frac{1}{2i}(p_2(u+iv) - \bar{p}_2(u+iv))$.
Dann folgt nach (6.3.41):

$$\frac{p_2(u+iv)}{u+iv-a} = \frac{(p_r+ip_i)((u-a)+iv)}{(u-a)^2+v^2} = \frac{p_r(u-a)-p_iv}{(u-a)^2+v^2} + i\frac{p_i(u-a)+p_rv}{(u-a)^2+v^2}$$

Also:

$$\mathrm{A}=\frac{p_2(a)}{(a-u)^2+v^2} \quad \mathrm{B}_0 = \frac{p_r(u-a)-p_iv}{(u-a)^2+v^2} \quad \mathrm{B}_1 = \frac{1}{v}\frac{p_i(u-a)+p_rv}{(u-a)^2+v^2} \quad .$$

Jeder der entstehende Partialbrüche ist direkt integrabel.

(6.3.44) Beispiel 5: *Zwei Paare komplexer Nullstellen.*

Hier betrachten wir r(x)=$\frac{1}{x^4+1}$. Wir bestimmen die vier komplexen Nullstellen $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{4}k\right)}$ von x^4+1 (vgl. (6.3.42)) und multiplizieren die beiden Paare zueinander konjugiert komplexer Linearfaktoren aus. Das gibt folgende Faktorisierung, die wir auch leicht direkt verifizieren können:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}.$$

Damit finden wir den Partialbruchansatz

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{A_1(x+\frac{1}{\sqrt{2}})+A_0}{((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})} + \frac{B_1(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+B_0}{((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}.$$

Jetzt läuft das Schema wie üblich weiter. Für x$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt

$$\frac{1}{(-\sqrt{2}+\frac{i}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} = A_1(\frac{i}{\sqrt{2}}) + A_0.$$

Und das gibt:

$$A_0 = \frac{1}{4} \quad . \ \mathrm{A}_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Entsprechend folgt:

$$B_0 = \frac{1}{4} \ . \ \mathrm{B}_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Insgesamt folgt die gesuchte Partialbruchzerlegung:

$$\boxed{\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}(x+\frac{1}{\sqrt{2}})+1}{((x+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4}\frac{-\sqrt{2}(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+1}{((x-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\frac{1}{2})}}$$

Die rechte Seite lässt sich problemlos mit Umkehrung Kettenregel integrieren!

(6.3.45) Natürlich kann und muss man die Parialbruchmethode auch mit anderen Integrationsmethoden kombinieren. Im nächsten Beispiel kombinieren wir sie mit der Umkehrung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx \sin x \cos x}{4-e^2\cos^2 x} &= -\frac{1}{2e}\int_0^\pi dx(-\sin x)\left(\frac{1}{2-e\cos x} - \frac{1}{2+e\cos x}\right) \\ &= -\frac{1}{2e}\left[-\ln|2-e\cos x| - \ln|2+e\cos x|\right]_0^\pi = ... \end{aligned}$$

(6.3.46) Zuletzt noch ein Beispiel mit mehrfacher komplexer Nullstelle

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u^4-1)^2} &= \int \frac{du}{(u^2+1)^2(u+1)^2(u-1)^2} \\ &= \frac{1}{16}\frac{1+3(u+1)}{(u+1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1-3(u-1)}{(u-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1+(u^2+1)}{(u^2+1)^2} \end{aligned}$$

Der Rechenweg sollte klar sei. Aber im dritten Summanden ist der Term $\frac{1}{(u^2+1)^2}$ enthalten, für den wir noch keine Stammfunktion kennen.

(12.3.47) Wir abstrahieren aus unseren Beispielen jetzt eine weitere wichtige und leider vielfach zu wenig beachtete **Kontrollmethode:**

Suche nach einem Spezialfall - etwa einem speziellem Wert eines äußeren Parameters - für den man das Integral kennt oder relativ leicht unabhängig berechnen kann. **Stimmt das eigene Resultat für diesen Spezialfall?**

12.3.4d Ergänzung: **Einige Eigenschaften der Nullstellen von Polynomen**

(12.3.48) Wir haben bei der Besprechung der komplexen Zahlen angeben, dass jedes Polynom vom Grade n auch n u.U. mehrfache Nullstellen besitzt. Man kann es daher immer als Produkt von Linearfaktoren schreiben, analog zum Fall n=2, für den ja wie in Kap. 1.5.2 beschrieben galt:.

$$A(x^2 + px + q) = A(x - x_1)(x - x_2).$$

Aber die Nullstellen könne komplex sein. So gilt $x^2+1 = (x+i)(x-i)$. Und für solche komplexen Nullstellen haben wir bei der Partialbruchzerlegung eine andere Darstellung benutzt, was wir jetzt rechtfertigen wollen.

Sei also $x \mapsto p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ein Polynom vom Grade n mit $a_n \neq 0$. Weiter sollen alle Koeffizienten a_k reell sein. Das ist für das Folgende wichtig! Sind alle n- Nullstellen von p reell, haben wir nichts zu beweisen. Also nehmen wir an, dass $z = u + iv$ ein komplexe Nullstelle mit $v \neq 0$ ist. D.h. aber $z \mapsto p(z) = 0$. Oder auch: z ist Lösung der Gleichung p(x)=0.

Wir behaupten, dass auch $\bar{z} = u - iv$, wo $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl ist, eine Nullstelle von p ist, dass also $p(\bar{z}) = 0$ gilt. Da wegen $v \neq 0$ aber $z \neq \bar{z}$ ist, ist das eine andere neue Nullstelle.

Im Falle n=2 ist dies ein Sachverhalt, der sofort aus der p-q-Formel folgt. Ist $q>p^2/4$,dann folgt $z_1 = u+iv$ und $z_2 = u - iv$ mit $u = -\frac{p}{2}$ und $v=\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$. Und diese beiden Zahlen sind zueinander konjugiert. Aber gilt das auch für Polynome beliebigen Grades?

Wieso ist $\bar{z}$ auch Nullstelle, wenn z eine ist. In (6.3.48) hatten wir nach einem Satz von Grundregeln für die komplexe Konjugation gefragt. Diese benötigen wir jetzt.Wir geben folgende Regeln an, die man leicht beweist:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$	$(z=\bar{z}) \Leftrightarrow$ (z ist reell)

Diese Regeln wenden wir jetzt auf die gültige Gleichung p(z)=0 an. zunächst folgt $\overline{p(z)} = 0$. Für die linke Seite geben unsere Regeln: :

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + ... + \overline{a_n z^n} \\ &= a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z^n} \\ &= a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \left(\overline{z}\right)^n = p(\overline{z}). \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir $\overline{a_k} = a_k$ benutzt haben und auch benötigen. Damit ist aber $p(\overline{z}) = 0$ eine gültige Gleichung und das heißt, dass auch $\overline{z}$ ein Nullstele von p ist. Somit enthält p die beiden Linearfaktoren (x-z) und x- $\overline{z}$.Deren Produkt gibt aber:

$$(x - (u + iv))(x - (u - iv)) = (x - u)^2 + v^2.$$

Und das ist genau der Faktor, den wir im Zsammenhang mit der Partialbruchentwicklung behauptet haben.

Dividiert man diesen Faktor mit Hilfe von Polynomdivision heraus, so erhält man ein Polynom vom Grade n-2, bei dem man erneut nach einer komplexen Nullstelle suchen kann. Nach endlich vielen Schritten hat man so alle Nullstellen erfasst und ist fertig. Die behauptete Faktorzerlegung existiert folglich immer.

12.3.4e **Partielle Integration**

Bei der Inspektion des Integranden in Hinblick auf Integrierbarkeit ist es wichtig, das Vorhandensein von Faktoren bestimmter Art wahrzunehmen. Über einen passenden Faktor erkennt man die Anwendbarkeit der Methode der Umkehrung der Kettenregel. Vielfach findet man aber auch störende, nicht passende Faktoren vor. Man könnte integrieren, wenn ein bestimmter Faktor nicht vorhanden wäre. Beispiele:

$$\int dx\, x\sin(x) \quad \int dt\, t^3 e^{-t^2} \quad \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \quad .$$

Im ersten Fall stört der Faktor x, im zweiten ein t^2 und im dritten das äußere Quadrat. Wir werden zwei Methoden entwickeln, die Faktoren beseitigen oder zumindest abändern.

(12.3.49) Die erste, jetzt zu besprechende Methode entsteht durch Integration der Produktregel. Integration dieser Ableitungsregel gibt:

$$\begin{aligned} (uv)'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ [u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b dx\ u'(x)v(x) + \int_a^b dx\ u(x)v'(x) \end{aligned}$$

Dabei haben wir links den Hauptsatz angewandt. Durch Umstellen erhält man

$$\boxed{\int_a^b dx\ u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b dx\ u'(x)v(x).}$$

Im Rahmen unserer Problematik ist das so zu interpretieren:

> Der Integrand besteht aus zwei Faktoren. Den "störenden" bezeichnen wir mit u(x). Dann ist das Integral gleich der rechten Seite, auf der noch eine Integration durchzuführen ist, aber im Integranden ist u(x) durch $u'(x)$ ersetzt. Der zweite Faktor ist allerdings auch abgeändert, durch eine Stammfunktion ersetzt.

Im ersten Beitrag ist nur der zweite Faktor durch eine Stammfunktion zu ersetzen, die dann im nachfolgenden Integral wieder auftaucht. Beachten Sie auch das Minus vor dem Integral.

(12.3.50) Unser erstes Beispiel aus der Einführung lässt sich mit diesem Verfahren unmittelbar rechnen:

$$\begin{aligned} \int_a^b dt \cdot t \cdot \sin(wt) &= \left[t \cdot \frac{(-1)}{w}\cos(wt)\right]_a^b - \int_a^b dt \cdot 1 \cdot \frac{-1}{w}\cos(wt) \\ &= \left[t \cdot \frac{(-1)}{w}\cos(wt)\right]_a^b + \left[\frac{1}{w^2}\sin(wt)\right]_a^b . \end{aligned}$$

Der Faktor t verschwindet (beim Ableiten für die Integration) einfach.

(12.3.51) Andere Faktoren wie ln(x) werden durch das Ableiten einfacher. Etwa

$$\int_1^A dt\ t\ln(t) = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_1^A - \int_1^A dt\frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{1}{t} = ...$$

Hier ist der störende Faktor der 2. Faktor ln(t). Er wird differenziert. (U.U. ist es günstig, die Rollen u und v′ an die Faktoren des Integranden anzuschreiben.

$$\boxed{\int_1^A dt \underset{u'}{t} \cdot \underset{v}{\ln(t)} = \left[\underset{u}{\tfrac{1}{2}t^2}\cdot\underset{v}{\ln(t)}\right]_1^A - \int_1^A dt\cdot\underset{u}{\tfrac{1}{2}t^2}\cdot\underset{v'}{\tfrac{1}{t}} = ...}$$

Wie immer sollte man nach der Rolle des Faktors sehen (stört er?), nicht einfach den ersten u′ setzen weil man es so aufsagt.

(12.3.52) Noch ein Beispiel, bei dem **nur** der störende Faktor vorhanden ist. Man weiss aber, dass er durch Ableitung vereinfacht wird. Dann kann man einfach eine 1 als zweiten Faktor einfügen.

$$\begin{aligned} \int_0^A dx\ atn(x) &= \int_0^A dx\ 1 \cdot \underset{v}{atn(x)} = [x \cdot atn(x)]_0^A - \int_0^A dx\ \frac{x}{1+x^2} \\ &= A \cdot atn(A) - \frac{1}{2}\ln\left|1 + A^2\right| \end{aligned}$$

Ableiten nach A bestätigt leicht, dass man tatsächlich eine Stammfunktion gefunden hat.

☐ Finden sie entsprechend eine Stammfunktion für ln(x) und für asn(x).

☐ Bestimmen Sie $\int dt$ te^{-t}.

12.3.4f **Ableiten nach einem Parameter**

(12.3.53) Die zweite angekündigte Methode, störende Faktoren im Integranden zu beseitigen oder zu vereinfachen, sieht wie folgt aus:

> Man startet mit einem Integranden f(x,a), der neben der Integrationsvariablen noch von einem äußeren Parameter a abhängt. Dann sucht man sich eine Stammfunktion g(x,a) bezüglich dieses Parameters. D.h. es gilt $\frac{\partial}{\partial a}g(x,a) = f(x,a)$. Damit rechnet man wie folgt:
>
> $$\int_A^B dx f(x,a) = \int_A^B dx \frac{\partial}{\partial a} g(x,a) = \frac{\partial}{\partial a}\int_A^B dx g(x,a).$$

Es gibt mathematische Sätze, die zeigen, dass unter üblichen Umstände das letzte Gleichheitszeichen korrekt ist: Man darf also zuerst integrieren und dann erst nach dem Parameter differenzieren. **In günstigen Fällen fehlt nun in g ein ursprünglich störender Faktor.** Er wird durch die Ableitung ersetzt, die aber erst nach der Integration erfolgt und ja eine reine Routineoperation ist. Auf die Sätze, die das Vertauschen rechtfertigen, gehen wir hier nicht ein.

(12.3.54) Ist übrigens G(x,a) Stammfunktion (in x) zu g(x,a), dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[G(x,a)\right]_A^B = \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(G(A,a) - G(B,a)\right)\right].$$

Man kann also wählen, ob man erst differenziert und dann die Grenzen einsetzt oder umgekehrt.

☐ Im folgenden Beispiel ist es nützlich, zuerst die Grenzen einzusetzen. Es sei a>0:

$$\int_0^\infty dt\, e^{-at}t^n = \left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)^n \int_0^\infty dt\, e^{-at} = \left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)^n \left[\frac{1}{-a}e^{-at}\right]_0^\infty = ...$$

Vervollständigen Sie die Rechnung.

(12.3.55) Ein Beispiel: Im Integranden $t^3e^{-at^2}$ stört ein Faktor t^2. Ohne ihn bietet sich die Umkehrung der Kettenregel an. Unsere Methode gibt

$$\begin{aligned}
\int_0^A dt t^3 e^{-at^2} &= -\int_0^A dt t \frac{\partial}{\partial a} e^{-at^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\int_0^A dt t e^{-at^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{(-2a)}e^{-at^2}\right]_0^A \\
&= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{2a}\left[1 - e^{-aA^2}\right] = \frac{1}{2a^2}\left[1 - e^{-aA^2}\right] - \frac{1}{2a}\left(+A^2e^{-aA^2}\right) \\
&= \frac{1}{2a^2}\left[1 - e^{-aA^2} + aA^2e^{-aA^2}\right]
\end{aligned}$$

Das Ableiten am Ende der Rechnung kann aufwendig sein, aber es lässt sich eben immer routinemäßig durchführen, wogegen man bei der Integration zunächst nicht weiter kommt.

(12.3.56) Ein anderes Beispiel eines häufig störenden Faktors ist ein Logarithmus. Die folgende Rechnung zeigt, wie man derartige Faktoren u.U. beseitigen kann.

$$\int dx\, x^a \ln(x) = \int dx\, e^{a\ln x}\ln x = \frac{\partial}{\partial a}\int dx\, e^{a\ln(x)} = \frac{\partial}{\partial a}\int dx\, x^a = \frac{\partial}{\partial a}\frac{x^{a+1}}{a+1}$$

(12.3.57) Manchmal fehlt der Parameter, nach dem man differenzieren könnte. Dann kann es sinnvoll sein, einen solchen künstlich einzuführen, also ein Integral mit einem zusätzliche äußeren Parameter zu behandeln und am Ende den benötigten speziellen Wert einzusetzen. (Das haben wir bereits in (12.3.7) vorgeschlagen, um eine eventuelle Einheitenkontrolle zu ermöglichen.) Das nächste Beispiel illustriert diese Strategie.

(12.3.58) Das Integral ist eines, das man noch für die Partialbruchmethode benötigt, das wir aber bisher noch nicht gelöst haben. Vgl. (6.3.46).

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \text{ . wird verallgemeinert zu } I(a) = \int \frac{dx}{(a+x^2)^2}$$

Offenbar ist I=I(1). In I fehlt ein Parameter, in I(a) ist er vorhanden. Wir setzen a>0 voraus. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} I(a) &= -\frac{\partial}{\partial a}\int \frac{dx}{a+x^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2} \\ &= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a}\cdot\sqrt{a}atn(\frac{x}{\sqrt{a}}) = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{a}}atn(\frac{x}{\sqrt{a}}). \end{aligned}$$

Ein Ableitunmgsoperator wie $\partial/\partial a$ wirkt vereinbarungsgemäß auf alles, was rechts von ihm steht. Soll dies nicht der Fall sein, muss man das durch Klammern besonders festlegen. Im Beispiel rechnen wir weiter und finden

$$\begin{aligned} I(a) &= +\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}atn(\frac{x}{\sqrt{a}}) + a^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}xa^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a}} \\ &= \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\left(atn(\frac{x}{\sqrt{a}}) + \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{a+x^2}\right). \end{aligned}$$

D.h. wir haben:

$$\boxed{\text{I=I(1)=}\frac{1}{2}\left(atn(x) + \frac{x}{1+x^2.}\right)}$$

Etwaige Zweifel werden durch eine Probe beseitigt. Ableiten gibt

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$$

☐ Was folgt, wenn man I(b^2) bildet?
☐ Was folgt durch Berechnung von $\frac{1}{-2b}\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dx}{x^2+b^2}$? Wieso ist das etwas günstiger?
☐ Diese Resultate kann man auch über partielle Integration erhalten. Versuchen Sie es einmal mit $\int dx\cdot 1\cdot\frac{1}{x^2+b^2}$

(12.3.59) Wir geben jetzt eine Liste von Gleichungen, bei der jeweils gewisse störende Faktoren (im Integranden) durch Ableitungen nach einem Parameter ersetzt werden:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{(f(x)+a)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\frac{1}{f(x)+a} \\ (\ln x)^k x^a = (\ln x)^k e^{a\ln x} = \frac{\partial^k}{\partial a^k}x^a \\ x^k e^{ax} = \frac{\partial^k}{\partial a^k}e^{ax} \\ x\sin(ax) = -\frac{\partial}{\partial a}\cos(ax) \\ \frac{t}{(at+b)^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{at+b} \\ \text{x}^3\sin(ax^2) = -\frac{\partial}{\partial a}x\cos(ax^2) \end{array}}$$

12.3.4g **Fallunterscheidungen**

(12.3.60) Vielfach erfordert die Integration eines Integranden mit äußeren Parametern Fallunterscheidungen. Als Beispiel betrachten wir das Integral

$$I(x;A,B) = \int dx\frac{1}{x^2+Ax+B}.$$

Hier wird man den Integranden zunächst durch quadratische Ergänzung umformen zu :

$$I(x;A,B) = \int\frac{dx}{(x+a)^2+b}$$

Und jetzt kommt es auf den Wert der Hilfsgröße b=b(A,B) an. Ist b=0, dann wird man direkt integrieren. Ist b<0 wird man Partialbruchzerlegung vornehmen und erhält zwei Logarithmen. Ist b>0, erhält man einen Arcustangens. Nehmen wir etwa den speziellen Fall a=0. Dann folgt:

$$\int \frac{dx}{x^2+b} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \text{ für b=0} \\ \frac{1}{2\sqrt{-b}} \left(\ln \left| x - \sqrt{-b} \right| - \ln \left| x + \sqrt{-b} \right| \right) \text{ für b<0} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} atn(\frac{x}{\sqrt{b}}) \text{ für b>0.} \end{cases}$$

☐ Machen Sie eine Einheitenkontrolle. Wieso ist es für b<0 wichtig, dass die Differenz, nicht aber die Summe der beiden Logarithmen auftritt? Wie gelangt man zum Fall $a \neq 0$?

(12.3.61) Zahlreiche Fallunterscheidungen bei Integrationsformeln entstehen analog durch einen quadratischen Term im Integranden, den man dann quadratisch ergänzt.

12.3.4h **Kreativität und Herumspielen**

(12.3.63) Wir wollen ein weiteres Beispiel dafür geben, dass Kreativität und Mathematik sich nicht ausschließen.
Wir wissen, dass gilt:

$$\int_{m_0}^{m_1} \frac{dx}{1+x^2} = atn(m_1) - atn(m_0) = \varphi_1 - \varphi_0.$$

Dabei ist $\tan(\varphi_1) = m_1$ und $\tan(\varphi_0) = m_0$.
Im Zusammenhang mit der Partialbruchzerlegung liegt folgende Frage nahe: **Wieso zerlegen wir $\frac{1}{1+x^2}$ nicht weiter in Partialbrüche?** Nach den bisherigen Erfahrungen mit komplexen Zahlen könnte das etwa Vernünftiges ergeben. Versuchen wir das einfach einmal. Auf jeden Fall gilt:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right\}$$

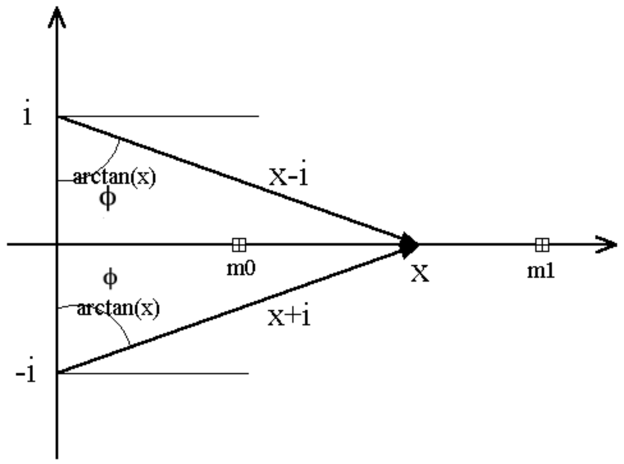
Können wir die rechte Seite integrieren? Wenn wir das versuchen, folgt

$$\int_{m_1}^{m_2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{x-i}{x+i} \right) |_{m_0}^{m_1}.$$

Dabei haben wir die Betragsstriche im Logarithmus fortgelassen, die die rechte Seite sofort zu Null machen würden, was offensichtlich unsinnig ist. Jetzt stellt sich die Frage: Was ist der Logarithmus einer komplexen Zahl? Da der Logarithmus sicher zur "Punktrechnung" zählt, sollte man mit der Polardarstellung arbeiten. (6.3.36). Dann liegt aber (nach den Rechenregeln für den Logarithmus) folgende Vermutung nahe:

$$\boxed{\ln(z)=\ln(re^{i\alpha})=\ln r+i\alpha}$$

Der Logarithmus macht aus einer polaren eine kartesische Darstellung, was vernünftig erscheint. Diese Beziehung werden wir verwenden.
Wir brauchen die Polardarstellung von $\frac{x-i}{x+i}$. Hierzu fertigen wir eine Skizze, in die wir alle unsere Größen eintragen. Dabei sehen wir, dass auch unsere beiden Winkel φ_1 und φ_0 bzw. der zu x gehörige Winkel $\varphi = atn(x)$ auftauchen.



Offenbar gilt:
x-i=R$e^{-i(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$
x+i=R$e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$
R=$\sqrt{1+x^2}$
$\frac{x-i}{x+i} = e^{i(-\pi+2\varphi)}$

Die Skizze zeigt, dass gilt

$$\frac{x-i}{x+i} = 1e^{-i(\pi-2\varphi)} \quad \text{also} \quad \ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = \ln(1) - i(\pi - 2\varphi) = i(2\varphi - \pi).$$

Gehen wir damit in unsere Integralformel ein, so folgt tatsächlich als Ergebnis $\varphi_1 - \varphi_2$ wie in der reellen Rechnung.
Das störende π können wir noch beseitigen, indem wir mit -1 multiplizieren, was daher der früheren Betragsbildung entsprechen dürfte. Dann folgt

$$\boxed{\frac{i-x}{i+x}\text{=1e}^{2i\varphi} \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{i-x}{i+x}\right)\text{=2i}\varphi = \text{2i}\cdot\text{atn(x)}}$$

D.h. wir haben eine Beziehung zwischen dem Logarithmus einer komplexen Zahl (vom Betrage 1) und dem Arkustangens hergeleitet. Sicher sind noch einige Punkte der Überlegung zu klären, aber die Beziehung ist offensichtlich sinnvoll.

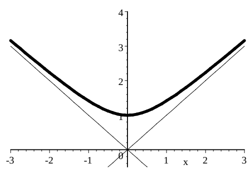
☐ Was ergibt sich für atn(ix)?

12.3.5 Die Substitutionsregel

(12.3.64) Wir betrachten jetzt zwei "schwere Integrale", die wir mit den bisherigen Methoden nicht lösen können. Zunächst

$$I(A) = \int_0^A dx\sqrt{1+x^2}.$$

Weder direkte Integration noch Umformung des Integranden führen zum Ziel. Hätte man einen zusätzlichen Faktor x, dann wäre die Berechnung problemlos. Aber ein solcher Faktor fehlt. Auch partielles Integrieren bringt nichts.
Durch Inspektion des Integranden ergeben sich eine allerdings bereits eine Reihe von Eigenschaften, die das Resultat aufweisen muss:



$I(-A) = -I(A)$
$I(A) \approx A$, $|A|$ klein
$I(A) \approx \frac{1}{2}A^2$, A groß
I(A) monoton wachsend
I$'(A) = \sqrt{1+A^2}$

Die erste und die dritte Bedingung passen so nicht zusammen. Man kann versuchen $\frac{1}{2}A^2$ durch $\frac{1}{2}A\sqrt{1+A^2}$ zu ersetzen. Das ist ungerade und ergibt dassselbe Dominanzverhalten für große A. Aber die übrigen Bedingungen sind nicht erfüllt. (Für kleine A etwa erhält man $\frac{1}{2}A$ statt A.) Man könnte ansetzen

$$I(A) = \frac{1}{2}A\sqrt{1+A^2} + r(A)$$

und nach einem passenden Rst r(A) suchen.
(12.3.65) Ein zweites Beispiel dieser Art ist $J(A) = \int_0^A dx\sqrt{1-x^2}$. Der Versuch eine Stammfunktion zu finden führt auf entsprechende Probleme. Erneut stört die Wurzel. Hier liegt eine Idee nahe: könnte man x gleich $\sin(\alpha)$ setzen, dann könnte man die Wurzel ziehen! Aber dann müsste man auch über α und nicht über x integrieren!

Wir wollen jetzt ein Integrationsverfahren einführen, das den Wechsel der Integrationsvariablen ermöglicht! Dabei kann der Integrand eine völlig andere Form annehmen. Das neue Integral hat denselben Wert, lässt sich aber u.U. besser auswerten. Es geht darum, das Integral

$$\int_a^b dx f(x) \quad \text{umzuwandeln in} \quad \int_A^B dt ... f(g(t))$$

D.h. x soll durch eine andere Variable t ersetzt werden, die x=g(t) erfüllt. Wie angedeutet, ändern sich die Grenzen und im Integrand wird ein zusätzlicher Faktor erzeugt, den wir gleich bestimmen werden. Dieser Faktor ist notwendig, um die Gleichheit der beiden Integrale zu sichern.

(12.3.66) Die meisten schwierigeren Integralberechnungen verwenden die Substitutionsmethode. Aber erneut ist es so, dass es keine Regel gibt, die einem sagt, **welche** Substitution zum Ziele führt. Das Auffinden guter Substitutionen ist vielfach eine Kunst. Einige (nicht immer naheliegende) Substitutionen erweisen sich als recht wirkungsvoll.
(12.3.67) Die Herleitung der Substitutionsregel ist mit Hilfe der Kettenregel recht einfach. Wichtiger ist es, das zugehörige Rechenschema korrekt zu verwenden. Wir werden uns um diesen zweiten Punkt besonders bemühen.
(12.3.68) Zur Herleitung: Es sei F eine Stammfunktion zu f. Dann gilt:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a).$$

Angenommen g ist umkehrbar. Dann können wir A und B finden mit a=g(A) und b=g(B). Es folgt (mit Umkehrung der Kettenregel):

$$F(b) - F(a) = F(g(B)) - F(g(A)) = [F(g(t))]_A^B = \int_A^B dt g'(t) f(g(t)).$$

Zusammen besagt das

$$\boxed{\int_a^b dx f(x) = \int_A^B dt g'(t) f(g(t)).}$$

Das ist die Umkehrung der Kettenregel, etwas anders interpretiert. Beachten Sie die Reihenfolge: Von links nach rechts.
(2.3.69) Welche Bedeutung hat der zusätzliche Faktor $g'(t)$ im Integranden? Er lässt sich einfach mit Hilfe der Summeninterpretation des Integrales verstehen. Approximieren wir beide Seiten einmal durch eine Summe:

$$\begin{aligned} \int_a^b dx f(x) &\approx \sum_i \Delta x_i \, f(a_i) \\ \int_A^B dt g'(t) f(g(t)) &\approx \sum_i f(g(u_i)) g'(u_i) \Delta t_i \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist $a_i = g(u_i)$. Weiter ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ die Breite des kleinen i-ten Teilintervalles auf der x-Achse. Durch unsere Abbildung x=g(t) ist das aber in Tangentenapproximation

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = g(t_i) - g(t_{i-1}) \approx g'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = g'(t_{i-1})\Delta t_i.$$

t_{i-1} ist ein Randpunkt des Intervalles, nicht der gewählte typische Zwischenpunkt $t_i = g(u_i)$. Aber der Unterschied gibt nur einen Restermbeitrag, wie etwa folgende Umschreibung zeigt

$$g'(t_{i-1}) = g'(u_i) + g''(u_i)(t_{i-1} - u_i) + ...$$

Denn es ist ja $|(t_{i-1} - u_i)| \leq \Delta t_i$.

(2.3.70) Das zeigt, dass der Faktor $g'(t)$ dazu dient, die Breiten der Teilintervalle korrekt ineinander umzurechnen. Geometrisch ist $f(x_i)\Delta x_i$ der Flächeninhalt eines Rechteckes. Der korrespondierende Term ist $f(g(u_i))g'(u_i)\Delta t_i$. Beide Rechtecke haben wegen $x_i = g(u_i)$ dieselbe Höhe. Aber ohne den Faktor $g'(u_i)$ könnten die Breiten verschieden sein und damit auch die Summen. Der Faktor korrigiert die Breiten.

(2.3.71) Wie angekündigt wollen wir das Anwenden der Substitutionsregel jetzt schematisieren. **Man sollte so vorgehen, dass man die folgenden drei Schritte neben dem vorgegebenen Integral in der jeweiligen Konkretisierung aufschreibt:**

(1) Die Substitution:	x=g(t)	$t=g^{-1}(x)$ in [a,b]
(2) Das Differential	dx=dt $g'(t)$	
(3) Die neuen Grenzen	$\int_a^b dx \to \int_A^B dt$	
	$\boxed{\int_a^b dx f(x) = \int_A^B (dt g'(t)) f(g(t))}$	

Mit Hilfe dieser Bestandteile kann man das neue Integral einfach zusammensetzen und aufschreiben. Aber **Achtung: Die Funktion g muss im Bereich a**$\leq x \leq b$ invertierbar sein! Das gehört zum ersten Schritt

(12.3.72) Erproben wir die Methode einmal am zweiten Einstiegsbeispiel. Wir möchten $J(A) = \int_0^A dx\sqrt{1-x^2}$ berechnen. Als Substitution versuchen wir x=sin(t). Dann gibt unser Dreipunkteschema:

(1) x=sint t=asn(x) $\sqrt{1-x^2} = \cos t$	(2) dx=dt·cos(t)	(3) $\int_0^A dx \to \int_0^{asn(A)} dt$

Also

$$J(A) = \int_0^A dx\sqrt{1-x^2} = \int_0^{asn(A)} dt \cos^2(t).$$

Das ist aber ein Integral, das wir bereits kennen. Mit Hilfe von $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ und der $1/\alpha$-Regel folgt:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{asn(A)} = \frac{1}{2}\left[t - \sin(t)\cos(t)\right]_0^{asn(A)} \\ &= \frac{1}{2}\left[t - \sin(t)\sqrt{1-\sin^2 t}\right]_0^{asn(A)} = \frac{1}{2}\left[asn(A) - A\sqrt{1-A^2}\right] \end{aligned}$$

Eine Probe durch Ableiten bestätigt das Resultat.

Inhaltlich ist das die Flächeninhaltsfunktion des Halbkreises, die wir soeben bestimmt haben.

☐ $J(a, A) = \int_0^A dx\sqrt{a^2 - x^2}$. Wie würden Sie hier substituieren? Können Sie dies Integral auch auf J(A) zurückführen?

(12.3.73) Jetzt noch einige Ergänzungen zum Dreipunkteschema zum Vollzug der Substitution:

- In der Regel heissen die Variablen nicht x und t. Vielmehr sind jeweils zwei Rollen zu vergeben: *alt* und *neu.* In Punkt (1) steht genauer $alt = g(neu)$. Darauf ist zu achten.
- Die inverse Abbildung g^{-1} lässt sich manchmal nicht angeben. U.U. ist es dann doch möglich, die Substitution durchzuführen. Wichtig ist jedoch, darauf zu achten, dass g im Integrationsbereich umkehbar ist. Ist das nicht der Fall, kann Unfug entstehen.
- U.U. rechnet man im ersten Punkt noch Hilfsgrößen, die im Integranden auftreten von alt nach neu um. Im Beispiel $\sqrt{1-x^2} = \cos t$.

- Der zweite Punkt ist eine gedächtnistechnisch nützliche formale Umschreibung der Gleichung

$$\frac{dg}{dt}(t') = g'(t).$$

  Die jeweils in Punkt (1) stehende Funktion g(t) ist zu differenzieren und mit den nötigen Differentialen zu versehen. Ist g nicht verfügbar, ist f zu differenzieren und das Ergebnis entsprechend umzustellen.

- Zum dritten Punkt überlegt man wie folgt: "Wenn x=a ist, was ist dann nach den Gleichungen des ersten Punktes t?". Usw.

(12.3.74) Sind die drei Punkte des Schemas fallspezifisch aufgefüllt und kontrolliert, dann kann man das neue Integral direkt hinschreiben und sollte das tun.

Ein leichtes Beispiel: Das Integral $\int_0^A dx e^{-ax^2}$ mit a>0 soll mit der Substitution $t = ax^2$ umgeformt werden. Das Schema gibt:

t=ax^2, x=$\sqrt{\frac{t}{a}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$ umkehrbar für x$\geq$ 0 da a>0	dx=dt$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{at}}$ x ist "alt"	$\int_0^A dx \to \int_0^{aA^2} dt$

Also haben wir:

$$\boxed{\int_0^A dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\int_0^{aA^2} \frac{dt}{\sqrt{at}} e^{-t}}$$

Durch die Substituion wird der Exponent vereinfacht, aber dafür handeln wir uns den unangenehmen Faktor $\frac{1}{\sqrt{t}}$ im Integranden ein, der bei t=0 sogar einen Pol entwickelt. Wir haben bereits gesagt, dass dieses Integral ein Beispiel für ein nicht elementar darstellbares Integral ist. Die Substitution selbst ist einfach auszuführen.

☐ Leiten Sie die $1/\alpha$-Regel über eine Substitution her.

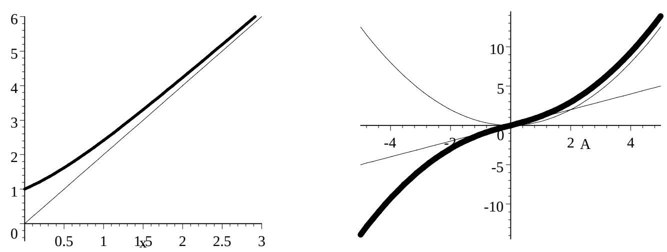
(12.3.75) Als nächstes Beispiel behandeln wir das erste eingangs angeführte Integral $I(a, A) = \int_0^A du\sqrt{a^2 + u^2}$. Dabei haben wir einen zusätzlichen Parameter a>0 eingeführt. Was nimmt man als Substitution? Wir geben eine von Euler gefundene Substitution, von der zunächst überhaupt nicht zu sehen ist, wie man auf sie kommt. Erst die Ausführung des Schemas zeigt, weshalb sie funktioniert, wie sie die störende Wurzel beseitigt. Aber wir haben ja gesagt, dass das Finden günstiger Substitutionen schwierig sein kann.
Die Substitution soll durch die Gleichung $t = u + \sqrt{a^2 + u^2}$ eingeführt werden. u ist hier alt und t neu. D.h. wir haben g^{-1} angegeben. Auflösen nach u gelingt, indem man $(t - u)^2 = \left(\sqrt{a^2 + u^2}\right)^2$ bildet. Und hier hebt sich das quadratische u^2 fort. Es bleibt

$$t^2 - 2tu = a^2$$

Und jetzt läuft die Auffüllung des Schemas durch:

$$\begin{array}{lll} u = \frac{t^2-a^2}{2t} = g(t) & & \\ t = u + \sqrt{a^2 + u^2} & du = dt\frac{t^2+a^2}{2t^2} & \int_0^A du \to \int_a^{A+\sqrt{a^2+A^2}} dt \\ \sqrt{a^2 + u^2} = \frac{t^2+a^2}{2t} & & \end{array}$$

Die Umkehrbarkeit ist im betrachteten Bereich gesichert, wie die Grapheninspektion zeigt. (Für a=1, linke Figur, die t=t(u) gibt) zeigt. Zusätzlich ist t=2u eingezeichnet. Rechts ist vorweg genommen die weiter unten angegebene Stammfunktion eingezeichnet.)



Zusammen haben wir folgende Integralsubstitution (mit K=A+$\sqrt{a^2+A^2}$) gefunden. Das durch die Substitution entstehende Integral lässt sich leicht berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^A du\sqrt{a^2+u^2} &= \frac{1}{4}\int_a^K dt\frac{(t^2+a^2)^2}{t^3} \\
&= \frac{1}{4}\int_a^K dt(t+2\frac{a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3}) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2+2a^2\ln|t|-\frac{1}{2}a^4t^{-2}\right]_a^K \\
&= \frac{a^2}{8}\left[\left(\frac{K^2}{a^2}-\frac{a^2}{K^2}\right)+4\left(\ln(K)-\ln(a)\right)\right] \\
&= \frac{a^2}{8}\left(\frac{K^2}{a^2}-\frac{a^2}{K^2}\right)+\frac{a^2}{2}\ln(\frac{K}{a})
\end{aligned}$$

Beim Herumspielen mit K findet man durch "Rationalmachen des Nenners" folgende bemerkenswerte Identität:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{K^2} &= \frac{a^2}{\left(A+\sqrt{a^2+A^2}\right)^2} = \frac{a^2\left((A-\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{(A^2-(a^2+A^2))^2} \\
&= \frac{\left((A-\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen gibt für den im Integral auftretenden Beitrag:

$$\begin{aligned}
\frac{K^2}{a^2}-\frac{a^2}{K^2} &= \frac{\left((A+\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left((A-\sqrt{a^2+A^2}\right)^2}{a^2} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(4A\sqrt{a^2+A^2}\right)
\end{aligned}$$

Das ist genau der Beitrag, den wir ganz zu Anfang geraten haben! Damit folgt für das Integral insgesamt:

$$\boxed{\int_0^A \mathrm{du}\sqrt{a^2+u^2}=\frac{1}{2}\mathrm{A}\sqrt{a^2+A^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{A+\sqrt{a^2+A^2}}{a}\right)}$$

Den ersten Term hatten wir geraten. Der logarithmische Zusatzterm ist infolge der gefundenen Identität ungerade, was man ihm nicht unmittelbar ansieht. Durch Ableiten kann man verifizieren, dass wirklich eine Stammfunktion gefunden ist. Beachten Sie auch die Stimmigkeit der Einheiten. In der oben gegebenen Figur sind neben der Stammfunktion noch die beiden Dominanzfunktionen $A \mapsto A$ und $A \mapsto \frac{1}{2}A^2$ mit eingezeichnet.

(12.3.76) Wir wollen nochmals auf den Gesichtspunkt der Effizienz verweisen: Die eigentliche Rechenarbeit tritt beim Auswerten des neuen Integrales auf. Wenn man zur Herstellung dieses Integrales "ganz lange" braucht und noch "viele Fehler" macht, kommt man kaum zum Ergebnis. Das ist immer dann wahrscheinlich, wenn man sich nicht an obige drei Punkte hält und stattdessen an der Substitution selbst wild herumrechnet.

(12.3.77) Die Eulersche Integralsubstitution hat die Wurzel im ursprünglichen Integranden beseitigt und einen rationalen Integranden in der neuen Variablen erzeugt. Von den rationalen Funktionen haben wir aber gezeigt, dass man für sie immer eine Stammfunktion mit der Partialbruchmethode finden kann. Dieser Sachverhalt kommt häufig vor: **Man hat einen Integranden mit unangenehmen Beiträgen und wandelt ihn durch eine geschickte Substitution in einen rationalen Integranden um!**

☐ Verallgemeinern wir Eulers Methode: Wir starten mit der Gleichung $t = x+\sqrt{c+2bx+x^2}$ (x die alte Variable). Füllen Sie dafür das Substitutionsschema aus, wobei auch die Wurzel durch die t auszudrücken ist und überlegen sie sich Integrale, die man mit dieser Substitution in lösbare Form bringen kann!

(12.3.78) Vielfach ist es üblich, Integrale, die wir unmittelbar mit der "Umkehrung der Kettenregel" direkt integrieren, mit der Substitutionsmethode zu bearbeiten. "Da muss man sich nur eine Methode merken, braucht weniger zu denken" und rechnet dafür länger und fehleranfälliger. Rechnen wir so ein Beispiel einmal mit beiden Methoden. Zuerst die empfohlene:

$$\begin{aligned}(-2)\int_0^\pi \frac{dt(-\frac{1}{2}\sin(t))}{(1+\frac{1}{2}\cos(t))^4} &= (-2)(-3)\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{2}\cos(t))^3}\right]_0^\pi \\ &= 6\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)=\frac{416}{9}\end{aligned}$$

Jetzt substituieren wir alternativ u=sin(t). Das Schema gibt:

u=cos(t)		
t=acs(u)=g(u)	dt=$\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int_0^\pi dt \to \int_1^0 du$
sint=$\sqrt{1-u^2}$		

Also

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dt\sin(t)}{(1+\frac{1}{2}\cos(t))^4} &= -\int_1^0 \frac{(-du)\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}(1+\frac{1}{2}u)^4} \\ &= +\int_0^1 \frac{du}{(1+\frac{1}{2}u)^4} = 2(-3)\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}u\right)^3}\right]_0^1 = ...\end{aligned}$$

Das ist viel aufwendiger. Teilweise kann man sich Arbeit sparen, indem man u=cost differenziert und im zweiten Schritt mit $du=-dt\cdot sint$ arbeitet. Aber man muss darauf achten, dass man am Ende keinen Rest an alten Variablen im neuen Integranden hat. Das ist eine beliebte Fehlerquelle: Man substituiert nur einen Teil der alten Variablen, macht aus den Restbeständen schnell äußere Parameter und freut sich dass, man integrieren kann! Leider ist das Resultat meist falsch, die Rechnung ist es auf jeden Fall.

(12.3.79) Ist man nur an einer (irgendeiner) Stammfunktion interessiert, kann man das Vorgehen der Substitutionsregel vereinfachen. Dabei ist an die Vereinbarung aus (12.1.13) zu denken, dass die Integrationsvariable genauso bezeichnet werden soll, wie die unabhängige Variable der Stammfunktion. Der dritte Schritt des Schemas enfällt dann. **Statt der Grenzen ist am Ende die alte Variable wieder einzuführen:**

(1) Die Substitution:	x=g(t)	t=g$^{-1}(x)$ in [a,b]
(2) Das Differential	dx=dt g$'(t)$	
(3) Entfällt		t=g$^{-1}(t)$ einsetzen!

Der Zusammenbau des neuen Integrales gibt jetzt:

$$\int dx f(x) = \left[\int dt g'(t) f(g(t))\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

D.h. erst, wenn man die Stammfunktion in t gefunden hat, soll man über $t=g^{-1}(x)$ wieder die ursprüngliche Variable einführen!

(12.3.80) Ein Beispiel: $I(x;a,b)=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}}$ soll über die Substitution $u=\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}$ bestimmt werden. Dabei ist b>0. Die ersten beiden Punkte des Schemas ergeben:

u=$\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}$	dx=$\frac{-2bu\cdot du}{(u^2+a^2)^2}$	entfällt
x=$\frac{b}{u^2+a^2}=g(x)$		

Damit folgt:

$$\begin{aligned}I(x;a,b) &= \int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}} = (-2b)\left[\int\frac{du}{(u^2+a^2)^2}\right]_{u=...} \\ &= (-2b)\left[\frac{1}{2a^3}\left(atn(\frac{u}{a})+\frac{au}{a^2+u^2}\right)\right]_{u=...} \\ &= (-2b)\left(\frac{1}{2a^3}atn(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{x}-a^2})+\frac{x\sqrt{\frac{b}{x}-a^2}}{2a^2b}\right)\end{aligned}$$

Das ist das Resultat, das man auch über eine Formelsammlung oder ein Computeralgebraprogramm erhält. Dabei sollte a,b>0 gelten.

12.3.6 Die Bogenlänge

Wir geben jetzt noch eine Anwendung, die Inegration und Vektorrechnung benutzt.

(12.3.81) Wir betrachten eine Kurve im Raum oder der Ebene, die wir durch eine Parametrisierung $t \mapsto \vec{r}(t)$ beschreiben wollen. Wir interpretieren dies als Bewegung entlang Bild$\vec{r}$. Uns interessiert die Länge des Kurvenzuges, gemessen von einem Kurvenpukt aus, sagen wir von $\vec{a} = \vec{r}(t_0)$ aus. D.h.: Legt man von $\vec{a}$ einen Faden entlang der Bahn bis $\vec{r}(t)$, dann interessiert die Länge des verlegten Fadens. Würden wir in einem Auto entlang der Kurve fahren, dann wäre das der zurückgelegte Weg. Das letzte Problem können wir aber leicht (physikalisch) lösen:

> Hat das Auto zur Zeit t die (momentane) skalare Geschwindigkeit v(t) dann ist der (bis zur Zeit T) zurückgelegte Weg s(T) gleich $\int_{t_0}^T dtv(t)$. Denn die momentane Geschwindigkeit ist ja gleich der Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit.

(12.3.82) Die momentane skalare Geschwindigkeit erhalten wir aber durch Betragsbildung der vektoriellen Geschwindigkeit und letztere durch Ableiten unserer Parametrisierung.
Zusammen ergibt sich:

> **Die Bogenlänge der von $\vec{r}$ beschriebenen Kurve zwischen den beiden Punkten $\vec{r}(t_0)$und $\vec{r}(T)$ mit T>t_0 wird gegeben durch:**
>
> $$\boxed{s(T) = \int_{t_0}^T dt \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| .}$$

Unsere Modellvorstellung mit dem fahrenden Auto zeigt allerdings noch, dass das Auto die gesamte Bahn in einer Richtung durchfahren muss. Kehrt es irgenwo um und fährt es ein Stück zurück und dann wieder vorwärts, so ist der zurückgelegte Weg größer als die Bogenlänge! Denn ein Teil des Weges wird ja dreifach durchfahren und das wird auf dem Tacho mitgezählt. Unsere Formel gibt einfach die Tachodifferenz wieder. Das lässt sich vermeiden, wenn man fordert, dass die vektorielle Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ zu keinem Zeitpunkt verschwinden darf. Unter diesen Umständen ergibt unsere Formel sicherlich die Bogenlänge.

(12.3.83) Alle Parametrisierungen sind in der Regel in Form von Koordinatenvektoren anzugeben. Wir beschreiben parallel das allgemeine Vorgehen und ein Beispiel.

	Allgemeines Vorgehen	Beispiel: Kreis
	Bestimme eine Parametrisierung	$\vec{r}(t) = (r\cos t, r\sin t)$
	Bilde die vekt. Geschwindigkeit	$\dot{\vec{r}}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
	Bilde den Betrag der vekt. Geschw.	$\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = r$
	Bilde damit das Integral $\boxed{\mathrm{b(T)}=\int_{t_0}^T \mathrm{dt} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}$	b(T)=r$\int_0^T dt \cdot 1$
	Berechne das Integral	b(t)=rT . (T =Winkel!)

Der letzte Schritt kann u.U. größere praktische Schwierigkeiten bereiten, d.h. es kommen "schwere Integrale" heraus. Im Beispiel haben wir tatsächlich die Formel für die Bogenlänge beim Kreis erhalten.

☐ Sei $\vec{d} = (a, b, c)$. Betrachten Sie die Strecke, die durch folgende Parametrisierung gegeben wird: t$\mapsto t\vec{d}$ für 0$\leq t \leq T$. Die Länge dieser Strecke ist natürlich T$\left|\vec{d}\right|$. Bestätigen Sie das mit der allgemeinen Methode.

(12.3.84) Jetzt kommen wir zu einem besseren Beispiel, das wir mit den bisherigen Methoden nicht beherrschen. Wir betrachten eine durch $y = \alpha x^2$ gegebene Parabel und fragen nach der Bogenlänge im Bereich $0 \leq x \leq A$.

Als Parametrisierung wählen wir x$\mapsto \vec{r}(x) = (x, \alpha x^2)$. Dann sehen die einzelnen Schritte aus (12.3.83) wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(x) &= (1, 2\alpha x) \\ |\vec{r}'(x)| &= \sqrt{1+4\alpha^2 x^2} \\ b(A) &= \int_0^A dx\sqrt{1+4\alpha^2 x^2}. \end{aligned}$$

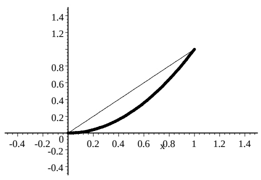
In dem Integral nehmen wir die Substitution u=$2\alpha x$ vor. Das gibt

$$b(A) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha A} du\sqrt{1+u^2}.$$

Dieses Integral haben wir oben in (12.3.75) berechnet. Mit a=1 und A$\rightarrow 2\alpha A$ folgt:

$$b(A) = \frac{1}{2\alpha}\left(\alpha A\sqrt{1+4\alpha^2 A^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\alpha A + \sqrt{1+4\alpha^2 A^2}\right)\right)$$

Und für $\alpha = 1$und A=1 folgt schließlich:



$b = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) = 1.4789$

Das ist die Bogenlänge der Normalparabel im ersten Einheitsquadrat. Der Wert ist offensichtlich vernünftig, etwa größer als $\sqrt{2}$ und deutlich kleiner als 2.

Die Bogenlänge der Ellipse.

(12.3.85) Die Ellipse ist neben der Parabel ein weiterer Kegelschnitt. Eine Parametrisierung ist leicht zu finden, aber das entstehende Integral lässt sich bemerkenswerterweise nicht elementar ausdrücken. Zuerst die Schritte, die zum Integral führen.

Eine Parametrisierung ist $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$,wobei a und b die Längen der beiden Halbachsen sind. Üblicherweise ist a die große Halbachse. Der Parameter läuft von 0 bis 2π. Jetzt das Schema:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (a\cos t, b\sin t) \\ \dot{\vec{r}}(t) &= (-a\sin t, b\cos t) \\ \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = b\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2}\sin^2 t} \\ & \boxed{b(T) = b\int_0^T dt\sqrt{1-\eta^2\sin^2 t} \quad \text{wobei} \quad \eta^2{=}\frac{b^2-a^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass b die große Halbachse ist. Dann ist $0<\eta^2 \leq 1$. Das entstehende Integral erweist sich als nicht elementar darstellbar. Man bezeichnet derartige Integrale als "elliptische Integrale". Sie treten in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auf und haben eine Vielzahl bemerkenswerter Eigenschften.

(12.3.86) Wir besprechen zunächst eine andere Form des Integrales, die sich über eine naheliegende Substitution ergibt. Und zwar setzen wir u=$\eta\sin t$. Unser Schema (für $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) :

u=$\eta\sin t$
t=asn($\frac{u}{\eta}$) $\qquad$ dt=$\frac{du}{\sqrt{\eta^2-u^2}}$ $\qquad$ $\int_0^T dt \mapsto \int_0^{\eta\sin T} du$
$\sqrt{1-\eta^2\sin^2 t} = \sqrt{1-u^2}$

Zusammen gibt das

$$\boxed{\int_0^T \mathrm{dt}\sqrt{1-\eta^2\sin^2 t}{=}\int_0^{\eta\sin T}\mathrm{du}\sqrt{\frac{1-u^2}{\eta^2-u^2}}}.$$

Dies ist ein Beispiel dafür, wie eine Substitution den Integranden verändern kann.