****

Vorkurs Mathematik

Teil II Analysis

F. Krause

Kapitel 11
Verallgemeinerungen

Der Inhalt dieses Kapitels:

****

Inhaltsübersicht Kap. 11

Ergänzend sollen noch einige Verallgemeinerungen der Idee der Tangentenzerlegung skizziert werden. Diese Idee ist wie ein Samenkorn. Einmal aufgelaufen sprießen aus ihm immer neue Zweige und Blüten hervor, mit denen man nützliche Dinge anfangen oder an denen man sich einfach auch nur erfreuen kann. Konkreter heißt das: Die Idee läßt sich erfolgreich auf neuartige Probleme anwenden, die sich andernfalls als schwierig erweisen.

Wir behandeln die folgenden drei Fragen:

- Gewinnung der vektoriellen Geschwindigkeit mit Hilfe der Tangentenzerlegung
- Höhere Ableitungen und die Verbesserung der Tangentenapproximation durch Hinzunahme weiterer Terme.
- Gradientenbildung als wichtiges Beispiel eines Abbildungstyps, auf den sich die Tangentenzerlegung leicht, die Differentialquotientenbildung jedoch nur mühsam und auf Umwegen verallgemeinern lässt.

Alle drei Beispiele haben überdies die Funktion, das Verständnis der grundlegenden Idee der Tangentenzerlegung dadurch zu verbessern, dass man ihre Anwendbarkeit in neuartigen Problemsituationen erprobt.

11.1 **Die Ableitung einer Bahnkurve**

11.1.1 **Bahnkurven**

(11.1.1) Wir haben in (9.2.3) gesehen, dass sich die momentane (skalare) Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung als Ableitung der Weg-Zeit-Funktion dieser Bewegung ergibt. D.h. die Tangentenzerlegung dieser Funktion liefert die physikalisch wichtige momentane Geschwindigkeit.
(11.1.2) Die Frage liegt nahe, ob man die vektorielle Geschwindigkeit einer räumlichen Bewegung, etwa einer Flugparabel, auf analoge Weise erhalten kann. Die mathematische Beschreibung derartiger Bewegungen vermittels der Bahnkurve $t \mapsto \vec{r}(t)$ =(Ortsvektor zur Zeit t) haben wir in Kap. 4.5.2 bereits eingeführt. Vgl. auch Kap. 3.4. Bitte prägen Sie sich den folgenden Sachverhalt erneut ein: $\vec{r}(t)$ **bezeichnet den Ortsvektor (des bewegten Punktes) zur Zeit t !**
(11.1.3) Kann man für Bahnkurven auch so etwas wie eine Tangentenzerlegung einführen? Und liefert diese die vektorielle momentane Geschwindigkeit? Wir werden gleich sehen, dass sich beide Fragen problemlos positiv beantworten lassen. Für die Anwendungen in der Physik ergeben sich wichtige Resultate.
(11.1.4) Der Hauptunterschied zu unseren bisherigen Überlegungen besteht darin, dass wir es jetzt mit einem anderen Abbildungstyp zu tun haben. Statt einer reellen Funktion $f = (I, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ liegt eine Abbildung $\vec{r} = (I, t \mapsto \vec{r}(t), V_0^3)$ vor. Bzw. nach Einführung eines Koordinatensystems eine Abbildung $\vec{r}^k = (I, t \mapsto \vec{r}^K(t), \mathbb{R}_0^3)$. Der Unterschied findet sich im Typ der Wertemenge. Vgl. Kap. 3.4.
(11.1.5) Der übliche **Bau des Termes** $\vec{r}(t)$ erfolgt über die vektorielle Zentralformel aus Kap.4.1. Es seien $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ drei (feste) Vektoren. Dann setzt man an:

$$\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{a} + x_2(t)\vec{b} + x_3(t)\vec{c}$$

D.h. die Zeitabhängigkeit wird allein in die drei Komponenten gesteckt. Vielfach wird man als Vektoren die drei Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems wählen. Dann hat man

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

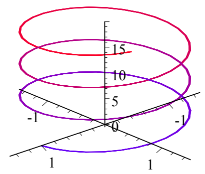
und kann unmittelbar zur Koordinatenform (=Tripelform) überwechseln:

$$\vec{r}^K(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

In der Regel wird die Bahnkurve auf eine dieser Weisen vorgegeben.
(11.1.6) Bei **Skizzen** zeichnet man meist nur die durchlaufenen Endpunkte, gibt also die zugehörigen Zeitmarken nicht mit an. Im nachfolgenden Beispiel mit

$$\vec{r}^K(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

ist die Bahn für $0 \leq t \leq 20$ gezeichnet. Zeichnen Sie selbst den Koordinatenvektor $\vec{r}^K(10)$ näherungsweise ein.



$\vec{r}^K(t) = (\cos t, \sin t, t)$
$= \vec{e}_1^K \cos t + \vec{e}_2^K \sin t + \vec{e}_3^K t$
$0 \leq t \leq 20$
$\vec{r}^K(0) = (1, 0, 0)$
$\vec{r}^K(3\pi) = (-1, 0, 3\pi)$

11.1.2 **Die Tangentenzerlegung einer Bahnkurve**

(11.1.7) Das Konzept der Tangentenzerlegung lässt sich problemlos übertragen. Wir setzen an

$$\boxed{\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{m} \cdot \Delta t + \Delta t \vec{R}_{\vec{r}}(t_0, \Delta t)}$$

Dabei darf $\vec{r}(t)$ in irgendeinem unserer Vektorräume liegen, speziell also in V_0^3 oder $\mathbb{R}_K^3$ oder auch in $\mathbb{R}_K^2$. Die Darstellung benutzt ja nur die allgemeinen Vektorraumeigenschaften aus Kapitel 3.
(11.1.8) Hier ist jeder Summand ein Vektor, nicht mehr eine Zahl. Im linearen Term etwa müssen wir den "Steigungsfaktor" als (mit $\vec{m}$ bezeichneten) Vektor ansetzen. Er wird mit der Zahl Δt multipliziert, was erneut einen Vektor ergibt. $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ ist die Größe, die interessiert: Der Ortsvektor zu einer Zeit, die um Δt von der Aufpunktzeit t_0 abweicht.
(11.1.9) Die Tangentenapproximation hat vertraute Gestalt:

$$\boxed{\Delta t \mapsto \vec{r}(t_0) + \vec{m} \cdot \Delta t}$$

Das ist die Beschreibung einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung mit der konstanten Vektorgeschwindigkeit $\vec{m}$ wie sie in Kap. 4.3.7 eingeführt wurde. Rechnerisch ist das leicht auszuwerten.
(11.1.10) Die folgende inhaltliche Interpretation liegt nahe: Bewegt sich der Körper zunächst unter dem Einfluß von Kräften auf der Bahnkurve $t \mapsto \vec{r}(t)$ und werden diese zur Zeit t_0 abgeschaltet, dann bewegt er sich tangential weiter und diese Bewegung wird von der Tangentenapproximation beschrieben. Die unten durchgeführte genauere Analyse bestätigt diese intuitive Vorstellung.
(11.1.12) Schauen wir uns die Zerlegung, also die Umformung des Rechenausdrucks erneut an. Die interessierende Grösse $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ wird in drei Anteile zerlegt. Der erste liegt fest (Aufpunktvektor). Der zweite soll linear in Δt sein. Der dritte beschreibt den Unterschied, oder den absoluten Fehler, der durch die Tangentenapproximation entsteht. Spaltet man einen Zahlfaktor Δt ab, erhält man den Restterm, also den lokalen Fehler.
(11.1.13) Ist die gesamte Zerlegung eindeutig bestimmt? Hierzu benötigen wir erneut eine geeignete "*Resttermbedingung*", die die Summanden festlegt. Der absolute Fehler ist jetzt ebenso wie der Restterm ein Vektor. Was würde es heißen, dass "der Restterm nach Null geht, für Δt nach Null?"

Es gibt eine naheliegende Antwort: **Ein veränderlicher Vektorpfeil geht nach Null (=Nullvektor), wenn seine Länge nach Null geht**. Wir fordern daher für unseren Restterm die folgende Resttermeigenschaft:

$$\boxed{\left|\vec{R}_{\vec{r}}(t_0, \Delta t)\right| = \sqrt{\vec{R}_{\vec{r}}^2(t_0, \Delta t)} \longrightarrow 0 \text{ für } \Delta\mathrm{t} \text{ nach Null.}}$$

(11.1.14) Ist diese Bedingung erfüllt, dann nennen wir die Zerlegung *Tangentenzerlegung von* $\vec{r}$ *um* t_0. Diese Bedingung kann sowohl für V^3, V_0^3 als auch $\mathbb{R}_K^3$ gefordert werden.
(11.1.15) Eine zentrale Eigenschaft der Tangentenzerlegung ist ihre Eindeutigkeit. Wenn es eine gibt, dann auch nur diese eine.

☐ **Beweisen Sie die Eindeutigkeit** analog zum früheren Beweis in (9.1.23).

(11.1.16) Den auf diese Weise ermittelten Vektor $\vec{m}$ bezeichnen wir jetzt mit $\dot{\vec{r}}(t_0)$ oder mit $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ oder auch $\vec{v}(t_0)$. (Der Punkt ist die Newtonsche Schreibweise und in der Physik bei Zeitableitungen anstelle des Striches gebräuchlich.)

(11.1.17) Aus der Eindeutigkeit folgt, **dass auch für Bahnkurven die beiden Denkfiguren zur Verfügung stehen.**

(11.1.18) Wie jeder geometrische Pfeil ist $\dot{\vec{r}}(t_0)$ durch eine Richtung und eine Länge bestimmt. Kap.2.4.1. Die Länge, der Betrag der Geschwindigkeit, ist die übliche skalare Geschwindigkeit, also das, "was auf dem Tacho erscheint". Und $\Delta t\dot{\vec{r}}(t_0)$ ist der in der Zeit von t_0 bis $t_0 + \Delta t$ näherungsweise zurückgelegte vektorielle Weg. In der Physik wird dafür gerne $\Delta\vec{r}$ oder auch $d\vec{r}$ geschrieben. Denken sie daran: Dieser zurückgelegte Weg und seine näherungsweise Berechnung ist das, was vielfach interessiert.

11.1.3 Tangenten an Kurven

(11.1.19) Was ist, wenn die Abbildung keinen physikalischen Bewegungsablauf beschreibt, sondern eine Parametrisierung einer Kurve vorliegt? Der Parameter hat denn nur die Bedeutung eines Namensgebers für die einzelnen Punkte der Kurve. Ist die Abbildung ausreichend glatt, dann lässt sich die Tangentenzerlegung offensichtlich auch in diesem Fall durchführen. Welche Bedeutung hat die erhaltene Ableitung? Sie ist **Richtungsvektor für die geometrische Tangente an die Figur im Aufpunkt**. Und die Tangentenapproximation liefert eine Parametrisierung der geometrischen Tangente.

(11.1.20) Erhalten wir mit unserer Methode auch immer die *geometrische Tangente (an die parametrisierte Figur)*, sofern es eine solche geometrische Tangente gibt? Wenn es sie gibt, ist die Tangente eine Gerade, benötigt zur vektoriellen Festlegung also einen Punkt (das wäre immer der Aufpunkt) und einen Richtungsvektor $\neq \vec{0}$. Das wäre $\dot{\vec{r}}(t_0)$. Hier entsteht ein **Problem**: Was ist, wenn $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$ herauskommt? Dann existiert die momentane Geschwindigkeit, ist aber Null. Einen Richtungsvektor haben wir somit nicht. Nehmen wir die folgende Parametrisierung einer Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t^2, t^4)$. Das Bild ist eine Normalparabel. Man findet über die erste Denkfigur $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}$. Unsere Methode liefert hier die Scheitelpunktstangente nicht! Ursache: Die beschreibende Bewegung hat in diesem Punkt die momentane Geschwindigkeit $\vec{0}$, *stagniert* dort. **Will man daher eine geometrische Tangente an die parametrisierte Figur, muss man darauf achten, dass die momentane Geschwindigkeit nicht gerade Null ist.**

(Hier liegt übrigens ein einfaches und wirkungsvolles Beispiel dafür vor, wie genaues mathematisches Denken aussieht!).

☐ Konkretisieren Sie das Problem auch am Beispiel des senkrechten Wurfes.

11.1.4 Die Parametrisierung eines Funktionsgraphen

(11.1.21) Es sei y=f(x) eine reelle Funktion mit zeichenbarem glatten Graphen. Bisher haben wir die Tangente an Punkte des Graphen über ihre Gleichung $y = f(x_0) + mf'(x_0)(x - x_0)$ erhalten. Das war die altbekannte Punkt-Richtungsform. Aber kann man die Tangente nicht auch vektoriell nach der neuen Methode erhalten? Wir wissen, wie man die Tangente in vektorieller Parametrisierung schreiben kann, beispielsweise durch

$$\vec{t}(\alpha) = (x_0, f(x_0)) + \alpha(1, f'(x_0)).$$

(1.1.22) Zur vektoriellen Herleitung benötigt man zuerst eine Parametrisierung des Graphen. Hierfür gibt es einen ausgezeichneten Kandidaten, nämlich $x \mapsto \vec{s}(x) = (x, f(x))$. Als Bewegungsvorgang: Ein Massenpunkt bewegt sich auf dem Graphen und zwar so, dass die Geschwindigkeit in x-Richtung konstant den Wert 1 hat. Über die erste Denkfigur finden wir leicht: $\dot{\vec{s}}(x) = (1, f'(x))$. Beachten Sie: Das kann nie Null werden, so dass das in (11.1.20) angsprochene Stagnationsproblem entfällt! Man erhält die folgende Parametrisierung der Tangente: $\vec{t}(x) = (x_0, f(x_0)) + (x - x_0)(1, f'(x_0))$. Das ist (11.1.21) mit anderer Bezeichnung des Parameters.

11.1.5 Die erste Denkfigur und die weiteren Überlegungen

(11.1.23) Mit Hilfe der ersten Denkfigur haben wir in einfachen Fällen die Ableitung bestimmt. Das ist hier erneut möglich. Ein guter Kandidat ist die Flugparabel. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $t_0 = 0$, betrachten also $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. Ordnendes Prinzip ist jetzt "Sortieren nach Potenzen von Δt". Das gibt:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t_0 + \Delta t) &= \frac{1}{2}\vec{g}(t_0 + \Delta t)^2 + \vec{v}_0(t_0 + \Delta t) + \vec{r}_0 \\
&= \left(\frac{1}{2}\vec{g}t_0^2 + v_0 t_0 + \vec{r}_0\right) + (\vec{g}t_0 + \vec{v}_0)\,\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t^2 \\
&= \vec{r}(t_0) + (\vec{g}t_0 + \vec{v}_0)\,\Delta t + \Delta t \cdot \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t
\end{aligned}$$

Der so identifizierte Restterm $\frac{1}{2}\vec{g}\Delta t$ erfüllt offensichtlich die Resttermeigenschaft. Es liegt eine Tangentenzerlegung vor und wir lesen gemäss der ersten Denkfigur die Ableitung ab, und zwar unser früher in (4.5.8) bereits angegebenes Resultat:

$$\boxed{\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{g}t_0 + \vec{v}_0}$$

In einfachen Fällen liest man über die Tangentenzerlegung die Ableitung mit Hilfe der ersten Denkfigur auch für Bahnkurven direkt ab.

☐ Bestimmen sie die vektorielle Geschwindigkeit direkt für den Fall einer geradlinig gleichförmigen Bewegung $\vec{s}(t) = \vec{a} + \vec{b}(t - t_0)$.

(11.1.24) Allgemein kann und sollte man auch bei Bahnkurven mit **Ableitungsregeln** arbeiten. Es ist einfach, geeignet modifizierte Ableitungsregeln für die Ableitung von Raumkurven zu formulieren und zu beweisen. **Man erlebt dabei keinerlei Überraschung.**

☐ Beweisen Sie Linearität und die modifizierte Produktregel. Also

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\alpha\vec{r}(t) + \beta\vec{s}(t)) = \alpha\dot{\vec{r}}(t) + \beta\dot{\vec{s}}(t)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f(t)\vec{r}(t)) = \dot{f}(t)\vec{r}(t) + f(t)\dot{\vec{r}}(t)}$$

(11.1.25) Ist insbesondere $\vec{r}(t) = f(t)\vec{a}$, wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist, so wird hierdurch eine geradlinige Bewegung auf der von $\vec{a}$ erzeugten Geraden beschrieben. Das ergibt als Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{f}(t_0)\vec{a}$. Denn die "konstante Bahnkurve" $t \mapsto \vec{c}(t) = \vec{a}$ hat die vektorielle Geschwindigkeit $\vec{0}$ wie man sich überzeugt. (Zum Argument: Der Restterm ist für $\vec{c}$ identisch Null und geht somit trivialerweisen nach Null!)
(11.1.26) Damit haben wir das im Funktionsbereich entwickelte Konzept weitgehend auf die neue Situation übertragen. Insbesondere liefert uns die zweite Denkfigur immer eine gültige Vektorgleichung.

11.1.6 **Die momentane Geschwindigkeit**

(11.1.27) Wir können wieder zur Differenzenquotientenform der Zerlegung übergehen, und das erlaubt uns einige nützliche Schlüsse:

$$\boxed{\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t_0) + \vec{R}_{\vec{r}}(t_0, \Delta t).}$$

Im Rahmen der kinematischen Bahnkurveninterpretation ist diese Gleichung wie folgt zu interpretieren:

- Links steht die "**mittlere Geschwindigkeit** im Zeitraum $t_0 \le t \le t_0 + \Delta t$ " gleich "zurückgelegter Weg/Zeitdauer". Die Richtung ist die der Verbindung der beiden Ortsvektoren. Zähler und Nenner gehen mit Δt einzeln nach Null, der Quotient dagegen nähert sich einem festen Wert.
- Dieser feste Wert ist der erste Term rechts, die "**vektorielle momentane Geschwindigkeit** im Zeitpunkt t_0". Die Richtung ist tangential zur Bewegung im Zeitpunkt t_0.
- Der dritte Term gibt den Unterschied zwischen mittlerer und momentaner Geschwindigkeit.

(11.1.28) Interpretiert man die Abbildung nicht kinematisch, sondern geometrisch als Parametrisierung einer Figur (also vom Kurvenzug Bild$\vec{r}$), dann ist vornehmlich die Richtung von $\dot{\vec{r}}(t_0)$ von Interesse. Diese Richtung liefert die **Richtung der zugehörigen Tangente** der Figur, sofern $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$ ist.

☐ Gegeben die Parametriserung einer Flugparabel $\vec{r}(t) = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3)t - \frac{1}{2}t^2\vec{e}_3$. Wählen Sie $t_0 = 0$ und bilden Sie die Differenzenquotientenform der Tangentenzerlegung, wobei man t für Δt schreiben kann. Identifizieren Sie die drei in (11.1.12) genannten Terme in der nachfolgenden Figur. Vergleichen Sie mit der Figur aus (4.5.15).

Bild

☐ Welche graphische Interpretation hat die folgende Gleichung: $\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{(t-t_0)} = \bar{\vec{v}}(t)$, wobei $\bar{\vec{v}}(t)$ die mittlere vektorielle Geschwindigkeit im Zeitraum von t_0 bis t ist ?

11.1.7 Der Übergang zu einer Koordinatendarstellung

Bisher verliefen alle Überlegungen analog zum Fall der reellen Funktionen. Sie brachten also letztlich nichts eigentlich Neues. Gibt es aber nicht auch Dinge, die sich nur im Vektorfall durchführen lassen? Ein ganz wesentliches Merkmal der Vektorrechnung war die Einführung von Koordinaten, der Übergang von den Orts- zu den Koordinatenvektoren. Was bringt uns das für die Ableitungstheorie?

(11.1.29) Angenommen wir führen ein festes kartesisches Koordiantensystem K ein. Dann können wir in der Tangentenzerlegung zu den Koordinatenvektoren übergehen. Nach den Regeln aus (3.3.27) folgt sofort:

$$\boxed{\vec{r}^K(t_0 + \Delta t) = \vec{r}^K(t_0) + \vec{v}^K \cdot \Delta t + \Delta t \cdot \vec{R}^K_{\vec{r}}(t_0, \Delta t)}$$

Dabei ist $\vec{v}^K$ der Koordinatenvektor der momentanen Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t_0)$. Und $\vec{R}^K_{\vec{r}}$ erfüllt die Resttermbedingung.

(11.1.30) Andererseits gilt $\vec{r}^K(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Dabei ist $t \mapsto x(t)$ die *Bezeichnung* der ersten Koordinatenfunktion usw. $\vec{r}^K(t)$ **ist** für jedes t ein Koordinatenvektor. Dessen Koordinaten werden in der angegebenen Weise bezeichnet werden. Vgl. (1.8.10) und (4.5.16).

(11.1.31) Damit haben wir drei reelle Funktionen, die drei Koordinatenfunktionen, für die wir einzeln auch eine Tangentenzerlegung ansetzen können. Etwa

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \Delta t R_x(t_0, \Delta t)$$

Hierbei ist $\dot{x}(t_0)$ die übliche Ableitung, die wir sonst nach Leibniz mit $x'(t_0)$ bezeichnet hätten.

(11.1.32) Jetzt können wir die Zerlegungen der Komponenten in $\vec{r}^K(t_0 + \Delta t)$ einsetzen und dann nach Potenzen von Δt sortieren. Das Ergebnis:

$$\begin{aligned} & (x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)) = \\ = \quad & (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))\Delta t + \Delta t(R_x(t_0, \Delta t), R_y(t_0, \Delta t), R_z(t_0, \Delta t)) \end{aligned}$$

Der letzte Term erfüllt die Resttermbedingung, da die drei Komponenten dies einzeln tun. Dann liegt aber die eindeutige Tangentenzerlegung von $\vec{r}^K(t)$ vor!

(11.1.33) Wir können über die erste Denkfigur die Geschwindigkeit ablesen und finden

$$\boxed{\vec{v}^K(t_0) = (v_x(t_0), v_y(t_0), v_z(t_0)) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))}$$

Links steht die Bezeichnung des betrachteten Koordinatenvektors. In der Mitte werden die üblichen Bezeichnungen für die drei Komponenten eingeführt und rechts folgt das (nicht unerwartete) Resultat: **Die Komponenten der momentanen Geschwindigkeit kann man auch erhalten, indem man die Koordinatenfunktionen ableitet!**

(11.1.34) Beachten sie, dass es hier wieder um die Vertauschbarkeit der Reihenfolge zweier Operationen geht: *Erst zerlegen und dann differenzieren* oder *erst differenzieren und dann zerlegen.* Formal können wir das auch wie folgt schreiben:

$$\boxed{\vec{v}^K(t) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\right)^K = \frac{d\vec{r}^K}{dt}(t_0).}$$

Im mathematischen Bereich ist immer sorgfältig darauf zu achten, ob man die Reihenfolge zweier Operationen vertauschen darf! Viele Argumentationsfehler entstehen durch unerlaubtes Vertauschen.

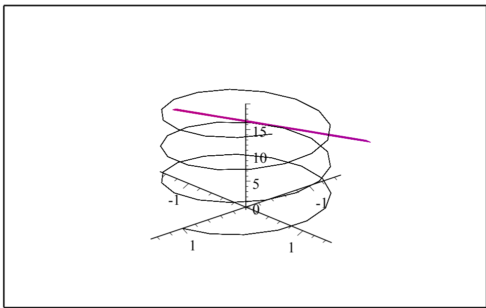
(11.1.35) Das gefundene Resultat ist ausgesprochen nützlich, da man konkrete Bewegungen vielfach über eine Koordinatendarstellung einführt. Dann erhalten wir mit unserem Resultat sofort die zugehörige momentane Geschwindigkeit.

(11.1.36) Beispiel: $t \mapsto k^K(t) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), 0)$ beschreibt eine **Kreisbewegung** in der x-y-Ebene. Für die zugehörige momentane Geschwindigkeit folgt:

$$\boxed{\vec{v}^K(t) = \dot{\vec{k}}^K(t) = (-r\omega\sin(\omega t), r\omega\cos(\omega t), 0)}$$

Beachten Sie, dass ganz erwartungsgemäss die momentane Geschwindigkeit stets senkrecht auf dem zuhörigen Ortsvektor steht.

☐ Bestimmen Sie für das Beispiel (11.1.6) eine Parametrisierung der Tangente für t_0=10. Sie ist in der nachfolgenden Figur mit eingezeichnet.



$\vec{r}^K(t) = (\cos t, \sin t, t)$
$\vec{v}^K(t) = ...$
$\vec{x}_{T10}(\alpha) = ...$

☐ Beschreiben Sie die geometrische Form der Bewegung, die durch die folgende Bahnkurve beschrieben wird

$$\vec{r}^K(t) = (tr\cos(\omega t), tr\sin(\omega t), tH).$$

Bestimmen Sie die zugehörige momentane Geschwindigkeit. Sei $t_0 = T = \frac{2\pi}{\omega}$ und $\Delta t = 0.01T$. Dazu r=H=1. Berechnen Sie den zurückgelegten (vektoriellen) Weg exakt und in linearer Approximation.

11.1.8 Die Polarparametrisierung einer ebenen Kurve

(11.1.37) Manchmal ist es günstig, für ebene Kurven eine Polardarstellung zu verwenden. Hierzu genügt es, die Polardarstellung komplexer Zahlen vektoriell zu schreiben. Der Polarwinkel θ sei der Winkel des Ortsvektors mit der 1-Achse. Also $\cos\theta = \frac{1}{r}(\vec{r}\cdot\vec{e}_1)$. Eventuell kann man θ auch über das Grundintervall $-\pi < \theta \leq \pi$ hinaus fortsetzen, wie bei den komplexen Zahlen besprochen. Dann setzen wir für die rein geometrische Beschreibung der Bahnform folgende Parametrisierung an:

$$\boxed{\vec{r}(\theta) = r(\theta)\vec{e}(\theta) \text{ wobei } \vec{e}(\theta) = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta.}$$

Also: $\vec{e}(\theta)$ ist der Einheitsvektor, der mit der positiven x-Achse den Winkel θ bildet und $r(\theta) = |\vec{r}(\theta)|$ ist der Betrag des Ortsvektors (zu diesem Winkel). Kennt man diese eine Funktion $\theta \mapsto r(\theta)$, dann liegt der zugehörige Ortsvektor fest und die Bahnfigur ist parametrisiert. Genauer wird für jeden Winkelwert θ ein Punkt der Bahnfigur durch die Richtung $\vec{e}(\theta)$ und die Länge $r(\theta)$ des zugehörigen Ortsvektors festgelegt. (Erst auf dem Einheitskreis zum Winkel θ gehen, dann in dieser Richtung die Länge um den Faktor r(θ) verändern.)

(11.1.38) Wir können $\vec{e}(\theta) = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta$ problemlos differenzieren und finden

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d\vec{e}}{d\theta}(\theta) = \vec{e}'(\theta) = \vec{e}_t(\theta) \text{ mit} \\ \vec{e}_t(\theta) = -\vec{e}_1\sin\theta + \vec{e}_2\cos\theta \end{array}}$$

Der hier eingeführte Vektor $\vec{e}_t(\theta)$ ist erneut ein Einheitsvektor und steht immer senkrecht auf $\vec{e}(\theta)$. Er zeigt in Richtung zunehmenden Winkels. Der Index t erinnert an "tangential". Denn er hat am Einheitskreis

tangentiale Richtung. Die Formeln für $\vec{e}$ und $\vec{e}_t$ sollten Sie sich gut merken. (Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{e}(\theta) \cdot \vec{e}_t(\theta)$.)
(11.1.39) Mit Hilfe dieser Grundformeln erhält man sofort folgende wichtige Ableitungen.

$$\boxed{\frac{d\vec{e}}{d\theta}(\theta) = \vec{e}'(\theta) = \vec{e}_t(\theta) \qquad \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}(\theta) = \vec{e}_t'(\theta) = -\vec{e}(\theta)}$$

(11.1.40) Jetzt kann man die Produktregel auf die Polardarstellungsformel anwenden und erhält:

$$\boxed{\vec{r}'(\theta) = r'(\theta)\vec{e}(\theta) + r(\theta)\vec{e}_t(\theta).}$$

Hiermit kann man sofort (bei gegebener Funktion) $\theta \mapsto r(\theta)$ **Richtungsvektoren der Tangenten** an die Figur bestimmen.

- ☐ Für r(θ) $= 2\pi\theta$ und $\theta > 0$ ergibt sich eine Spirale. Machen Sie eine Skizze der Bahnfigur und geben Sie eine Parametrisierung der Tangente zu einigen Bahnpunkten (=θ-Werten) an.
- ☐ In den Formelsammlungen wird für die üblichen ebenen Kurvenzüge auch immer eine Polardarstellung, also die zugehörige Funktion r=r(θ) angegeben. Testen sie einige Beispiele. Wieso gibt es im Fall der Ellipse mehrere solcher Darstellungen?

(11.1.41) Bisher haben wir geometrische Figuren und Kurvenzüge polar parametrisiert, aber noch keine Bewegungen beschrieben. Die **polare Beschreibung der Bewegungen** ist jetzt eine einfache Ergänzung: Um einen Punkt polar zu einem bestimmten Zeitpunkt festzulegen, muss man Polarwinkel und Radius festlegen. D.h. man muss benötigt zwei Zeitfunktionen $t \mapsto \theta(t)$ und $t \mapsto Länge(t)$. Da man in vielen Fällen die Bahnform kennt und man dafür schon die oben besprochene geometrische Funktion r hat, kann man in die Ausgangsformel (11.1.37) eingehen und findet für den Ort zur Zeit t:

$$\boxed{\boxed{\vec{r}(\mathrm{t})=\mathrm{r}(\theta(\mathrm{t}))\vec{e}(\theta(\mathrm{t})).}}$$

Nochmals: r(θ) legt hier die Form der Bahn fest und $\theta(t)$ die Geschwindigkeit, mit der diese Form durchlaufen wird. Also $Länge(t) = r(\theta(t))$.
(11.1.38) Die vektorielle Geschwindigkeit erhalten wir durch Ableiten. Da $r(\theta(t)) = r \circ \theta(t)$ ist und ebenso $\vec{e}(\theta(t)) = \vec{e} \circ \theta(t)$, hat man hier mit der Kettenregel zu arbeiten. Dabei ist (11.1.39) zu beachten. Es folgt:

$$\boxed{\begin{aligned}&\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{\theta}(t)r'(\theta(t))\vec{e}(\theta(t)) + r(\theta(t))\dot{\theta}(t)\vec{e}_t(\theta(t))\\ &= \dot{\theta}(t)\left(r'(\theta(t))\vec{e}(\theta(t)) + r(\theta(t))\vec{e}_t(\theta(t))\right)\end{aligned}}$$

In der Endform ist der gemeinsame Faktor $\dot{\theta}(t)$ ausgeklammert. Beachten sie, dass wir es hier erneut mit einer Spezialisierung der vektoriellen Zentralformel zu tun haben, bei der sich aber auch die Vektorfaktoren zeitlich ändern können.

11.2 Skalarfelder und Gradient

11.2.1 Skalarfelder

(11.2.1) Im Bereich physikalischer Anwendungen kommt es häufig vor, dass man jedem Punkt des geometrischen Raumes bzw. einer geeigneten Teilmenge desselben ("Beobachtungsgebiet") einen Zahlwert zuordnet: Der über der Erde herrschende Luftdruck, die Verteilung der Temperatur in einem Gebäude, die Dichte in einem inhomogenen Körper usw. Im geometrischen Bereich kann man jedem Punkt seinen Abstand von einem Ursprung zuordnen oder den Winkel des Ortsvektors mit einer Polachse. Vgl. Kap.2.1. All diese Zuordnungen führen zu einem Typ mathematischer Abbildungen, die man *Skalarfelder* zu nennen pflegt. Vgl. (3.4.1). In der Abbildungsterminologie handelt es sich dabei um Abbildungen der folgenden Struktur:

$$\boxed{s = (G, \vec{x} \mapsto s(\vec{x}), \mathbb{R}) \text{ mit } G \subset V_0^3 \text{ oder } \mathbb{R}_K^3 \text{ oder } \mathbb{R}^3}.$$

Die Urbildmenge ist stets eine Teilmenge eines geometrisch interpretierbaren Raumes, eines Konfigurationsraumes. Wählt man alternativ V_0^2 oder $\mathbb{R}_K^2$ oder $\mathbb{R}^2$, so spricht man von einem *ebenen Skalarfeld.* Der

Wertebereich eines Skalarfeldes ist immer eine Menge skalarer Größen, vielfach eine Zahlwert mit zugehöriger fester Einheit. Im Falle der Bahnkurven war es genau umgekehrt. Dort war der Wertebereich vektoriell und der Urbildbereich skalar.
(11.2.2) Über die Zuordnung wird zunächst nichts gesagt. In den uns interessierenden Fällen soll sie jedoch glatt sein, was sich in einer (noch einzuführenden) Differenzierbarkeitseigenschaft äußert: Die Abbildung soll in jedem Punkt eine Tangentenzerlegung zulassen.
(11.2.3) Den **Zugang zu den Eigenschaften der Skalarfelder** kann man gewinnen, indem man ganz analog zur Einführung der reellen Funktionen vorgeht:

- Einführung einer Grundausstattung besonders wichtiger Skalarfelder
- Neukonstruktion von Skalarfeldern aus gegebenen / Bau der Berechnungsterme
- Methoden der Verhaltensveranschaulichung (analog zum Graphen)
- Ausdehnung der Tangentenzerlegung
- Ableitungsregeln
- Koordinatendarstellung - Funktionen mehrerer Veränderlicher

Nur der letzte Punkt ist vektortypisch neu gegenüber der Diskussion der reellen Funktionen.

11.2.1a **Der Termbau von Skalarfeldern**

(11.2.4) Beginnen wir mit der **Grundausstattung**. Zwei elementare Felder kommen immer wieder vor, so dass man sie gut beherrschen sollte. Wir wählen als Urbildraum den V_0^3. Alle anderen Räume gehen analog.

$$\boxed{(V_0^3,\vec{x}\mapsto|\vec{x}|,\mathbb{R}) \text{ und } (V_0^3,\vec{x}\mapsto(\vec{a}\cdot\vec{x}),\mathbb{R})}$$

Dabei ist der Vektor $\vec{a}$ äußerer Parameter. Das Produkt ist das Skalarprodukt. In beiden Fällen kann man als Urbildbereich maximal den gesamten Konfigurationsraum wählen. Dem Vektor wird jeweils eine Zahl zugeordnet, die man mit Hilfe des Rechentermes bestimmen kann.
(11.2.5) Neubildung: Aus gegebenen Skalarfeldern ist es leicht, weitere neue Skalarfelder zu bilden. Dabei geht man vor wie im Fall der Funktionen. Man überträgt die Verknüpfungen der reellen Zahlen auf die Felder. Sind etwa s und t zwei solche Felder, dann gibt es dazu neue Felder, die mit s+t und s·t bezeichnet werden sollen und die wie folgt definiert sind:

$$s+t=(V_0^3,\vec{x}\mapsto s(\vec{x})+t(\vec{x}),\mathbb{R}) \qquad s\cdot t=(V_0^3,\vec{x}\mapsto s(\vec{x})\cdot t(\vec{x}),\mathbb{R})$$

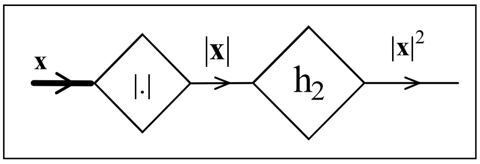
Denn für jedes $\vec{x}$ sind ja $s(\vec{x})$ und $t(\vec{x})$ zwei **Zahlen**, die addiert oder multipliert werden können. Weitere derartige Bildungen gehen ganz analog, so dass wir sie nicht mehr ausdrücklich einführen wollen.
(11.2.6) Eine Ausnahme macht die **Zusammensetzung**. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten der Ausdehnung, von denen wir nur eine besonders wichtige besprechen wollen. Dabei geht man wie folgt vor: Sei s Skalarfeld und f reelle Funktion. Dann ist $f\circ s$ mit $f\circ s(\vec{x})=f(s(\vec{x}))$ erneut ein Skalarfeld. Oder in Pfeilsymbolik:

V_0^3	$\to$	$\mathbb{R}$	$\to$	$\mathbb{R}$
$\vec{x}$	$\overset{s}{\mapsto}$	$s(\vec{x})$	$\mapsto$	$f(s(\vec{x}))$
		y	$\overset{f}{\mapsto}$	f(y)

Also: **Nachdem $\vec{x}$ durch s zur Zahl wird, wird diese Zahl durch f weiter verarbeitet.**
(11.2.7) Mit den eingeführten Verfahren können wir problemlos beispielsweise die folgenden Rechenausdrücke bilden oder analysieren:

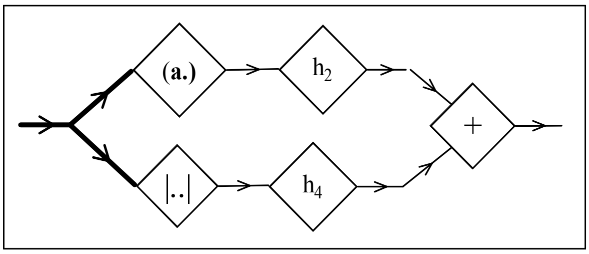
$\vec{x}\mapsto 2\,\lvert\vec{x}\rvert+(\vec{a}\cdot\vec{x})$	$\vec{x}\mapsto\lvert\vec{x}\rvert^2=\vec{x}^2$	$\vec{x}\mapsto\frac{e^{-\vec{x}^2}}{1+\vec{x}^2}$
$\vec{x}\mapsto\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})}{\lvert\vec{x}\rvert^3}$	$\vec{x}\mapsto\sin(\alpha\vec{x}^2)$	usw.

(11.2.8) Es ist naheliegend und günstig, den Bau solcher Bildungen erneut mit Hilfe von **Verlaufsdiagrammen** zu verdeutlichen, die das *Schicksal* der hereinkommenden unabhängigen Variablen wiedergeben. Zu unseren alten Bauteilen müssen wir einige weitere hinzunehmen : Ein Vektorleitungselement sowie die zugehörige Leitungsverdopplung. Und ein Symbol für elementare Skalarfelder, das aus einem Vektor eine Zahl macht. Wir erreichen dies, indem wir einfach alle Vektorleitungen fett zeichnen. So können wir etwa $\vec{x} \mapsto \vec{x}^2$ wie folgt analysieren:



Dies ist ein wichtiges Feld. Jedem Punkt wird das Quadrat seines Ursprungsabstandes zugeordnet, nicht der Abstand selbst. Man sollte die beiden Felder nicht verwechseln.

Und für $\vec{x} \mapsto (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 + |\vec{x}|^4$ ergibt sich:



☐ Erstellen Sie Verlaufsdiagramme für die weiteren Beispiele aus (11.2.7).

☐ Für welche andere Art von Bauprinzip ist das folgende Skalarfeld ein Beispiel:

$$\vec{x} \mapsto ((\vec{a} \times \vec{x}) \cdot (\vec{b} \times \vec{x})) \ ?$$

☐ Wie ist das Skalarfeld $\vec{x} \mapsto |\vec{x} - \vec{a}| + \left|\vec{x} - \vec{b}\right|$ zu interpretieren?

(11.2.9) Eine weitere Methode zur Bildung von Skalarfeldern erfolgt mit Hilfe der Komponentenfunktionen. Wir werden sie am Ende des Abschnittes besprechen.

11.2.1b **Das Verhalten von Skalarfeldern**

(11.2.10) Jetzt kommen wir zu einem wichtigen Punkt in (11.2.3), der **Verhaltensveranschaulichung.** Im Gegensatz zum bisher behandelten Stoff benötigt man hier neue Ideen.

(11.2.11) Als besonders wichtiges Hilfsmittel erweisen sich die *Niveaumengen.* Bei dreidimensionalem Urbild G sind das *Niveauflächen,* bei zweidimensionalem G sind das *Niveaukurven.* Der intuitiv physikalische Hintergrund ist einfach: Man betrachtet geometrische Figuren, Punktmengen, auf denen der Feldwert konstant ist. Genauer die Menge aller Punkte, in denen das Feld denselben Wert (eine Zahl) hat. Stellt man sich insbesondere ein Temperaturfeld vor, dann werden alle Punkte zusammengefasst, in denen die Temperatur denselben Wert hat. Im Raum ist das eine Fläche. Typischerweise teilt sie - die Fläche - den Raum in zwei Bereiche: einen mit höherer und einen mit niederer Temperatur. Will man von einem Bereich in den anderen, so muss man die Grenzfläche, also die ausgesonderte Niveaufläche passieren. Das ist ein ganz charakteristisches geometrisches Merkmal dieser Mengen. Nur einige Sonderfälle bilden eine Ausnahme.

☐ Wie sehen die Niveauflächen des Feldes $\vec{x} \mapsto |\vec{x}|$ aus?

(11.2.12) Ist der Rechenausdruck s($\vec{x}$) des Skalarfeldes gegeben, hat man die Gleichung s($\vec{x}$) $= c$ zu lösen. Rollenverteilung: $\vec{x}$ Unbestimmte, c=vorgegebener Feldwert und damit äußerer Parameter.

(11.2.13) Da in jedem Punkt von G ein bestimmter Feldwert (ein Temperaturwert) vorliegt, wird der gesamte Raum durch die Niveaumengen erfasst! Es ist wie ein System von Zwiebelschalen, das ganz G ausfüllt.

☐ Formulieren Sie die Niveaumenge (von s zum Wert c) mit der in (7.1.17) beschriebenen Mengensymbolik.

(11.2.13) Im Falle unserer beiden Grundfelder sind die Niveausmengen leicht anzugeben: $|\vec{x}|$=const. heißt fester Abstand zum Ursprung. Das ergibt eine **Kugelschale**. Und der Feldwert aller Punkte der Fläche ist ihr Abstand zum Ursprung.

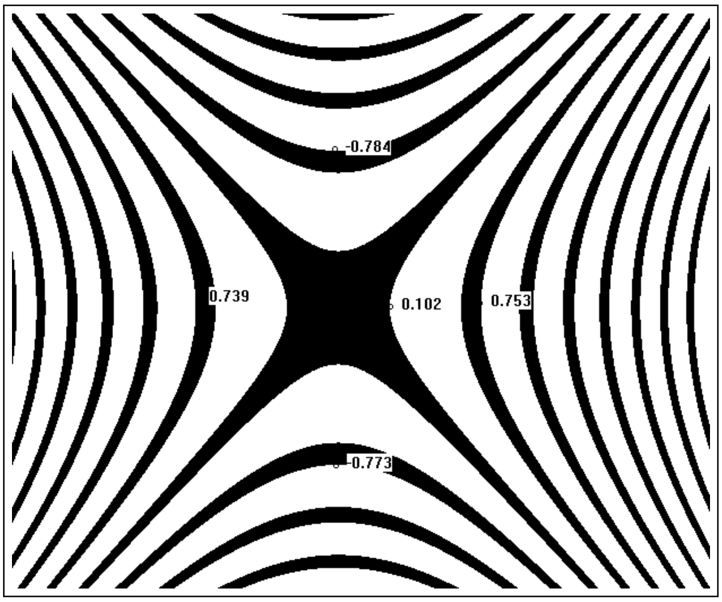
Im Falle von $\vec{x} \mapsto (\vec{a} \cdot \vec{x})$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ sind die Niveaumengen Ebenen senkrecht zu $\vec{a}$. Denn $(\vec{a} \cdot \vec{x}) = c$ hat als Lösungsmenge eine ebensolche Ebene, wie wir seit Einführung des Skalarproduktes wissen! Vgl (6.1.38-40).
(11.2.14) Zur zeichnerischen Veranschaulichung kann man natürlich nicht alle Flächen zeichnen. Vielmehr wird man eine Auswahl geeigneter Feldwerte treffen und von den zugehörigen Flächen wird man dann geeignete Ausschnitte zeichnen. Bei einer solchen Figur extrapoliert und interpoliert das Vorstellungsvermögen dann meist unmittelbar, so dass eine halbquantitative Vorstellung vom ganzheitlichen Feldverhalten entsteht. An die gezeichneten Flächen kann man dann noch die jeweiligen Feldwerte notieren.

Bild

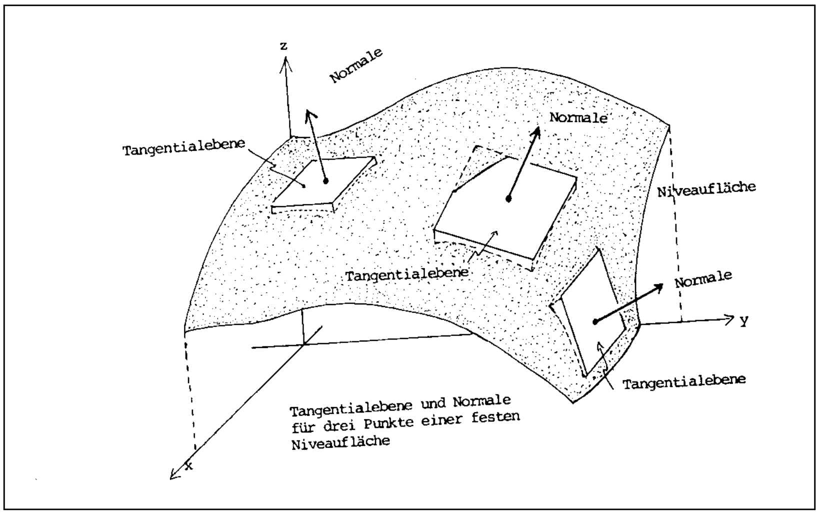
(11.1.15) In der Ebene wird man entsprechend eine Auswahl von Kurven gleichen Feldwertes zeichnen. (Diese Kurven heißen üblicherweise *Isolinien.* Etwa Isobaren oder Isothermen. Im Duden findet man Bezeichnungen für etwa 40 derartige Linien gleichen Feldwertes angeführt, die mit "Iso-" beginnen!). Beispiele:

$s(x,y) = x^2 - y^2$	$s(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$
Ebenes Skalarfeld	Räumliches Skalarfeld

Es kann auch sinnvoll sein, die Feldlinien (im ebenen Fall) zu verbreitern, also alle Punkte zu zeichnen mit einem Feldwert zwischen c und c+ε, wobei ε eine kleine Zahl ist. Breite Feldstreifen deuten dann kleine Feldänderung pro Weglänge an und schmale Feldstreifen eine große Feldänderung. Es folgt ein Beispiel für $s(x,y) = x^2 - y^2$.



(11.2.16) Kehren wir zum räumlichen Fall zurück und stellen wir uns vor, dass wir uns mit einer Feldmessapparatur an einem Punkte $\vec{x}_0$ befinden. Das Feld sei glatt und wir wollen sein Verhalten in der Nähe von $\vec{x}_0$ erkunden. Was werden wir beobachten? **Entlang der Niveaufläche keine Änderung**. Wenn wir nur einen ausreichend kleinen Bereich erforschen, wird dieser Teil der Niveaufläche wie ein Stück einer Ebene aussehen. Das ist die *Tangentialebene* an die Fläche in $\vec{x}_0$. (So wie ein kleines Stück eines glatten Funktionsgraphen nicht von einem Tangentenstück zu unterscheiden war). Geht man senkrecht zur Tangentialebene weiter, so findet man maximale Feldänderung pro Weglänge vor. Einmal maximale Zunahme und entgegengesetzt maximale Abnahme. Geometrisch ist daher folgende Struktur in jedem Punkt vorhanden und wichtig: **Eine Richtung, in der sich das Feld maximal ändert und die Ebene senkrecht dazu, in der näherungsweise lokal keine Änderung stattfindet**. Nur in einzelnen Ausnahmepunkten kann das anders sein.



☐ Übertragen Sie die Überlegungen des letzten Abschnittes sorgfältig auf den Fall eines ebenen Skalarfeldes. (Mit Skizzen!)

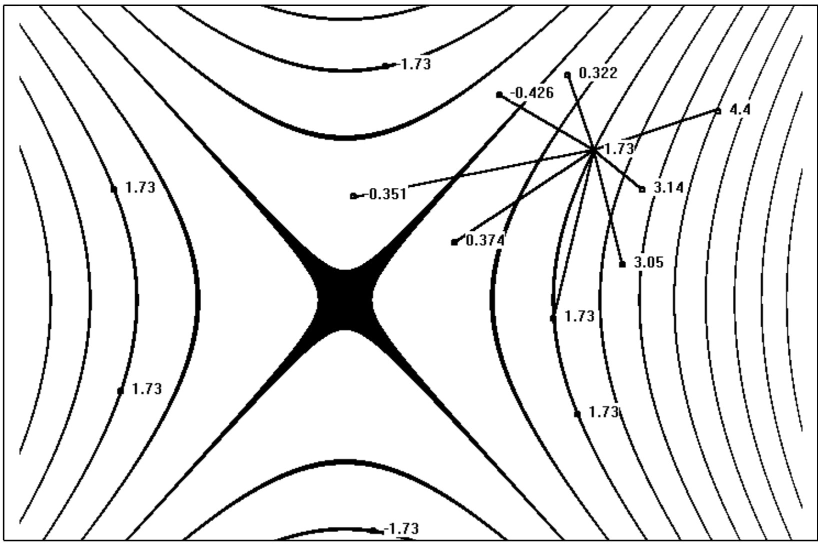
! Wir wollen uns einprägen, dass diese Struktur generell zu erwarten ist und sie als Orientierung für die weiteren Überlegungen verwenden.

☐ **Wichtig.** s sei ein glattes Skalarfeld und f eine glatte reelle Funktion. Die Niveaumengen von s seien bekannt. Wir bilden das neue Feld f∘s. Was lässt sich über die Niveaumengen des neuen Feldes sagen? Was ändert sich? Was bleibt gleich? Was lässt sich insbesondere über die Niveaumengen eines wie folgt gebauten Feldes sagen: $\vec{x} \mapsto f(|\vec{x}|)$?

11.2.2 **Die Tangentenzerlegung eines Skalarfeldes**

Damit ist der Vorbereitungsteil abgeschlossen und wir können uns daran machen, das Stichwort *Tangentenzerlegung für Skalarfelder* aus der Liste (11.2.3) zu behandeln.

(11.2.17) Zuerst das Szenenbild. Gegeben ein Skalarfeld s, dazu ein Aufpunkt $\vec{x}_0$ und ein Zuwachsvektor $\Delta\vec{x}$ in irgendeine von $\vec{x}_0$ ausgehende Richtung. Uns interessiert $s(x_0 + \Delta\vec{x})$ oder auch die **Feldänderung**, also $s(x_0+\Delta\vec{x})-s(x_0)$. Unsere alte Frage: **Wie kann man mit möglichst wenig Aufwand lokal möglichst viel über diese Änderung herausbekommen?** Das Neue sind jetzt die vielen unterschiedlichen Richtungen, in die man im Urbildbereich mit Hilfe von $\Delta\vec{x}$ gehen kann. Das nachfolgende Bild zeigt das für ein ebenes Skalarfeld Die Feldlinien sind wieder Hyperbeln. Der Aufpunkt liegt an einer Stelle mit Feldwert Null, auf der Niveaulinie dieses Wertes.. Für die Endpunkte sind die Feldwerte mit eingezeichnet. Sie sind hier gleich der Feldänderung.



Skalarfeld $x^2 - y^2$
Aufpunkt $\vec{x}_0$, davon ausgehend verschiedene $\Delta\vec{x}$ mit Feldwert $s(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x})$

(11.2.18) Die Antwort versuchen wir erneut mit Hilfe einer verallgemeinerten Tangentenzerlegung zu geben. Jeder Summand muss jetzt eine Zahl sein. Das gibt Probleme für den zweiten linearen Term mit seinem Faktor $\Delta\vec{x}$. Um aus einem Vektor wie $\Delta\vec{x}$ eine Zahl zu bekommen, bietet sich das Skalarprodukt an. Und damit sind wir bei folgendem Ansatz:

$$\boxed{s(\vec{x}_0+\Delta\vec{x}) = s(\vec{x}_0)+\vec{m}\cdot\Delta\vec{x}+|\Delta\vec{x}|\,R(\vec{x}_0,\Delta\vec{x}).}$$

Im Fehler darf man kein Skalarprodukt ansetzen, wie die weiteren Überlegungen zeigen werden. Die gegebene Konstruktion liefert ebenso eine Zahl.

(11.2.19) Damit hat man einen Kandidaten für den Durchmarsch durch die Grundargumentation. Die Resttermforderung ist wieder klar: Sie muss lauten: **R geht nach Null, für $|\Delta\vec{x}|$ nach Null**.

(11.2.20) Die Tangentenapproximation schreibt sich jetzt (leicht umgeformt) wie folgt

$$\boxed{\mathrm{s}(\mathrm{x}_0+\Delta\vec{x})\text{-}\mathrm{s}(\mathrm{x}_0)=\vec{m}\cdot\Delta\vec{x}}$$

D.h. die Feldänderung ist näherungsweise (”in linearer Näherung”) gleich dem Skalarprodukt des über die Tangentenzerlegung eingeführten Vektors $\vec{m}$ und dem Lageänderungsvektor $\Delta\vec{x}$.

☐ Beweisen Sie die **Eindeutigkeit** der gegebenen Zerlegung. (Eine Komplikation: Man kommt bis $((\vec{m}_1-\vec{m}_2)\cdot\Delta\vec{x})=0$ für alle $\Delta\vec{x}$. Dann darf man nicht mehr durch $\Delta\vec{x}$ teilen! Man teilt stattdessen zulässigerweise durch $|\Delta\vec{x}|$ aus dem Fehler und erhält $((\vec{m}_1-\vec{m}_2)\cdot\frac{\Delta\vec{x}}{|\Delta\vec{x}|})$, man ersetzt $\Delta\vec{x}$ durch $\alpha\Delta\vec{x}$ und lässt α nach Null gehen Jetzt kann man die Resttermeigenschaft nutzen und erhält $((\vec{m}_1-\vec{m}_2)\cdot\frac{\Delta\vec{x}}{|\Delta\vec{x}|})=0$,. Abschließende argumentiert man: *Wenn ein Vektor auf allen Richtungsvektoren senkrecht steht, dann.....)*

(11.2.21) Mit der Eindeutigkeit haben wir wie üblich die beiden Denkfiguren zur Verfügung und dürfen dem Vektor $\vec{m}$ einen charakteristische Namen geben:

Wir bezeichnen $\vec{m}$ mit grads$(\vec{x}_0)$. Gelesen: Der Gradient von s in $\vec{x}_0$. Weitere Bezeichnungsweisen: s$'(\vec{x}_0)$ oder $\vec{\partial}s(\vec{x}_0)$ oder $\bigtriangledown s(\vec{x}_0)$

$\vec{m}$ ist der Vektor, der in einer nachgewiesenen Tangentenzerlegung Partnerfaktor im Skalarprodukt mit $\Delta\vec{x}$ ist.

(11.2.22) Wir testen die erste Denkfigur an einem einfachen Beispiel: $s(\vec{x})=\vec{x}^2$. Es folgt mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt:

$$(\vec{x}_0+\Delta\vec{x})^2=\vec{x}_0^2+(2\vec{x}_0\cdot\Delta\vec{x})+|\Delta\vec{x}|\cdot|\Delta\vec{x}|$$

Die Restermbedingung ist für $R(\vec{x}_0,\Delta\vec{x})=|\Delta\vec{x}|$ erfüllt. Wir finden

$$grads(\vec{x}_0)=2\vec{x}_0 \text{ oder } \mathrm{grad}(\vec{x}_0^2)=2\vec{x}_0.$$

Die 2. Schreibweise ist lax, aber zu nicht selten zu finden. Sie sollte zunächst eher vermieden werden. Gemeint ist eigentlich immer eine Beklammerung (grads)$(\vec{x}_0)$, da der Wert s$(\vec{x}_0)$ allein zur Bestimmung des Gradienten nicht ausreicht.

☐ Bestimmen Sie über die erste Denkfigur den Gradienten von $s_2(\vec{x})=(\vec{x}^2)^2$. Ergebnis ist $grad(s_2(\vec{x}_0))=2\vec{x}_0\vec{x}_0^2$. Und allgemeiner für $\mathrm{s}_n(\vec{x})=(\vec{x}^2)^n$ für n=1,2,3,....

(11.2.23) Jetzt können wir versuchen, unser rechnerisches Resultat mit den zuvor gewonnenen geometrischen Vorstellungen zu verbinden. Genauer, unsere intuitiven geometrischen Vorstellungen zu präzisieren und zu rechtfertigen.

(11.2.24) Wir nehmen $grads(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$ an und wählen $\Delta\vec{x}$ senkrecht zu $grads(\vec{x}_0)$. Das ist möglich, da $\Delta\vec{x}$ ja unabhängige Variable ist. Dann folgt in Tangentenapproximation $s(\vec{x}_0+\Delta\vec{x})-s(\vec{x}_0)=0$. Keine Feldänderung! Wir bewegen uns in eine Richtung, die in der Tangentialebene zur Niveaufläche liegt! Oder auch: **Die Ebene senkrecht zum Gradienten ist die Tangentialebene an die Niveaufläche in $\vec{x}_0$!**. (Aber Achtung: Voraussetzung ist $grads(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$!)

(11.2.25) Allgemeiner können wir die Änderung von s in Tangentenapproximation auch mit Hilfe der geometrischen Form des Skalarproduktes ausrechnen. Das gibt:

$$\boxed{s(\vec{x}_0+\Delta\vec{x})\text{-}\mathrm{s}(\vec{x}_0)=grads(\vec{x}_0)\cdot\Delta\vec{x}=|grads(\vec{x}_0)|\,|\Delta\vec{x}|\cos(\theta).}$$

Hierbei bezeichnet θ den Winkel zwischen dem Gradienten und dem Vektor $\Delta\vec{x}$. Erneut sehen wir: Ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, dann ist die Änderung (in Tangentenapproximation) Null. Ist θ dagegen Null, dann ist die Änderung Δs maximal gleich $|grads(\vec{x}_0)|\,|\Delta\vec{x}|$. Oder auch

$$\frac{\Delta s}{|\Delta\vec{x}|} = |grads(\vec{x}_0)|\,.$$

! D.h.: Der Betrag des Gradientenvektors ist gleich der (maximalen Feldänderung) pro Weglänge.

(11.2.26) Damit besitzen wir eine vollständige geometrische Charakterisierung des Gradienten:

■	Die Richtung des Gradienten gibt die Richtung
	stärkster Feldzunahme!
■	Der Betrag des Gradienten ist gleich der
	(stärksten Feldänderung) pro Weglänge!

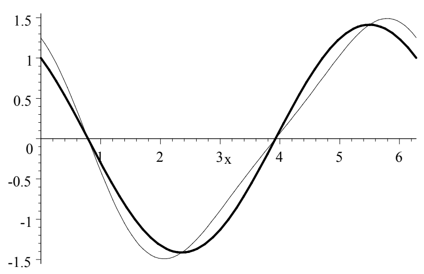
(11.2.27) Kennen wir den Gradienten, dann haben wir mit $\Delta s = (grads(\vec{x}_0)\cdot\Delta\vec{x})$ eine Näherungsformel für die Feldänderung und wir können die Tangentialebenen an die einzelnen Punkte berechnen. Der Gradient ist ja ein zugehöriger Normalenvektor. Lösung der Gleichung $grads(\vec{x}_0)\Delta\vec{x} = 0$ gibt uns Richtungsvektoren der Tangentialebene!

☐ Die Temperatur über der (eben angenommenen) Erdoberfläche nimmt näherungsweise um 1 Grad pro 100 Meter Höhe ab. Wie sieht dann der Temperaturgradient aus, wie die Niveauflächen?

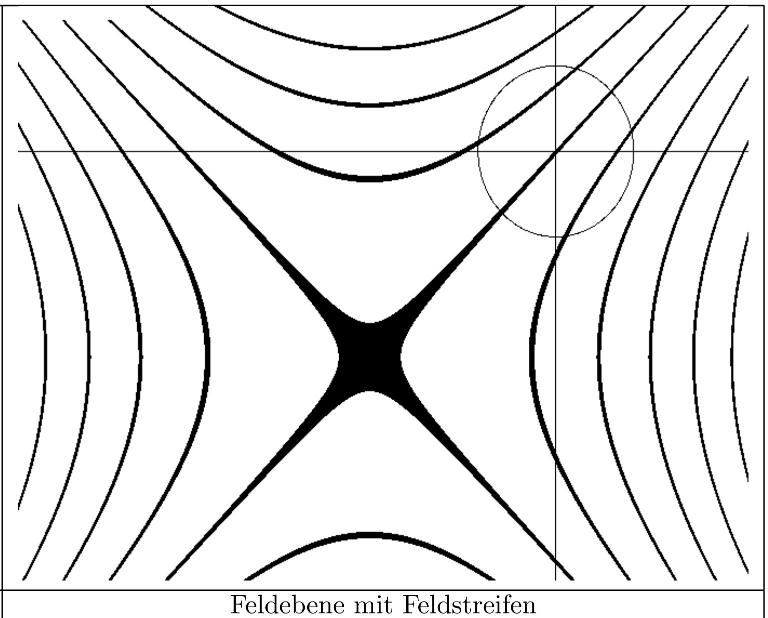
(11.2.28) Zur Veranschaulichung können wir auch das nachfolgende Gedankenexperiment vornehmen. Dabei beschränken wir uns auf ein ebenes Skalarfeld: Wir schlagen um $\vec{x}_0$ einen kleinen Kreis mit Radius r und verfolgen den Feldverlauf auf diesem Kreis. Genauer betrachten wir die Feldänderung gegenüber dem Kreismittelpunkt. Der zu den Kreispunkten führende Verschiebungsvektor ist $\Delta\vec{x} = r\vec{e}(\theta)$, wenn θ ein Polarwinkel ist. θ_0 sei der Winkel, der zur Gradientenrichtung, also zur Richtung stärksten Feldwachstums gehört. Das bedeutet: $\text{grads}(\vec{x}_0) = \vec{e}(\theta_0)\,|grads(\vec{x}_0)|$. Dann ist die Feldänderung eine Funktion von θ. Jetzt tragen wir die **Feldänderung** einmal in Tangentenapproximation auf und einmal exakt. Das ergibt die folgenden beiden Funktionen:

$$\begin{aligned}
\theta &\mapsto (grads(\vec{x}_0)\cdot\Delta\vec{x}) = r\,|grads(\vec{x}_0)|\cos(\theta-\theta_0) \\
\theta &\mapsto s(\vec{x}_0 + r\vec{e}(\theta)) - s(\vec{x}_0)
\end{aligned}$$

Damit hat man ein Anhalt für die Art der Feldänderung bei Umlauf um den Aufpunkt und ebenso für die Genauigkeit der Tangentenapproximation. Je kleiner man r wählt, desto geringer wird der Unterschied der beiden Funktionen sein. Die cos-Form für die lineare Approximation liegt immer fest.



Fett die Approximation, dünn exakt. Startposition: x-Achse! θ_0 ist hier $-\frac{\pi}{4}$



Feldebene mit Feldstreifen Aufpunkt und Rundlauf.

(11.2.29) Mit Hilfe der soeben gefundenen geometrischen Interpretation des Gradienten können wir den Gradienten für das Betragsfeld $\vec{x} \mapsto |\vec{x}|$ angeben. Zunächst die Richtung: Die Niveauflächen sind Kugeln um den Ursprung. Daher stehen die Tangentialebenen senkrecht auf den zugehörigen Aufpunktvektoren $\vec{x}_0$. Der Feldwert ist gleich dem Abstand. Dieser nimmt zu, wenn man sich vom Ursprung entfernt. Also ist die Richtung des Gradienten gleich der Richtung von $\vec{x}_0$. Der Betrag des Gradienten ist 1, denn die Feldänderung (in radialer Richtung) ist gleich der Wegänderung. Also folgt:

$$\boxed{\text{Für } \vec{x} \mapsto b(\vec{x}) = |\vec{x}| \text{ ist } grad b(\vec{x}_0) = \tfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}$$

Eine wichtige und zu merkende Formel.
(11.2.30) Es gab immer den Ausnahmefall grads$(\vec{x}_0) = \vec{0}$. In diesem Fall ergibt die Tangentenapproximation keinerlei Feldänderung! Man kann keine Tangentialmenge bilden und erhält keine geometrische Information.
☐ Konkretisieren Sie den Ausnahmefall, indem Sie s(x,y)=x$^2 - y^2$ für $\vec{x}_0 = (0,0)$ betrachten. Bestimmen sie den Gradienten für diesen Punkt, die Änderung in Tangentenapproximation und die exakte Änderung! (Der Restterm ergibt sich hier zu $(\Delta x^2 - \Delta y^2)/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Er erfüllt die Resttermbedingung, wie sie als zusätzliche Übung nachweisen können.)

11.2.3 Methoden zur rechnerischen Bestimmung des Gradienten

(11.2.31) Wir kennen bisher 2 derartige Methoden. Die direkte über die 1. Denkfigur zur Tangentenzerlegung und die zweite über die Ableitungsregeln. Für beide noch einige Beispiele:
(11.2.32) Sei $s(\vec{x}) = \vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})^2$. Die direkte Zerlegung mit Sortieren nach Potenzen in $\Delta\vec{x}$ gibt:

$$\begin{aligned} s(\vec{x}+\Delta\vec{x}) &= (\vec{x}+\Delta\vec{x})^2(\vec{a}\cdot(\vec{x}+\Delta\vec{x}))^2 \\ &= (\vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\Delta\vec{x} + \Delta\vec{x}^2)(\vec{a}\cdot\vec{x} + \vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2 \\ & \quad (\vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\Delta\vec{x} + \Delta\vec{x}^2)((\vec{a}\cdot\vec{x})^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{a}\cdot\Delta x) + (\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2) \\ &= \vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x}) + (2\vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}) + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})^2(\vec{x}\cdot\Delta\vec{x})) + \ldots.. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die sechs in Δx mehr als linearen Beiträge nur noch durch ..... angedeutet. Das gibt für den Gradienten

$$\boxed{grads(\vec{x}) = 2\vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a} + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})^2\vec{x}}$$

(11.2.33) Im Gegensatz zum Feld selbst ist der Gradient **immer ein Vektor!**. Inspizieren Sie den Aufbau dieses Vektors im Falle des Beispiels genau. D.h.vergleichen Sie

$$s(\vec{x}) = \vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 \quad \text{und} \quad 2\vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a} + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})^2\vec{x} \;\; .$$

(11.2.34) Jetzt zur Anwendung der Ableitungstregeln. Besonders wichtig, da immer wieder vorkommend, sind Felder des Typs $\vec{x} \mapsto f(|\vec{x}|)$. Die Kettenregelmethode und das Resultat (11.2.29) liefert hier sofort das Ergebnis:

$\vec{x}$	$\mapsto$	$\|\vec{x}\|$		
		y	$\mapsto$	$f(y)$
	$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$		$f'(y)$	$= f'(\|\vec{x}\|)$

D.h.- und das ist mit etwas Übung für konkrete Felder sofort hinschreibbar:

$$\boxed{gradf(|\vec{x}|) = f'(|\vec{x}|)\tfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}.$$

☐ Konkretisieren Sie das für f(r)=$\frac{1}{r}$, f(r)=r^2 f(r)=r^n und f(r)=e$^{-ar^2}$.
(11.2.35) Für das erste Beispiel s$(\vec{x}) = \vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})^2$ benötigen wir Ketten- **und** Produktregel. Dann verläuft die Anwendung erneut problemlos, sofern man nur darauf achtet, immer sorgfältig zwischen Vektor- und Zahlterm zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} grads(\vec{x}) &= grad(\vec{x}^2)(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 + \vec{x}^2 grad((\vec{a}\cdot\vec{x})^2) \\ &= 2\vec{x}(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 + 2\vec{x}^2(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a} \end{aligned}$$

Das ist das alte Resultat.
(11.2.36) Ein Feld wie $s(x,y)=x^2-y^2$ können Sie wegen $x=(\vec{x}\cdot\vec{e}_1)$ und $y=(\vec{x}\cdot\vec{e}_2)$ wie folgt schreiben: $s(\vec{x})=(\vec{x}\cdot\vec{e}_1)^2-(\vec{x}\cdot\vec{e}_2)^2$. Anwenden der Ableitungsregeln gibt sofort: $grads(\vec{x}_0)=2x_0\vec{e}_1-2y_0\vec{e}_2$.

11.2.4 Die Koordinatendarstellung der Skalarfelder

(11.2.37) Bisher haben wir koordinatenfrei gerechnet: Alle abgeleiteten Resultate gelten natürlich auch für Koordinatenräume wie $\mathbb{R}^3_K$ oder den $\mathbb{R}^3$, denn sie wurden ja mit Hilfe der Vektorraumstruktur hergeleitet, die auch in diesen Räumen verfügbar ist. Die Frage, die verbleibt, lautet: Was kann man noch ergänzen und verbessern, wenn man die zusätzliche Koordinatentupelstruktur mit ausnutzt?
(11.2.38) Wir gehen in zwei Schritten vor: Zunächst untersuchen wir, wie Koordinatendarstellungen von Skalarfeldern aussehen und dann fragen wir, wie die Koordinatendarstellung des Gradienten aussieht und zu erhalten ist.
(11.2.39) Ein Skalarfeld auf dem reinen $\mathbb{R}^3$, also $s=(\mathbb{R}^3,(x,y,z)\mapsto s(x,y,z),\mathbb{R})$ ist das, was man gerne eine *Funktion von 3 reellen Veränderlichen* nennt. In den Anwendungen können die drei Veränderlichen Dinge sein, die wenig oder nichts miteinander zu tun haben, die aber in der betrachteten Situation die Rolle von Variablen haben. So kann x für eine Länge, y für eine Temperatur und z für eine Dichte stehen. Die Unterschiedlichkeit macht sich dann bereits in den Einheiten bemerkbar. Vorgeben kann man ein solches Skalarfeld einfach durch **Vorgabe eines Rechenausdrucks**, der aus drei Variablen eine Zahl macht. Etwa:

$$(L,T,g)\mapsto\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

(11.2.40) Anders ist es mit Skalarfeldern auf $\mathbb{R}^3_K$, denn diese rühren in der Regel von einem Skalarfeld auf V^3_0 oder eventuell V^3 her. So wie nach Kap.2.4.2 ein Koordinatenvektor $\vec{x}^K$ zu einem geometrischen Pfeil $\vec{x}$ gehörte. Intuitiv muss man im Rechenausdruck einfach $\vec{x}$ durch $\vec{x}^K=(x,y,z)$ ausdrücken und dann per Rollenwechsel zu den drei Koordinaten als neuen unabhängigen Veränderlichen übergehen. Das gibt dann im Sinne der mathematischen Abbildung eine neue Funktion, die auf andere Weise denselben Sachverhalt beschreibt.
(11.2.41) Sei s:$V^3_0\to\mathbb{R}$ das Ausgangsfeld, K sei ein kartesisches Koordinatensystem und wie üblich sei $\vec{x}^K=(x,y,z)$ der zu $\vec{x}$ gehörige Koordinatenvektor. Dann führen wir das Koordinatenfeld s^K durch die folgende Bedingung ein:

$$\boxed{s^K(\vec{x}^K)=s^K(x,y,z)=s(\vec{x}).}$$

D.h. der Feldwert für s^K an der durch $\vec{x}^K=(x,y,z)$ beschriebenen Stelle soll gleich dem Feldwert von s an der Stelle mit Ortsvektor $\vec{x}$ sein. Beispielsweise gilt:

$\vec{b}(\vec{x})=\lvert\vec{x}\rvert$		$\vec{b}^K(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}$		$\vec{p}^K_{\vec{a}}(x,y,z)=a_1x+a_2y+a_3z$

Im zweiten Fall wird man vielfach das Koordinatensystem so legen, dass $\vec{a}$ in z-Richtung zeigt. Für dies K gilt dann $\vec{p}^K_{\vec{a}}(x,y,z)=az$.
(11.2.42) Merke und beachte: Ist s geometrisch gegeben, so sollte man darauf achten, ob man durch geschickte Koordinatenwahl eine günstige Koordinatendarstellung s^K erhalten kann. (Vgl. (4.5.11).)
☐ Sei $\vec{d}(\vec{x})=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})}{\vec{x}^3}$. Geben Sie $\vec{d}^K(\vec{x}^K)$ an!
(11.2.43) Durch Vorgabe eines Rechenausdrucks $s(x,y,z)$ bzw. $s^K(x,y,z)$ kann man ein Skalarfeld in Koordinatenform vorgeben. Das ist die zusätzliche in (11.2.9) erwähnte Methode zur Festlegung von Skalarfeldern.

$$s(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^4+z^6}}.$$

(11.2.44) Sei s ein Skalarfeld und s^K eine zugehörige Koordinatendarstellung. Weiter sei grads($\vec{x}$) der zugehörige Gradient (in V^3_0, also in der Form eines geometrischen Pfeiles). Dann können wir die Koordinatendarstellung des Gradienten in der üblichen Weise bilden, also den Koordinatenvektor $(\mathrm{grads}(\vec{x}))^K$. Diesen Koordinatenvektor möchten wir noch auf eine neue, unabhängige Weise gewinnen. Beispielsweise ist

für $b(\vec{x}) = |\vec{x}|$ der Gradient $\mathrm{grad}b(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Also $(\mathrm{grad}b(\vec{x}))^K = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Dies möchten wir direkt aus $\vec{b}^K(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ gewinnen.
(11.2.45) Man kann sich die beiden Wege auch in einem Zuordnungsdiagramm verdeutlichen:

s	$\overset{K}{\mapsto}$		s^K
$\downarrow$			$\downarrow$
grads($\vec{x}$)	$\overset{K}{\mapsto}$	$(\mathrm{grads}(\vec{x}))^K$	=???

Den fehlenden Eintrag können wir bisher nur so füllen, dass wir in $\mathbb{R}^3$ die Resttermeigenschaft prüfen. Darum haben wir uns bisher etwas gedrückt, da wir gleich eine bessere allgemeine Methode kennenlernen werden. Inspiziert man das Programm (11.2.3) für diesen Fall, dann sieht man, dass die Lücke vornehmlich dadurch entsteht, dass wir im Koordinatenfall die Frage nach der Grundausstattung nicht diskutiert haben.

11.2.5 **Der Gradient von Koordinatenfunktionen: Partielle Ableitungen**

(11.2.46) Sei $s : (x,y,z) \mapsto s(x,y,z)$ ein Koordinatenskalarfeld. Den Fall s^K schließen wir mit ein. Dann ist der zugehörige Gradient ein Vektor aus $\mathbb{R}^3$ (bzw $\mathbb{R}^3_K$) , hat also die Form $grads(x,y,z) = (grad_1 s(x,y,z), grad_2(x,y,z), grad_3(x,y,z))$ mit selbsterklärenden Bezeichnungen. Wir suchen nach eine Methode zur Bestimmung dieser drei Komponenten.
(11.2.47) Die Feldänderung unter $\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ wird durch ein Skalarprodukt gegeben und dieses können wir jetzt in der Komponentenform auswerten:

$$\begin{aligned}\Delta s &= grads(x,y,z)\cdot\Delta\vec{x}\\ &= \Delta x\cdot grad_1 s(x,y,z) + \Delta y\cdot grad_2 s(x,y,z) + \Delta z\cdot grad_3 s(x,y,z)\end{aligned}$$

(11.2.48) Wir kennen den Gradienten, sobald wir seine drei Komponenten kennen. **Die Idee ist**: Wähle $\Delta\vec{x}$ so, dass wir gezielt eine dieser drei Komponenten erhalten. Wählen wir beispielsweise $\Delta\vec{x} = (\Delta x, 0, 0) = \Delta x\vec{e}_1$, dann zeigt die Formel für Δs, dass wir die erste Komponente des Gradienten erhalten.
(11.2.49) Die Tangentenzerlegung besagt (als gültige Gleichung) für dieses $\Delta\vec{x} = (\Delta x, 0, 0)$:

$$s(x_0+\Delta x, y_0, z_0) = s(x_0,y_0,z_0) + \Delta x\cdot grad_1 s(x,y,z) + |\Delta x|\, R(\vec{x}_0^K, \Delta x\vec{e}_1^K)$$

(11.2.50) Aber die linke Seite lässt sich auch als Zuordnung in Δx interpretieren

$$\Delta x \mapsto s(x_0+\Delta x, y_0, z_0)$$

Das ist eine **gewöhnliche reelle Funktion**, die geometrisch wie folgt entsteht: Laufe auf einer Parallelen zur 1-Achse durch den Punkt $\vec{x}_0^K$ und vermesse dabei den Feldwert in Abhängigkeit von Δx. Für diese Funktion selbst ist keine Bezeichnung üblich. Wir geben ihr auch hier keinen speziellen Namen. Aber die Funktion kann auch differenziert werden (bei $\Delta x = 0$) und für die entstehende Ableitung ist eine Bezeichnung üblich. Man schreibt die zugehörige Tangentenzerlegung wie folgt:

$$\boxed{\mathrm{s}(\mathrm{x}_0+\Delta\mathrm{x},\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0)=\mathrm{s}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_o)+\Delta\mathrm{x}\frac{\partial s}{\partial x}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0)+\Delta\mathrm{x}\mathrm{R}(\vec{x}_0^K,\Delta\mathrm{x})}$$

oder kürzer:

$$\boxed{\mathrm{s}(\vec{x}_0^K+\Delta\mathrm{x}\cdot\vec{e}_1^K)=\mathrm{s}(\vec{x}_0^K)+\Delta\mathrm{x}\frac{\partial s}{\partial x}(\vec{x}_0^K)+\ldots\ldots}$$

Also: $\frac{\partial s}{\partial x}(\vec{x}_0^K)$ bezeichnet die gewöhnliche Ableitung (im Ursprung) der oben gegebenen namenlosen Funktion. Man nennt die Konstruktion "die partielle Ableitung von s nach x."
(11.2.51) Man kann auch sagen: Man nimmt für die drei Koordinaten einen Rollenwechsel vor: Die erste bleibt unabhängige Variable, die zweite und dritte werden zu äußeren Parametern. So wird aus der Funktion von drei Veränderlichen eine mit nur einer Veränderlichen, die man ganz gewöhnlich differenzieren kann.

Die **Konstruktion nochmals zusammengefasst:**

■	Nehme in s(x,y,z) Rollenwechsel vor:
	Bilde $\Delta x \mapsto$s($x_0 + \Delta x, y_0, z_0$)
	mit x_0, y_0, z_0 äußere Parameter.
■	Differenziere diese gewöhnliche Funktion in x_0.
■	Die Ableitung heißt "die partielle Ableitung von s nach x"
	Bezeichnung: $\frac{\partial s}{\partial x}(\vec{x}_0^K)$.

(11.2.52) Vergleichen wir jetzt die beiden Darstellungen aus (11.2.49) und (11.2.50), dann folgt **aus der Eindeutigkeit der** Tangentenzerlegung - also der ersten Denkfigur - sofort:

$$\boxed{grad_1 s(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}$$

Oder: **Die partielle Ableitung nach x liefert uns die erste Komponente des Gradienten**!
(11.2.53) Offensichtlich können wir analog die partiellen Ableitungen nach y und z bilden und erhalten damit die beiden anderen Komponenten des Gradienten.
(11.2.54) Damit sind wir am Ziel: Wir können die drei Komponenten des Gradienten vollständig mit Hilfe geeigneter Koordinatenrechnungen ausführen. Somit gilt für eine Koordinatenfunktion s:

$$\boxed{\begin{aligned} &grads(\vec{x}^K) = (grad_1 s(\vec{x}^K), grad_2(\vec{x}^K), grad_3(\vec{x}^K)) \\ &= \left(\tfrac{\partial s}{\partial x}(\vec{x}^K), \tfrac{\partial s}{\partial z}(\vec{x}^K), \tfrac{\partial s}{\partial z}(\vec{x}^K)\right) \end{aligned}}$$

(11.2.55) Das tatsächliche Ausrechnen partieller Ableitungen ist einfach, wenn man nur das Rollenwechselkonzept verinnerlicht hat. Nehmen wir als Beispiel $s(x, y, z) = x^2 + 3y^3 + 4xyz^2$. Wir berechnen hierfür nach unserem Schema die partiellen Ableitungen.

Im ersten Schritt führen wir den Rollenwechsel durch, indem wir an alle Variable, die zu äußeren Parametern werden, einen Index 0 anbringen. Im zweiten bilden wir die übliche Ableitung nach der verbleibenden Variablen. Im dritten wird die zugehörige Bezeichnung für die partielle Ableitung eingeführt:

(1)	$x^2 + 3y_0^3 + 4xy_0z_0^2$	$x_0^2 + 3y^3 + 4x_0yz_0^2$	$x_0^2 + 3y_0^3 + 4x_0y_0z^2$
(2)	Ableiten nach x bei x_0	nach y bei y_0	nach z bei z_0
	2x+4$y_0z_0^2$ für x=x_0	9y^2+4$x_0z_0^2$	8$x_0y_0z_0$
(3)	$\frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 + 4y_0z_0^2$	$\frac{\partial s}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 9y_0^2 + 4x_0z_0^2$	$\frac{\partial s}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 8x_0y_0z_0$

Und das bedeutet speziell, dass der Gradient unseres Skalarfeldes wie folgt aussieht:

$$\boxed{\text{grads}(x_0,y_0,z_0)=\left(2x_0 + 4y_0z_0^2, 9y_0^2 + 4x_0z_0^2, 8x_0y_0z_0\right)}.$$

11.2.6 **Die Koordinatenform des Gradienten geometrischer Skalarfelder**

(11.2.56) Bisher haben wir nur auf der Ebene der Koordinatenfunktionen gearbeitet. Was ergibt sich zusätzlich, wenn wir es mit der Koordinatendarstellung eines zunächst geometrischen Feldes zu tun haben? (Das Diagramm aus (11.2.45))

Also das Szenenbild: $s : V_0^3 \to \mathbb{R}$ Skalarfeld, K ein kartesisches Koordinatensystem und $s^K : \mathbb{R}_K^3 \to \mathbb{R}$ die Koordinatendarstellung des Feldes mit $s(\vec{x}) = s^K(\vec{x}^K) = s^K(x, y, z)$. Der geometrische Gradient sei $grads(\vec{x}_0)$. Dazu gehört der Koordinatenvektor $grad^K s(\vec{x}_0)$ mit Variablen x,y,z. Wir erhalten:

$$\boxed{\text{grad}^K\text{s}(\vec{x})=\text{grads}^K(\text{x,y,z})=\left(\frac{\partial s^K}{\partial x}(\vec{x}^K), \frac{\partial s^K}{\partial z}(\vec{x}^K), \frac{\partial s^K}{\partial z}(\vec{x}^K)\right)}$$

(11.2.58) Beispiel: $\mathrm{b}(\vec{x}) = |\vec{x}|$. Also $\mathrm{b}^K(\vec{x}^K) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Partielles Ableiten gibt $\frac{\partial b^K}{\partial x}(\vec{x}^K) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ usw. Zusammen:

$$\boxed{\mathrm{gradb}^K(\vec{x}^K) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{\vec{x}^K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}.$$

Das ist tatsächlich die Koordinatenform unseres alten Resultates $gradb(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$.

☐ Bestimmen Sie für $\mathrm{s}(\vec{x}) = (\vec{a} \cdot \vec{x})$ den Gradienten auf zwei Weisen.

11.3 **Die zweite Ableitung**

Unsere zur Ableitung reeller Funktionen führende Idee bestand darin, eine gegebene interessierende Funktion durch eine einfacher zu beherrschende Funktion lokal zu approximieren. Bisher haben wir dazu eine Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ gewählt und sind so zur Tangentenzerlegung gelangt. Könnte man nicht anstelle einer Geraden auch andere Funktionstypen wählen und auf diese Weise vielleicht eine bessere Approximation erhalten?

(11.3.1) Wir nennen mehrere naheliegende Kandidaten, für die man alle tatsächlich ein derartiges Programm mit jeweils nützlichen Resultaten durchzieht. Und zwar kann man zur lokalen Approximation alternativ wählen:

- einen Kreis (den *Krümmungskreis)*
- ein Polynom 2., 3.,...... Ordnung (das *Taylorpolynom, Taylorapproximation)*
- eine rationale Funktion, also einen Quotienten zweier Polynome (sog. *Pade-Approximation.)*

(11.3.2) Wir wollen hier nur den einfachsten Fall der Approximation durch ein quadratisches Polynom behandeln und den der Approximation durch einen Kreis. Zu den anderen Methoden stellen wir nur einige Übungsfragen. **In jedem dieser Fälle kommt es darauf an, einen dominierenden Term der gewünschten Art eindeutig abzuspalten.**

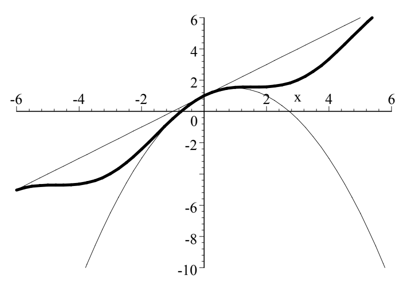
11.3.1 **Quadratische Approximation**

(11.3.3) Es soll also von $f(x_0 + \Delta x)$ nicht nur wie bisher eine Gerade $f(x_0) + m\Delta x$, sondern allgemeiner ein quadratischer Ausdruck $f(x_0) = +a\Delta x + b\Delta x^2$ abgespalten werden. Der Fehler sollte dadurch kleiner werden. Und das heißt, dass zu vermuten ist, dass man vom Fehler einen weiteren Faktor Δx abspalten kann. Wir vermuten, dass eine Zerlegung der folgenden Art anzusetzen ist

$$\boxed{\mathrm{f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+a\Delta x+b\Delta x^2+\Delta x^2 R}_{f,2}(\mathrm{x_0,\Delta x}) \text{ mit } \mathrm{R}_{f,2} \to 0 \text{ für } \Delta\mathrm{x} \text{ nach Null.}}$$

Das Abspalten des Faktors Δx^2 statt des Faktors Δx heiß t, dass wir in gewisser Weise ein stärkeres lokales Mikroskop als bisher verwenden. Im Falle der Exponentialfunktion und $\mathrm{x_0}$=0 haben wir eine solche Approximaton bereits durchgeführt. Das nachfolgende Bild zeigt ein weiteres Beispiel

f(x)=x+cosx
$\mathrm{x_0} = 0$
Tangente:
$\Delta x \mapsto 1 + \Delta x$
Quadr.Approx.:
$\Delta x \mapsto 1 + \Delta x - \frac{1}{2}\Delta x^2$



(11.3.4) Die quadratische Approximation ist hier offensichtlich (lokal) besser. Zwei Beobachtungen: Die ersten beiden Terme der quadratischen Approximation ergeben die Tangentenzerlegung, d.h. der oben eingeführte Koeffizient a wird vermutlich gleich $f'(x_0)$ sein. Oder auch: Die Tangente an die Kurve (in x_0) ist zugleich Tangente an die approximierende Parabel. Die zweite Beobachtung: Es bleibt unklar, wie man b erhält, wie im Beispiel der Wert $-\frac{1}{2}$ erhalten wurde.
(11.3.5) Wie sollen wir vorgehen? Nun der erste Punkt den wir immer angegangen sind, ist die Frage nach der **Eindeutigkeit der Zerlegung**. Man beweist in der üblichen Weise:

- Wenn eine Zerlegung (11.3.3) existiert, dann ist sie eindeutig. Insbesondere sind die Zahlen a und b eindeutig bestimmt.

Fasst man $b\Delta x^2$ und $\Delta x^2 R_{f,2}$ zusammen, so erfüllen sie die Restermbedingung der Tangentenzerlegung. Da diese Zerlegung eindeutig ist, folgt, dass die Aussage der ersten Beobachtung immer gilt:

- In jeder quadratischen Zerlegung ist $a = f'(x_0)$.

(11.3.6) Den Koeffizienten b wollen wir jetzt mit $\frac{1}{2}f''(x_0)$ bezeichnen. Den Grund werden wir bald sehen. Damit lautet unsere quadratische Zerlegung:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \tfrac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \Delta x^2 R_{f,2}(x_0,\Delta x) \text{ mit } \mathrm{R}_{f,2} \to 0 \text{ für } \Delta\mathrm{x} \text{ nach Null}}$$

Das ist die zu merkende Form.
(11.3.7) Was bedeutet die Bezeichnung? Wir nennen $f''(x_0)$ die *zweite Ableitung von f in x_0*. Zunächst muss man befürchten, dass man die gesamte Theorie (Ableitung der Grundfunktionen, Ableitungsregeln,...) für die 2. Ableitung neu durchgehen muss. Zum Glück ist das nicht so! Man kann nämlich zeigen, dass $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ ist. D.h. die zweite Ableitung ist gleich der ersten Ableitung der Ableitungsfunktion f'. Das ist ein ausgesprochen nützliches Resultat!
(11.3.8) Beispiel: $f(x) = \cos x$. Wir wissen $f'(x) = -\sin(x)$. Also $(f')'(x) = -\cos(x)$. Das gibt die folgende Entwicklung um $x_0 = 0$ für cos(x):

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + ...}$$

Wie üblich haben wir Δx durch x ersetzt. Diese Formel sollte man sich merken. Die Tangente zu $x_0 = 0$ verläuft horizontal und entsprechend fehlt der lineare Term.
☐ Wie sieht die entsprechende Entwicklung für $x \mapsto e^x$ um $x_0 = 0$ aus? Wie die für sin(x)?

11.3.2 Zum Beweis von $f''(x) = (f')'(x)$.

(11.3.9) Wir machen hierzu zwei Anläufe, geben zwei Beweise. In beiden Fällen benötigen wir gewisse "technische Zusatzannahmen". Das sind zusätzliche Voraussetzungen, ohne die man einen bestimmten Beweis **in der gewünschten Weise** nicht führen kann. Es kann sein, dass man ihn auf andere Weise, meist mit mehr Aufwand führen kann.
(11.3.10) Der erste Beweis: Wir betrachten das folgende Skalarfeld:

$$(x_0,\Delta x) \mapsto s(x_0,\Delta x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x^2 f''(x_0) - \Delta x^2 R_{f2}(x_0,\Delta x)$$

und suchen nach der durch $(x_0, 0)$ gehenden Niveaualinie. Klar ist $s(x_0,0) = 0$. Wir differenzieren paritell (nach Δx) und finden

$$0 = f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) - \Delta x f''(x_0) - \frac{\partial}{\partial\Delta x}\left(\Delta x^2 R_{f2}(x_0,\Delta x)\right)$$

Im letzten Summanden möchten wir die Produktregel anwenden.Das dürfen wir aber nur, wenn wir annehmen, dass R_{f2} nach Δx differenzierbar ist. Das ist unsere Zusatzannahme!

Wir wenden die Produktregel an, stellen etwas um und teilen durch $\Delta x \neq 0$. Das sind die üblichen schon vertrauten Manipulationen:

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x} = f''(x_0) + 2R_{f2}(x_0,\Delta x) + \Delta x \frac{\partial R_{f2}}{\partial \Delta x}(x_0,\Delta x).$$

Jetzt möchte man zum Grenzwert $\Delta x \to 0$ übergehen. Der zweite Term rechts verschwindet. Aber wie steht es mit dem dritten Term? Er sollte auch verschwinden. Das ist sicher der Fall, wenn die Ableitung ausreichend glatt ist.

Ist alles korrekt erfüllt, dann folgt das gewünschte Resultat $f''(x) = (f')'(x)$.

□ Wie sollte eine Approximation durch ein kubisches Polynom aussehen? Wie erhält man den neuen Koeffizienten?

(11.3.11) Zweiter Beweis. Wir starten mit der Zerlegung 2. Ordnung als gültiger und -sofern existent- eindeutiger Gleichung.

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \Delta x^2 R_{f2}(x_0,\Delta x)$$

Es ist $\Delta x = \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}$. Die neue Idee besteht darin, zunächst um $x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ zu entwickeln. Wir nehmen an, dass f auch um diesen Punkt in zweiter Ordnung entwickelbar ist. Das gibt

$$\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x) &= f((x_0+\frac{\Delta x}{2})+\frac{\Delta x}{2}) \\
&= f(x_0+\frac{\Delta x}{2}) + f'(x_0+\frac{\Delta x}{2})\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2}f''(x_0+\frac{\Delta x}{2})\frac{\Delta x^2}{4} + \\
&\quad + \frac{\Delta x^2}{4}R_{f2}(x_0+\frac{\Delta x}{2},\frac{\Delta x}{2})
\end{aligned}$$

Jetzt entwickeln wir die ersten drei rechts stehenden Terme erneut, jetzt um x_0. Dabei nehmen wir insbesondere an, dass f′ in x_0 auch differenzierbar ist. Das gibt:

$$\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{4} + \frac{\Delta x^2}{4}R_{f2}(x_0,\frac{\Delta x}{2}) \\
&\quad .... + f'(x_0)\frac{\Delta x}{2} + (f')'(x_0)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{\Delta x^2}{2}R_{f1}(x_0,\frac{\Delta x}{2}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}f''(x_0)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(f''(x_0+\frac{\Delta x}{2}) - f''(x_0)\right) \\
&\qquad\quad + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 R_{f2}(x_0+\frac{\Delta x}{2},\frac{\Delta x}{2})
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile steht eine Tangentenentwicklung von f′. Und dabei entsteht die gewünschte Größe $(f')'(x_0)$.

Erfüllen die letzten Terme der 4 Zeilen die quadratische Resttermbedingung? Für die ersten beiden Beiträge ist das offensichtlich. Der dritte verlangt die Stetigkeit der zweiten Ableitung ebenso wie der vierte. Ist das der Fall, liegt eine Entwicklung zweiter Ordnung vor. Vergleich der quadratischen Terme mit der ersten Entwicklung gibt:

$$\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 = \frac{1}{2}f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{4} + (f')'(x_0)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}f''(x_0)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2$$

und hieraus folgt wieder die gewünschte Beziehung $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

11.3.3 Der Krümmungsradius

(11.3.12) Wir betrachten den Graphen einer Funktion mit Hilfe der oben in (..) eingeführten Parametrisierung $x \mapsto (x, f(x))$. Sei $(x_0, f(x_0))$ ein ausgewählter Punkt darauf. Wir wollen den Graphen lokal um diesen Punkt durch einen Kreis approximieren. Der Mittelpunkt des Kreises muss dann auf der Normalen (=Senkrechte zur Tangente) durch diesen Punkt verlaufen. Aber wo? Wie groß ist der Radius genau? Nehmen wir zwei benachbarte Punkte, so werden die beiden Normalen sich typischerweise schneiden und der Kreismittelpunkt sollte in der Nähe des Schnittpunktes liegen. Und die Annäherung sollte umso besser werden, je näher die beiden Graphenpunkte beeinander liegen. Kurz wir sollten den Schnittpunkt bestimmen und dann (**danach!)** zum Grenzwert gleicher Aufpunkte übergehen. Das Ganze ist eine weiteres Anwendungsbeispiel der Tangentenzerlegung.

Die beiden zu schneidenden Normalen lassen sich wie folgt parametrisieren:

$$\vec{n}_0(\alpha) = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ f(x_0 + \Delta x) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -f'(x_0 + \Delta x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

☐ Bestimmen Sie für $\Delta x \neq 0$ den Schnittpunkt, genauer den Schnittparameter $\alpha = \alpha(\Delta x)$. Setzen sie überall die Tangentenapproximation ein und gehen Sie zum Grenzwert $\Delta x = 0$ über! (Hierbei benötigen Sie die 2. Ableitung von f!) Zeigen Sie, dass das folgende Formel für den Mittelpunkt des Krümmungskreises ergibt:

$$\boxed{\vec{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + \frac{1+{f'}^2(x_0)}{f''(x_0)} \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}}$$

☐ Bestimmen Sie hieraus eine allgemeine Formel für den Krümmungsradius. (Vgl. Formelsammlungen)

☐ Bestimmen Sie als Beispiel den Krümmungskreis an den Graphen von x+cosx für $x_0 = 0$. Vgl. die Figur. Verwenden Sie eine kleine Transformation der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$.