
Höhere Mathematik für Physiker

Teil I

F. Krause

Kapitel 7

Lineare Differentialgleichungen

Copyright F.Krause

Kapitel 7: Lineare Differentialgleichungen

- **7.0: Einleitendes Beispiel einer Differentialgleichung**
 - **7.0.1 Ein getriebenes Pendel**

- **Kapitel 7.1: Lineare Differentialgleichungen**
 - **7.1.0 Vorbemerkung**
 - **7.1.1 Was ist eine Differentialgleichung? Erster Versuch**
 - **7.1.2 Bedingungen für die Änderung einer Größe**
 - **7.1.3 Die Feldinterpretation der Differentialgleichung**
 - **7.1.4 Die allgemeine Lösungsformel (für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)**
 - **7.1.5 Das Anfangswertproblem**
 - **7.1.6 Anschauliche Vorstellungen zur Lösungsstruktur**
 - * 7.1.6a Die Phasenraumpartition
 - **7.1.7 Der Reduktionstrick**
 - **7.1.8 Die Berechnung der Lösungen im Falle $N=2$**
 - * 7.1.8a Berechnung einer Potenzreihe
 - * 7.1.8.b Diagonalisierung des Systems/ Die Eigenwertmethode
 - * 7.1.8c Der Fall $N=2$
 - * 7.1.8d Zwei reelle Eigenwerte
 - * 7.1.8e Die Komplexifizierungssätze
 - * 7.1.8f Zwei komplexe Eigenwerte
 - * 7.1.8g Ein reeller Eigenwert
 - * 7.1.8h Vergleich der drei Fälle

- **Kap.7.2: Die Oszillatorgleichung**
 - **7.2.0 Vorbemerkung**
 - * 7.2.0a Verallgemeinerungen der Oszillatorgleichung
 - * 7.2.1 Die Bestimmung der Oszillatorlösungen zu Fuß (durch Raten und Probieren)
 - **7.2.2 Der aperiodische Fall (starke Dämpfung)**
 - **7.2.3 Der Schwingungsfall**
 - **7.2.4 Der aperiodische Granzfall**
 - **7.2.5 Bemerkungen zur rechnerischen Behandlung von Anfangswertaufgaben**

- **Kap 7.3: Der inhomogene Fall**
 - **7.3.0 Vorbemerkung**
 - **7.3.1 Variation der Konstanten**
 - **7.3.2 Das Stückeln von Lösungen**
 - * 7.3.2a Ein Beispiel aus der Physik: Elektron im Plattenkondensator
 - **7.3.4 Die Faustregel Eine Methode zur Bestimmung einer speziellen Lösung**
 - **7.4 Numerische Lösung einfacher Differentialgleichungen**

Kapitel 7: Lineare Differentialgleichungen

7.0: Einleitendes Beispiel 7.0.1 Ein getriebenes Pendel

Wir betrachten ein physikalisches System, das nach entsprechender Idealisierung aus einem Massenpunkt besteht, auf den äußere Einflüsse wirken. Die Einflüsse sollen durch eine (momentan wirkende) resultierende Kraft beschreibbar sein. Dann legt die Newtonsche Bewegungsgleichung die Bewegung weitgehend fest. Genauer: Kennt man Ort und Geschwindigkeit des Punktes zu **einem** Zeitpunkt, dann legen die Kräfte über diese Gleichung den Bewegungsablauf für **alle** Zeiten vollständig fest. Und das gilt nicht nur für die üblichen einfachen Systeme wie die Flugparabel, sondern auch für komplizierte. Hierfür geben wir ein Beispiel, das zugleich zeigt, wie man die Methoden der Vektorrechnung zur Behandlung von Bewegungsproblemen einsetzt. Denn das erste und hauptsächliche Problem besteht darin, die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(t, \vec{r}(t))$ für den speziellen betrachteten Fall geeignet zu parametrisieren und für die Parameter die zugehörige Differentialgleichung zu bestimmen.

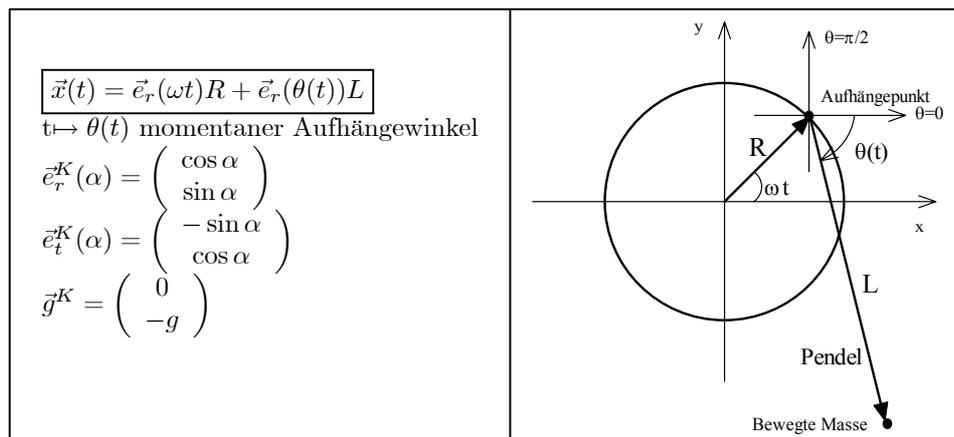
Wir gehen das Problem in mehreren Schritten an, die wir per Notation kenntlich machen.

◆ Systembeschreibung

Der Aufhängepunkt eines Pendels laufe auf einem Kreis mit vorgegebener fester Geschwindigkeit um. Die Bewegung soll nur in einer Ebene erfolgen. Die Verbindung Aufhängepunkt-Masse sei starr, also kein Faden. Der Radius des Kreises sei R , die Länge der Aufhängung L und die Winkelgeschwindigkeit ω .

◆ Kinematik und Parametrisierung

Dann interessiert uns die Bewegung des Pendelkörpers, also seine Bahnkurve. Diese beschreiben wir vektoriell naheliegender mit Polarkoordinaten. Vgl. Kap. 6.1.6.



Den Index K lassen wir von jetzt ab fort. Der Index t für "tangential" hat nichts mit dem t der Zeit zu tun! Die Ruhelage des Pendels ist bei $\theta = -\frac{\pi}{2}$. **Die Bahnkurve ist über diese vektorielle Beschreibung vollständig bestimmt, sobald man die Funktion $t \mapsto \theta(t)$ kennt.** Ziel muß daher sein, mit Hilfe der Newtonschen Gleichung diese Funktion festzulegen. Die Stange hat man sich als fest, aber masselos zu denken.

◆ Einflüsse:

Die starre Pendelachse bewirkt eine Zwangskraft $\vec{Z} = Z\vec{e}_r(\theta(t))$ auf den Massenpunkt, die alle Kräfte in radialer Richtung kompensiert. Die resultierende Kraft hat stets die senkrechte tangentiale Richtung $\vec{e}_t(\theta(t))$. Neben dieser Zwangskraft wirkt die konstante Schwerkraft $m\vec{g}$ auf den Massenpunkt.

◆ Die momentane Geschwindigkeit

Durch Differenzieren finden wir

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= R\omega\vec{e}_t(\omega t) + L\dot{\theta}(t)\vec{e}_t(\theta(t)) \\ \ddot{\vec{x}}(t) &= -R\omega^2\vec{e}_r(\omega t) - L\dot{\theta}^2(t)\vec{e}_r(\theta(t)) + L\ddot{\theta}(t)\vec{e}_t(\theta(t))\end{aligned}$$

Die Argumente sind hier wichtig. Wir müssen $\vec{e}_r(\omega t)$ bezüglich der Basis $(\vec{e}_r(\theta(t)), \vec{e}_t(\theta(t)))$ zerlegen:

$$\vec{e}_r(\omega t) = \vec{e}_r(\theta(t))\alpha + \vec{e}_t(\theta(t))\beta.$$

Da $\vec{e}_r(\theta(t)), \vec{e}_t(\theta(t))$ aber eine Orthonormalbasis ist, folgt über Skalarproduktbildung

$$\alpha = \vec{e}_r(\omega t) \cdot \vec{e}_r(\theta(t)) = \cos(\omega t - \theta(t)) \quad \text{und} \quad \beta = \vec{e}_r(\omega t) \cdot \vec{e}_t(\theta(t)) = \sin(\omega t - \theta(t))$$

Hierbei wurden die Additionstheoreme benutzt. (Oder einfacher kann man von der geometrischen Form des Skalarproduktes ausgehen.) Einsetzen gibt

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{e}_t(\theta(t)) \left(L\ddot{\theta}(t) - R\omega^2 \sin(\omega t - \theta(t)) \right) + \vec{e}_r(\theta(t)) \left(-L\dot{\theta}^2(t) - R\omega^2 \cos(\omega t - \theta(t)) \right)$$

Damit verfügt man über die drei kinematischen Kurven \vec{x}, \vec{v} und \vec{a} sofern man $t \mapsto \theta(t)$ kennt. Die Basis $(\vec{e}_r(\theta(t)), \vec{e}_t(\theta(t)))$ ist zu verwenden, weil die Zwangskraft in dieser Basis in einfacher Form vorliegt.

◆ Kraftbilanz

Die resultierend Kraft lautet mit derselben Basis

$$\vec{F}(t) = m\vec{g} + \vec{Z}(t) = m(-g) \cos(\theta(t))\vec{e}_t(\theta(t)) + (m(-g) \sin(\theta(t)) + Z(t)) \vec{e}_r(\theta(t)).$$

◆ Konkretisierung der Newtonschen Gleichung

Damit können wir in der Newtonschen Bewegungsgleichung Koeffizientenvergleich vornehmen und erhalten:

$$\begin{aligned}L\ddot{\theta}(t) - R\omega^2 \sin(\omega t - \theta(t)) &= m(-g) \cos(\theta(t)) \\ -L\dot{\theta}^2(t) - R\omega^2 \cos(\omega t - \theta(t)) &= m(-g) \sin(\theta(t)) + Z(t).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung legt die Größe der Zwangskraft fest. Sie interessiert uns hier nicht weiter. Die erste Gleichung dagegen ist **die gesuchte Bestimmungsgleichung** für die Winkelfunktion $t \mapsto \theta(t)$. Schauen wir sie uns genauer an:

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{R\omega^2}{L} \sin(\theta(t) - \omega t) + \frac{g}{L} \cos(\theta(t)) = 0.}$$

Das ist eine "Differentialgleichung", also eine Bestimmungsgleichung für die gesuchte Winkelfunktion $t \mapsto \theta(t)$. Also eine **Bestimmungsgleichung für eine Funktion, nicht etwa eine Zahl!** Die gefundene Gleichung ist auch im Rahmen der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen schwierig zu behandeln. Insbesondere kann man keine explizite Lösungsformel hinschreiben bzw. durch noch so langes Rechnen gewinnen. Man benötigt zu ihrer Behandlung allgemeine abstrakte Resultate. Am Ende von Kap. 8 wird der Leser über diese Methoden verfügen.

Numerische Näherungslösungen dagegen lassen sich relativ leicht gewinnen wie wir in 7.4 sehen werden. Die nachfolgenden Resultate sind damit gewonnen worden.

Die Bilder sollen die Leistungsfähigkeit der Newtonschen Gleichung zeigen, aber auch in einem ersten Anlauf mit den Phänomenen vertraut machen, die im Zusammenhang mit Differentialgleichungen auftreten.

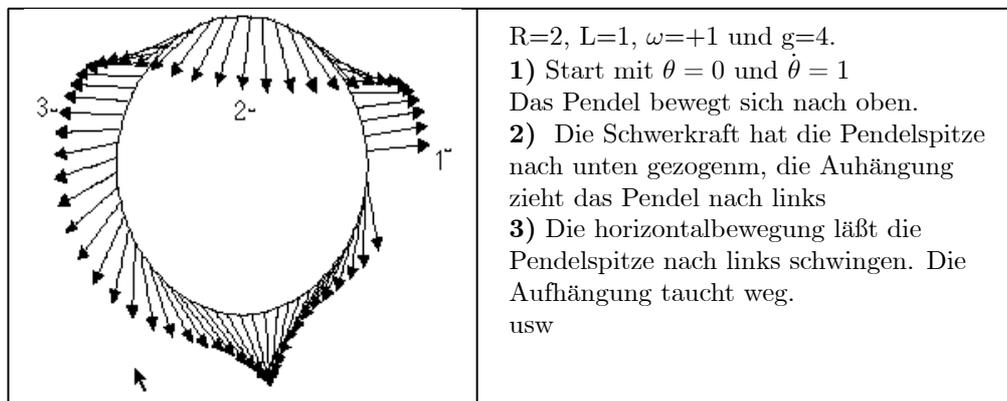
An dieser Stelle wollen wir zunächst nur zeigen, was eine Differentialgleichung leistet, wenn man sie einmal gelöst hat. Sobald man in unserem Fall die Zahlwerte der äußeren Parameter R, L, ω und g festgelegt hat, liefert die Lösung **eine Quantifizierung des Bewegungsablaufs des Systems**. Zusätzlich ist noch der Zustand des Systems zu einem festen Zeitpunkt anzugeben. D.h. hier der Winkel θ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ für einen festen Zeitpunkt t_0 .

Verfügt man über diese Information, dann legt die Differentialgleichung die Funktion $t \mapsto \theta(t)$ für alle Zeiten fest. Die oben gegebene Formel für $\vec{x}(t)$ liefert den geometrischen Ortsvektor für alle Zeiten.

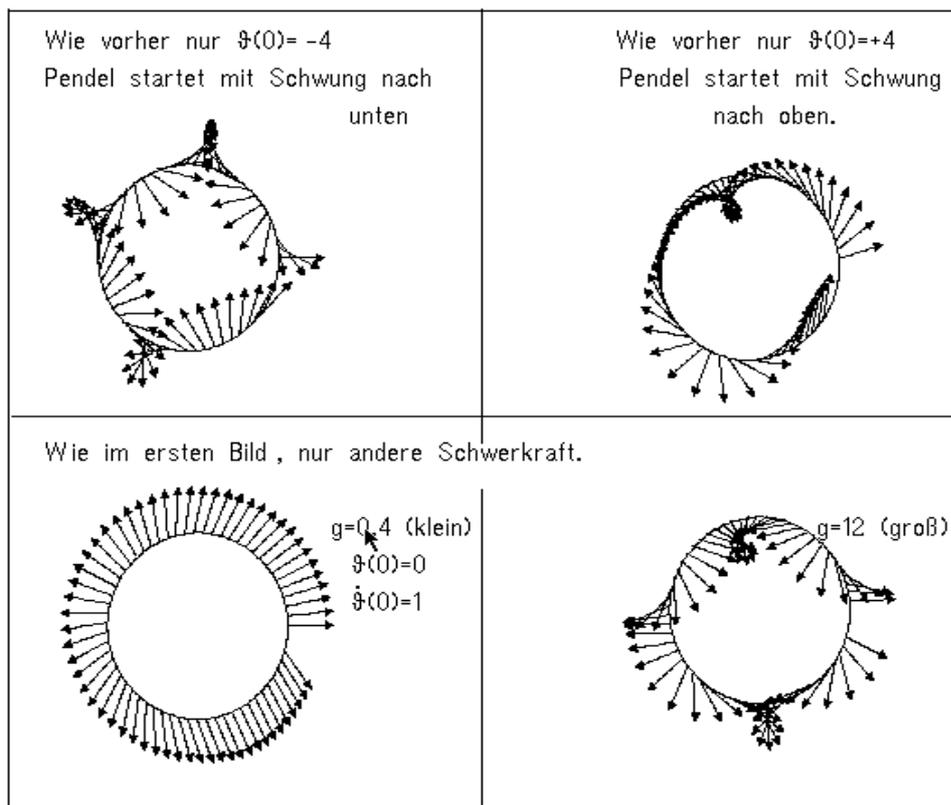
Das ist ein unglaublicher Informationsgewinn. So als hätte man von einem Tennisspiel 2 Fotos und wäre damit in der Lage, den gesamten Spielverlauf beliebig genau zu konstruieren. Beim Tennisspiel absurd, aber im Falle der Newtonschen Gleichung real.

Wie kann man nun im Falle unseres Pendelsystems eine solche Bewegung bildlich darstellen und veranschaulichen? Hierfür bieten sich eine Reihe unterschiedlicher Möglichkeiten an.

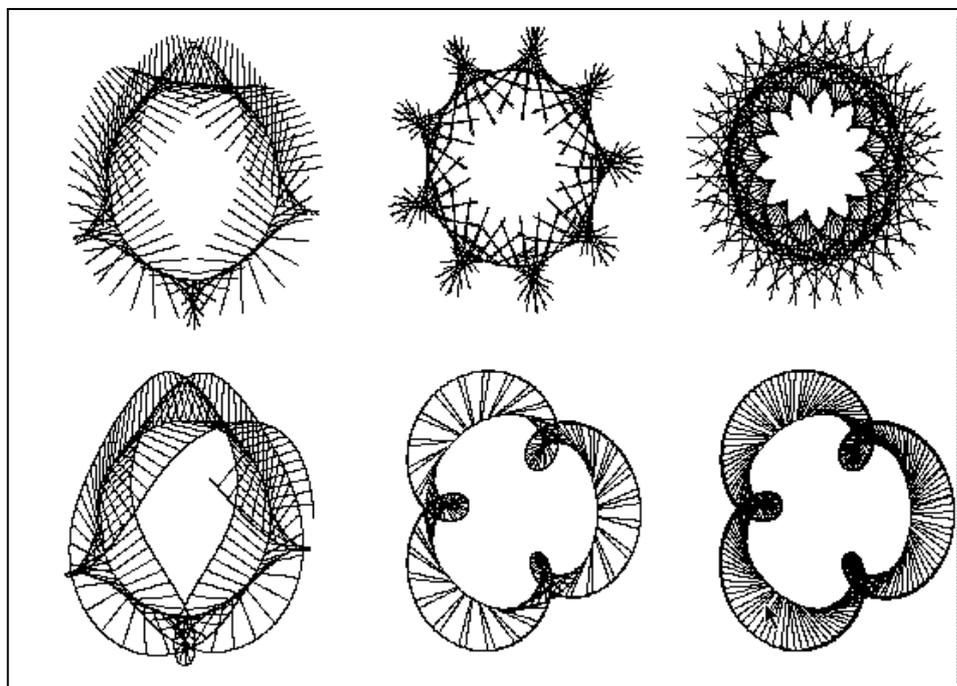
- Als anschauungsorientierter Einstieg bietet sich eine *stroboskopische* Darstellung des Bewegungsablaufs an: Man zeichnet die Pendellage in festen Zeitabständen und nur in diesen. Da die Bewegung sich jedoch als nicht periodisch erweist, kann man nur wenige, eventuelle nur einen Umlauf des Aufhängepunktes zeichnen. Aber man kann gut die Auswirkung von großen Änderungen der Werte der äußeren Parameter erkennen und dies physikalisch erklären oder verstehen. Das erste Bild zeigt den Einfluß der wirkenden Kräfte



Die nächsten Bilder verdeutlichen den Einfluss von der Wahl der Anfangswerte und der äußeren Parameter. Man sieht: Die Lösungen der Differentialgleichung liefern eine unglaubliche Vielfalt von Bewegungsformen und das sind dann auch die Bewegungen, wie sie in der Natur erfolgen.

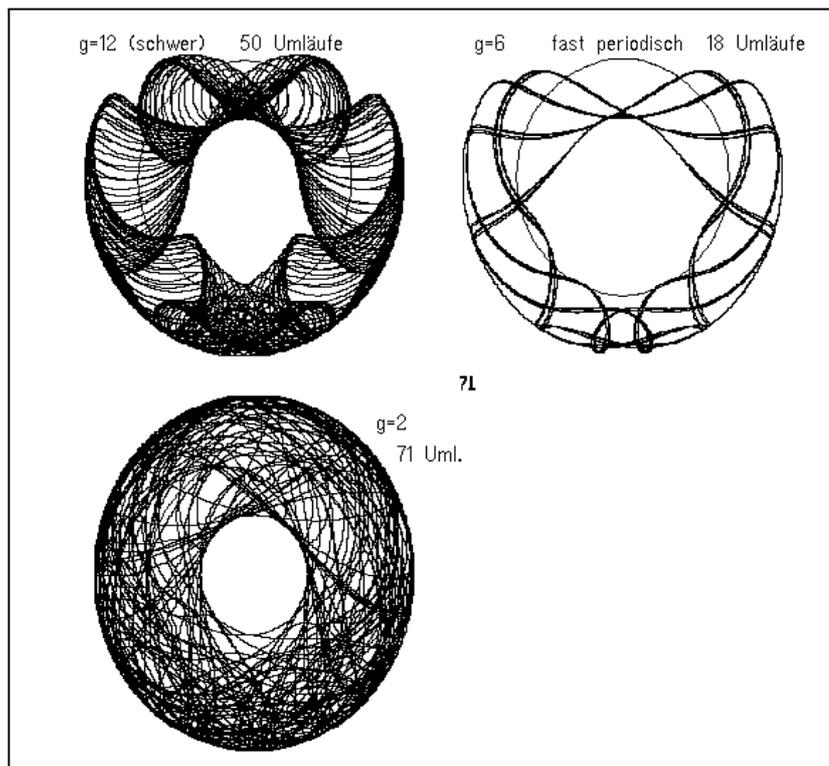


- Zeichnet man nur die Bahn der Pendelstange, dann lassen sich u.U. mehr Umläufe erfassen. Wir geben einige Beispiele, ohne die zugehörigen Parameterwerte zu spezifizieren. Das ergibt offensichtlich die ästhetisch ansprechendste Darstellungsform.

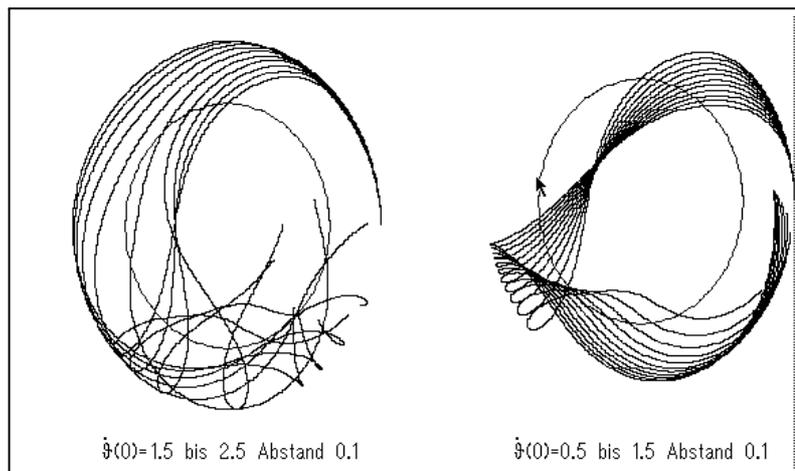


- Alternativ kann man die Pendelstange fortlassen und nur die Lage des Massenpunktes zeichnen. Dann

lassen sich u.U. viele Umläufe verfolgen.



- Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Verlauf für mehrere benachbarte Startwerte gemeinsam zu zeichnen und so den Einfluss des Anfangswertes zu verdeutlichen.



Mathematisch wird man eher $t \mapsto \theta(t)$ und daraus abgeleitete Größen zeichnen, zu denen man allerdings immer eine Vorstellung über den zugehörigen tatsächlichen Verlauf entwickeln sollte, so wie die vorangegangenen Bilder dies verdeutlichen.

Kapitel 7.1: Lineare Differentialgleichungen

7.1.0 Vorbemerkung

Wir kommen zu der dritten Anwendung der linearen Algebra. Das einführende Beispiel zeigt etwas Typisches: **Viele wichtige Anwendungsprobleme sind im Kern Differentialgleichungsprobleme.** Weshalb ist das so? Weshalb sind Differentialgleichungen so bedeutsam? Und was sind eigentlich Differentialgleichungen?

Diese (anspruchsvollen) Fragen gehören zusammen und wir wollen sie in mehreren Anläufen angehen. Dabei werden wir zugleich eine Reihe von Einsichten und Resultaten gewinnen, die sich auch für die konkrete Behandlung dieses Gleichungstyps als nützlich erweisen werden.

Zu Beginn von Kapitel 8 werden wir einen weiteren Anlauf zur Behandlung der gestellten Fragen unternehmen. Dort geben wir auch eine genauere Typisierung der Differentialgleichungen und klären einige Fragen, die wir im Augenblick nur bewußt machen möchten.

Die Aussonderung der linearen Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten), die wir hier in Kapitel 7 vornehmen, erfolgt, weil wir für sie eine explizite Lösungsformel erhalten werden mit deren Hilfe wir die Eigenschaften der Lösungen studieren können. Die gefundenen Eigenschaften erweisen sich als richtungsweisend für den allgemeinen Fall. Überdies sind sie von großer praktischer Bedeutung, so daß man zugehörige Kenntnisse besonders gut beherrschen sollte. Die Darstellung in Kapitel 7.2 wird daher weitgehend unabhängig vom Rest des Kurses gehalten.

7.1.1 Was ist eine Differentialgleichung? Erster Versuch

(1.1.1) Eine Differentialgleichung ist - wie im einführenden Beispiel - zunächst einmal immer eine **Bestimmungsgleichung für Abbildungen vom Kurventyp.** "Die Differentialgleichung $y' = \alpha y^2$ lösen" heißt: Alle Kurven oder Funktionen $t \mapsto y(t)$ zu suchen, die die Gleichung $y'(t) = \alpha y^2(t)$ für alle zulässigen t -Werte erfüllen! Beim Lösen der Zahlgleichung $x = cx^2$ sucht man alle **Zahlen**, die die gegebene Bedingung erfüllen, bei einer Differentialgleichung dagegen alle **Kurven**. In diesem Kapitel steht Kurve immer für eine Abbildung, nie für eine Menge (=Bild der Kurvenabbildung also den Weg).

(1.1.2) **Was ist eine Differentialgleichung? 1. Versuch einer Antwort:**

Eine Differentialgleichung ist **eine Bestimmungsgleichung** (also eine einschränkende Bedingung) **für Kurven** $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow V$. V sei immer endlichdimensionaler Vektorraum mit $\dim V = N$ (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Insbesondere sehen wir auch reelle Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Kurven an mit $N=1$.

Kurve impliziert: Die Urbildmenge ist ein reelles Intervall.

(1.1.3) Nun wissen wir aus Kap.1.2.9, dass eine Bedingungsgleichung stets auf eine Abbildung zu beziehen ist. Erst die Angabe eines geeigneten vollen Abbildungstripels legt genau fest, was mit der Bestimmungsgleichung jeweils genau gemeint ist. Wie sieht eine mögliche zugehörige Abbildung im Falle unserer Differentialgleichungen aus?

(1.1.4) Die formale Struktur ist leicht geklärt. Eine Gleichung (mit Unbestimmter) läßt sich immer als Zuordnung interpretieren, wobei die Unbestimmte per Rollenwechsel zur unabhängigen Variablen wird. Etwa $y'(x) + 2y^2(x) = 0$ gibt $y \mapsto y' + 2y^2$. Nun sind Eingabe- und Ausgabegröße beides Kurven. Also benötigen wir noch zwei Mengen \mathfrak{F} und \mathfrak{G} von Kurven. In der Regel müssen die zulässigen Kurven ausreichend glatt sein, weil Ableitungen zu bilden sind. Vgl. etwa Kap. 6.4.1a. Welche Kurvenmengen man genau nimmt, ergibt sich meist aus dem Zusammenhang. Insgesamt entsteht eine Abbildung $\mathfrak{D} = (\mathfrak{F}, f \mapsto \mathfrak{D}(f), \mathfrak{G})$. Diese Abbildung muß allerdings einen ganz bestimmten Bau haben, den wir noch präzisieren werden. \mathfrak{D} ist eine Abbildung vom Operatortyp, die wir *Differentialoperator* nennen werden. "Operator" bedeutete nach der Klassifikation von Kap.1.2.6 1, dass Urbild und Wert der Zuordnung beides selbst Abbildungstripel sind. Jeder "Punkt", jedes Element ist selbst eine Abbildung.

Im obigen Beispiel $y'(x)+2y^2(x)=0$ wählen wir $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$ gleich der Menge $C^\infty=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ und bekommen damit den Differentialoperator $(C^\infty, y\mapsto y'+2y^2, C^\infty)$. Etwa $h_2\mapsto 2h_1+2h_4$. Eine Lösungsfunktion muß als Wert die Nullfunktion ergeben. h_2 tut dies nicht und ist daher keine Lösung. Dagegen ist y mit $y(t)=\frac{1}{2t}$ eine Lösung, wie man sofort nachrechnet.

(1.1.5) Ist \vec{F} ein Kraftfeld in $G\subset V_0^3$, vielleicht vom Coulombtyp, so lautet die zugehörige Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt: $m\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{F}(\vec{r}(t))$. Nun wählen wir $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$ gleich der Menge \mathfrak{B} aller beliebig oft differenzierbaren Kurven $I\rightarrow G$, wobei I ein (nicht einpunktiges) Intervall sein darf. (I ist freier Parameter, keine Konstante.) Der zugehörige Differentialoperator ist dann:

$$\mathfrak{N}=(\mathfrak{B}, \vec{r}\mapsto \ddot{\vec{r}}-\frac{1}{m}\vec{F}\circ\vec{r}, \mathfrak{B}).$$

Die Lösungsmenge von $\mathfrak{N}(\vec{r})=\vec{0}$ besteht aus allen bezüglich F physikalischen Bahnkurven. Vgl.Kap.1.2.13. Im Eingangsbeispiel aus allen physikalisch möglichen Bewegungen des Pendels!

(1.1.6) Urbildmenge und Wertemenge müssen keineswegs immer übereinstimmen.

Betrachten wir etwa die Zuordnung $\vec{r}\mapsto(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})$. Hier wird aus einer Raumkurve durch das Skalarprodukt eine Funktion. Wir wählen $\mathfrak{F}=C^\infty(\mathbb{R},V^3)$ und $\mathfrak{G}=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Für die Differentialgleichung $\dot{\vec{r}}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)=0$, die zu dieser Zuordnung gehört, finden wir viele Lösungen leicht per Inspektion: Nämlich alle Kurven, die auf Kreisbahnen um den Ursprung führen! Bei ihnen stehen Orts- und Geschwindigkeitsvektor immer senkrecht aufeinander.

(1.1.7) **Fassen wir unsere Überlegungen zusammen:**

Formal gehört eine Differentialgleichung immer zu einem Differentialoperator $\mathfrak{D}=(\mathfrak{F}, f\mapsto \mathfrak{D}(f), \mathfrak{G})$ für Abbildungsräume. Aus der unbekanntem Funktion wird per Rollenwechsel eine handlichere unabhängige Variable. Das entstehende Gleichungsproblem sieht wie folgt aus:
Man gibt ein $g\in\mathfrak{G}$ vor und sucht alle $f\in\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{D}(f)=g$ erfüllen.
Die Lösungen bilden die gesuchte Lösungsmenge $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{F}$.

(1.1.8) Nochmals das Beispiel, bei dem eine solche Aussonderung gewisser Kurven inhaltlich besonders bedeutsam und einsichtig ist: Man hat einen Massenpunkt, der unter einem äußeren Einfluß steht, welcher sich durch ein Kraftfeld repräsentieren läßt. Wie wird der Punkt sich unter dem Einfluß der Kraft bewegen? Denkbar ist zunächst eine Unzahl von Möglichkeiten, von Bahnkurven. Tatsächlich wird aber nur eine genau bestimmte Teilmenge vorkommen. Man benötigt eine Bedingung, die als Lösungsmenge genau die tatsächlich vorkommenden Kurven enthält! Und die Newtonsche Bewegungsgleichung - eine Differentialgleichung - leistet eben dies. So wie es im Pendelbeispiel gezeigt wurde.

Den zugehörigen (Newtonschen) Differentialoperator \mathfrak{N} haben wir in (1.1.5) bereits beschrieben.

(1.1.9) Unser erster Antwortversuch macht aus jeder in der üblichen Weise gegebenen Differentialgleichung ein wohlbestimmtes mathematisches Problem. Aber eine Frage bleibt: Welche Abbildungen $\mathfrak{F}\rightarrow\mathfrak{G}$ sind Differentialoperatoren? Sicher nicht alle. Vielleicht aber alle, in deren Rechenausdruck Ableitungen vorkommen? Aber auch das erweist sich als falsch. So ist etwa $f\mapsto f'$ - fof kein Differentialoperator im Gegensatz zu $f\mapsto f'$ -gof und $f\mapsto f'-f^2$. Das ist zunächst überhaupt nicht zu verstehen. Wir müssen also noch weitere klärende Überlegungen vornehmen. Höhere Ableitungen dürfen dagegen vorkommen, wie im Newtonschen Operator. Die Klärung verschieben wir auf Kap. 8.

(1.1.10) Hier in Kapitel 7 eine Reihe von Operatoren ein, **die auf jeden Fall zulässige Differentialoperatoren sind.**

(1.1.11) Eine lineare Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung, bei der der Differentialoperator \mathfrak{D} linear ist. In diesem Kapitel werden wir lineare Differentialgleichungen genauer studieren, da wir bei ihnen die Resultate der linearen Algebra sehr wirksam anwenden können.

(1.1.12) Das wichtigste Beispiel eines linearen Differentialoperators sieht wie folgt aus:

$M:V \rightarrow V$ Endomorphismus. V Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$.
 $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} = C^\infty(\mathbb{R}, V)$.
 Der Operator sei $\mathfrak{D} = (C^\infty(\mathbb{R}, V), \vec{r} \mapsto \dot{\vec{r}} - M \cdot \vec{r}, C^\infty(\mathbb{R}, V))$.
 Die zugehörige homogene Gleichung schreiben wir meist $\dot{\vec{r}} = M \cdot \vec{r}$.
 Das verlangt $\dot{\vec{r}}(t) = M \cdot \vec{r}(t)$ für alle t .
 Zugehörige inhomogene Gleichungen schreibt man $\dot{\vec{r}} = M \cdot \vec{r} + \vec{b}$.

(1.1.13) Beachten Sie immer wieder : $\mathfrak{D}(\vec{r})$ ist ebenso wie \vec{r} eine Kurve, keine Zahl. Die Differentialgleichung muß somit auf mehreren zu unterscheidenden Abstraktionsniveaus formuliert und betrachtet werden:

1. Als Gleichung für Abbildungstripel. Also $D(\vec{r})=0$ oder $\dot{\vec{r}}=M \cdot \vec{r} = \vec{0}$. Hierbei ist "=" die Gleichheit von Abbildungstripeln und $\vec{0}$ steht für die Nullkurve $(\mathbb{R}, t \mapsto \vec{0}, V)$.
2. Als Gleichungssystem für die Werte. Also $\dot{\vec{r}}(t) - M \cdot \vec{r}(t) = \vec{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Hier ist t freier, nicht etwa äußerer Parameter oder Index und $\vec{0}$ steht für den Nullvektor aus V . (Das ergibt ein vektorielles Gleichungssystem mit unendlich vielen Gleichungen!)
3. Schließlich kann man in V eine Basis einführen und zur Koordinatendarstellung übergehen. Ist M^K beschreibende Matrix, so erhält man $\dot{\vec{r}}^K(t) = M^K \cdot \vec{r}^K(t)$. Das kann als Gleichungssystem für die Komponenten ausgeschrieben werden. In dieser Form treten *Differentialgleichungssysteme* häufig auf, gerade auch beim Einstieg.

Welche Darstellungsform man wählt, hängt vom jeweiligen Kontext ab. Vielfach sind Schreibweisen üblich, die nicht zwischen den Formen unterscheiden. Sobald Verständnisprobleme auftauchen - und die sind hier erfahrungsgemäß nicht selten, sollte man ungenaue Schreibweisen beseitigen und meiden.

7.1.2 Bedingungen für die Änderung einer Größe

(1.2.1) Damit wissen wir formal mathematisch, was eine Differentialgleichung ist, sofern wir sicher sind, daß ein Differentialoperator vorliegt. Wir haben aber noch keine Vorstellung davon, weshalb Differentialgleichungen so bedeutsam sind. Sicherlich sind Kurven äußerst wichtige Beschreibungsgrößen, und wir brauchen Gleichungen, mit deren Hilfe man Bedingungen an solche Kurven mathematisch formulieren kann.

Aber weshalb gerade Differentialoperatoren und nicht andere Arten von Bedingungengleichungen?

(1.2.2) In dieser Situation ist es wichtig, sich zu überlegen, was für Bedingungen an Kurven man überhaupt stellen kann. Betreiben wir etwas Phänomenologie und gehen wir einmal einige Beispiele einschränkender Bedingungen für Kurven oder Funktionen durch:

1.Beispiel : f ist positiv. D. h. $f(x) > 0$ für alle x .

Dies ist eine Bedingung an die Funktion f , welche in Form einer Bedingung für alle Werte auftritt. Z.B. ist $f(3) = -2$ verboten.

2.Beispiel : \vec{r} ist periodisch mit Periode T. D.h. $\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$ für alle t . Zwischen den Werten bestimmter Urbilder muß eine Beziehung (=) bestehen. Wieder haben wir es mit einer Bedingung für die Werte zu tun. $\vec{r}(2+T) = \vec{r}(2)$ ist erlaubt, $\vec{r}(2) = \vec{0}$ und $\vec{r}(2+T) \neq \vec{0}$ ist verboten.

3.Beispiel: Die Bahnkurve r verläuft in einer Ebene senkrecht zu \vec{L} .

D.h. $\vec{r}(t) \cdot \vec{L} = 0$ für alle t . $\vec{r}(t) = t\vec{L}$ etwa wäre verboten.

In all diesen Fällen wird eine Bedingung formuliert, die sich auf die Funktionswerte bezieht, Diese Werte dürfen nicht beliebig sein, sie müssen einer bestimmten Beziehung genügen.

(1.2.3) Bei einer Differentialgleichung sieht das etwas anders aus. Nehmen wir $y'(t)-2ty(t)=0$. Wenn wir diese Bedingungsgleichung in eine Bedingung für das totale Differential umschreiben, finden wir über $dy=y'(t)\Delta t$ die Bedingung $dy(t)=2ty(t)\Delta t$.

Das bedeutet: Die **Änderung** dy des Wertes von y wird in Tangentenapproximation durch t und $y(t)$ festgelegt, also durch den Graphenpunkt $(t,y(t))$. Ist die Lösungskurve im Graphenpunkt $(t,y(t))$ angekommen, dann wird sie mit der Steigung $2ty(t)$ weitergeschickt. **Wir haben es mit einer Bedingung nicht für den Wert allein, sondern für dessen Änderung zu tun.** Unter dem Gesichtspunkt der Anwendungen heißt t das:

Der Systemzustand zur Zeit t - also $(t,y(t))$ - bestimmt oder beschränkt
die Zustandsänderung $dy(t) = y(t + \Delta t) - y(t)$.

So etwas kommt häufig vor und sollte mathematisch beherrscht werden.

(1.2.4) Ein plattes, aber illustratives Beispiel, das den **Unterschied zwischen Bedingungen für die Werte und solche für die Änderung** verdeutlicht: Das jährliche Einkommen bestimmt die Änderung des Vermögens, nicht das Vermögen selbst.

(1.2.5) Und aus der Physik, der Punktmechanik: Die wirkende Kraft ist gleich **der Änderung des Impulses pro Zeiteinheit**, die Kraft bestimmt nicht etwa den Impuls selbst! Eine kräftefreie Bewegung kann mit beliebiger Geschwindigkeit und damit mit beliebigem Impuls erfolgen. Und wirkend meint: Die Impulsänderung zur Zeit t hängt ab von der Kraft zur Zeit t , nicht von der zu einer vergangenen zur Zeit t_0 und auch nicht von einer zukünftigen Kraft zur Zeit $t+t_0$.

(1.2.6) Derartige einschränkende Bedingungen für Änderungen treten treten bei der Bearbeitung von Anwendungssituationen häufig auf. Sie sind erfahrungsgemäß vielfach einfacher zu gewinnen und haben einen größeren Anwendungsbereich als Bedingungen für die Größen selbst. Sie bilden Form und Rahmen vieler Naturgesetze..

(1.2.7) Aber auch rein mathematisch ist unsere Differentialgleichung ausgezeichnet, weil sie einen erstaunlichen Informationsgewinn liefert bzw. eine große Aufwandsreduktion ermöglicht:

Wollte man das totale Differential über die Berechnung der Ableitung bestimmen, also über $dy = y'(t)\Delta t$, so müßte man unendlich viele Funktionswerte $y(t + \Delta t)$ kennen und mit ihnen einen Grenzprozeß durchführen. Das erfordert eine im Prinzip enorme Arbeit. Gilt dagegen die Differentialgleichung, so genügt die Kenntnis des jeweiligen Graphenpunktes, also $(t,y(t))$, um die Änderung mit Hilfe eines einfachen algebraischen Ausdrucks festzulegen. Oder in anwendungsorientierter Formulierung: Der jeweilige Systemzustand $(t,f(t))$ bestimmt seine eigene Änderung: $df = f'(t)\Delta t$ in Form seiner momentanen Änderungsgeschwindigkeit.

(1.2.8) Wodurch wird die Änderung nun festgelegt oder eingeschränkt? Immer durch den "Zeitpunkt" (genauer die unabhängige Variable der Kurven) und den Wert zum selben Zeitpunkt. Ein anderer Wert ist im Falle einer Differentialgleichung nicht zulässig. Eine Bedingung wie $\Delta y(t) = y(t + 2)\Delta t$ würde nicht zu einer Differentialgleichung gehören. (Playboy P erhält **heute** einen Kredit, der sein gegenwärtiges Vermögen vergrößert, weil er in zwei Jahren eine größere Summe erben könnte. Die jetzige Änderung wird hier durch den Vermögenswert in zwei Jahren bestimmt. Eine solche Bedingung gehört typischerweise nicht in den Bereich der Differentialgleichungen.)

Und damit sehen wir auch sofort, wieso $f'(x) = f(f(x))$ keine Differentialgleichung bildet, obwohl $f' - f \circ f = 0$ doch ganz danach aussieht: $df(x)=f(f(x))dx$ hängt nicht allein vom Funktionswert im betrachteten Punkte x ab, sondern auch vom Wert in $y=f(x)$. Es gilt ja $df(x)=f(y)dx$. Es liegt eine Bedingung vor zwischen df , $f(x)$ und $f(y)$.

(1.2.9) Wie wird die Änderung festgelegt? Immer über die Tangentenapproximation. Genauer besprechen wir das im Kapitel 8. Hier beschränken wir uns auf den wichtigen Spezialfall eines linearen Differentialoperators $\vec{r} \mapsto \dot{\vec{r}}-M.\vec{r}$, wobei $M:V \rightarrow V$ ein Endomorphismus ist. Beachten Sie insbesondere, daß M nicht von t abhängt. Die zugehörige Differentialgleichung $\dot{\vec{r}}(t) = M.\vec{r}(t)$ ergibt folgende **Bedingung für das totale Differential**:

$$\boxed{d\vec{r}(t) = M.\vec{r}(t)\Delta t}$$

Hierdurch wird die Änderung über das totale Differential vollständig festgelegt. Für jeden zulässigen t -Wert ergibt das eine zugehörige Bedingung. Bei einer Lösung müssen diese Bedingungen für alle t des Definitionsintervalles erfüllt sein, was zu unendlich vielen Forderungen an die Lösungsfunktion führt.

(1.2.10) Fassen wir alles zusammen: **Was ist eine Differentialgleichung? 2. Versuch.**

Die Bedingung, die durch eine Differentialgleichung beschrieben wird, ist eine Bedingung zwischen der Änderung $dy(t)$ des Abbildungswertes in Tangentenapproximation und zugehörigem Graphenwert $(t, y(t))$, die für alle Werte der unabhängigen Variablen t erfüllt sein muß.
Man nennt das *eine lokale Bedingung*.

(1.2.11) Die lineare Differentialgleichung $\vec{y}'(t) = M \cdot \vec{y}(t)$ gehört sicher zu einer lokalen Bedingung. Den allgemeinen Fall werden wir in Kapitel 8 besprechen, da wir dazu noch den Formalismus aus 7.1.7 (Stichwort "Reduktionstrick") benötigen. Im Rest von Kapitel 7 beschränken wir uns ganz auf unseren linearen, sicherlich lokalen Fall.

7.1.3 Die Feldinterpretation der Differentialgleichung

(1.3.1) Was bedeutet es nun, wenn die Änderung einer Größe über $\vec{y}' = M \cdot \vec{y}$ aus deren Werten folgt? Wie wird also die Kurve selbst durch die Bedingung eingeschränkt? Diese Frage läßt sich besonders gut **geometrisch interpretieren und verstehen**.

(1.3.2) Wir wollen die geometrische Bedeutung am Beispiel einer linearen Differentialgleichung $\vec{r}'(t) = M \cdot \vec{r}(t)$ für $V = \mathbb{R}^2$ illustrieren. Und zwar wählen wir als Einstiegsbeispiel eine besonders einfache Matrix $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{oder als System} \quad \boxed{\begin{matrix} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \end{matrix}}$$

Gesucht sind mithin Kurven $\left(\mathbb{R} \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2 \right)$, deren Komponenten für jeden Zeitpunkt folgenden Gleichungen genügen: $\dot{x}(t) = y(t)$ und $\dot{y}(t) = -x(t)$. Inspiziert man die elementaren Funktionen, so findet man sofort einige Lösungen. Etwa $x(t) = a \sin(t)$ und $y(t) = a \cos(t)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Hierdurch wird für jedes a eine Kreisbewegung beschrieben. Polynome oder exp erfüllen die Gleichung dagegen nicht. So ergibt sich für $x(t) = \exp(\alpha t)$ und $y(t) = t^2$ nicht Null, sondern $\dot{x}(t) - y(t) = \alpha e^{\alpha t} - 2t$ usw. Also:

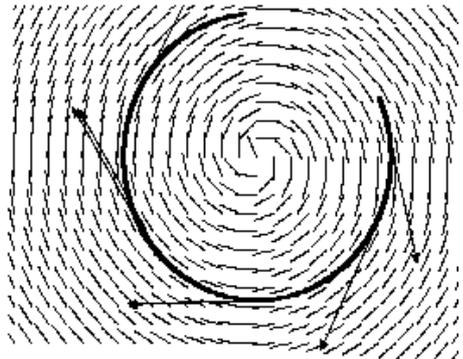
$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}(t) \quad \text{wird erfüllt durch} \quad \begin{matrix} x(t) = a \sin t \\ y(t) = a \cos t \end{matrix}$$

(1.3.3) Was besagt das? Interpretieren wir das Gleichungssystem vektoriell, so sehen wir: Aus dem Ortsvektor $\vec{r}(t) = {}^t(x(t), y(t))$ wird durch M der Vektor $\vec{T}(t) = {}^t(y(t), -x(t))$. Das ist aber ein zu $\vec{r}(t)$ senkrechter Vektor derselben Länge. Und dieser Vektor soll gleich dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ sein. Das ist die Forderung, **die geometrisch interpretierte Bedingung der Differentialgleichung**.

(1.3.4) Unsere geratene Lösung beschreibt eine gleichförmige Kreisbewegung mit negativem Umlaufssinn und Winkelgeschwindigkeit 1. Und eine solche Bahnkurve erfüllt natürlich die beschriebene Bedingung: Momentane Geschwindigkeit gleich dem oben mit M konstruierten Vektor $\vec{T}(t) = M \cdot \vec{r}(t)$. Andere Bewegungen tun das in der Regel nicht.

□ Erfäßt die in (1.3.2) geratene Lösung alle soeben beschriebenen Bewegungen? Was fehlt noch?

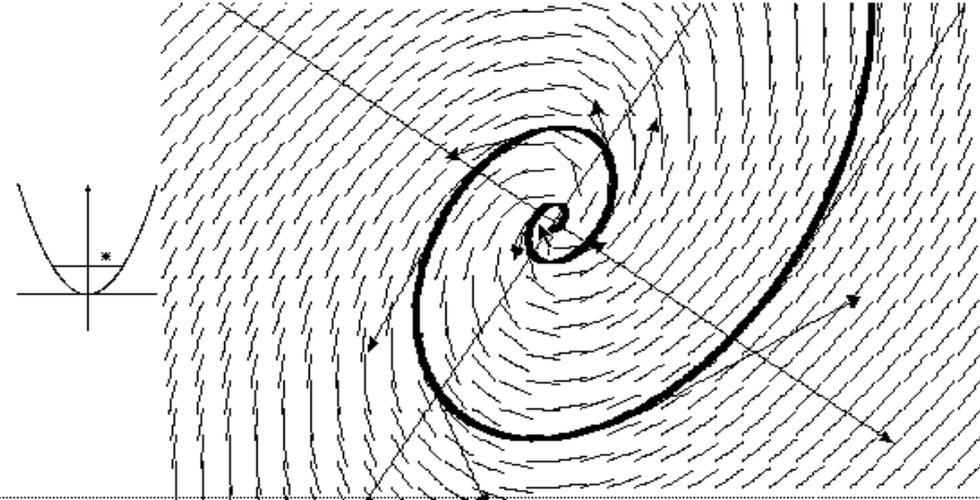
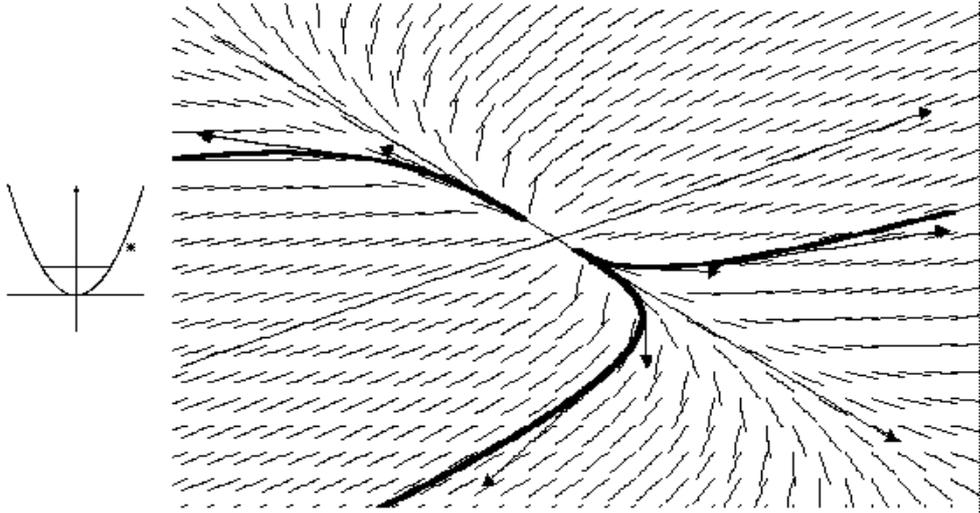
(1.3.5) Verallgemeinernd können wir folgende **geometrische Interpretation unserer Differentialgleichung** gewinnen, die sich generell als ausgesprochen wichtig und nützlich erweist:

<p>Die Skizze zeigt unsere Matrix M vom Feldstandpunkt. Um Übersichtlichkeit zu behalten, ist nur die Richtung der Feldvektoren, nicht deren Länge gezeichnet. Eine Lösungskurve \vec{y} von $\dot{\vec{y}}(t) = M \cdot \vec{y}(t)$ ist dann in geometrischer Betrachtungsweise ein Kurve $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart, daß in jedem Kurvenpunkt $\vec{y}(t)$ die vektorielle Geschwindigkeit $\dot{\vec{y}}(t)$ gleich dem dortigen Feldvektor $M \cdot \vec{y}(t)$ ist.</p>	
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------

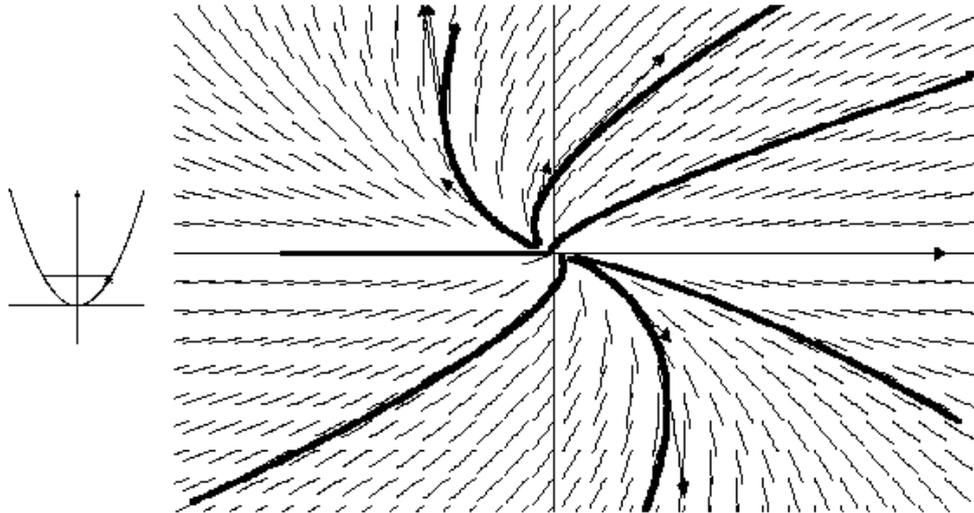
Zusätzlich ist das Bild einer Lösungskurve eingezeichnet zusammen mit einigen Tangentenvektoren.

(1.3.6) D.h. also: Die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ zur Zeit t im Punkte $\vec{y}_0 = \vec{y}(t)$ wird vollständig festgelegt durch Anwenden von M auf den Ortsvektor \vec{y}_0 . Die Geschwindigkeit bestimmt aber über $d\vec{y} = \vec{v}(t)\Delta t$ die Änderung von \vec{y} .

(1.3.7) Wir geben dieselben Figuren für einige weitere 2×2 -Matrizen. Die Bedeutung der mitgezeichneten Parabel wird später erläutert.



Immer hat der Vektor der momentanen Geschwindigkeit die Richtung des Feldes an demselben Ort.



(1.3.8) Die Bilder verdeutlichen: Die Differentialgleichung legt das Richtungsfeld mit Hilfe von M fest. Hat man dieses Feld (im Konfigurationsraum) skizziert, folgt daraus die qualitative Form der Lösungskurven (genauer die von $\text{Bild}(\vec{r})$) recht genau.

(1.3.9) Abstrahieren wir unser Resultat, um zu verstehen, wie eine durch eine Differentialgleichung beschriebene Bedingung zugehörige Lösungskurven bestimmt:

Was ist eine Differentialgleichung? Dritter Versuch:
 $M:\vec{x} \mapsto M.\vec{x}$ wird als Abbildung vom Feldtyp interpretiert.
 Das Feld produziert in jedem Punkt von V einen angehefteten Feldvektor $M.\vec{x}$.
 Eine Lösungskurve von $\dot{\vec{x}}(t)=M.\vec{x}(t)$ hat die Eigenschaft, daß in jedem Kurvenpunkt, die momentane Geschwindigkeit gleich dem dort herrschenden Feldvektor ist.
 Das ist die geometrische Interpretation der Differentialgleichung.

Oder mit einer anderen physikalischen Interpretation: Wir interpretieren $\vec{x} \mapsto M.\vec{x}$ als Kraftfeld. Dann sind die Bilder der Lösungskurven gerade die Feldlinien des Feldes,

- Wir können auch an bereits Bekanntes anknüpfen: In Kap. 6.1 haben wir Geschwindigkeitsfelder als Hilfsmittel zur Abbildungsveranschaulichung verwendet. Wie hängen die dort gegebenen Überlegungen mit unseren Differentialgleichungen zusammen?

7.1.4 Die allgemeine Lösungsformel

(für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

(1.4.1) Damit beenden wir vorerst die Diskussion der allgemeinen Fragen und wenden uns der konkreteren Frage nach den Lösungen von Differentialgleichungen zu: **Wieviele Lösungen gibt es und wie kann man sie erhalten?**

(1.4.2) Mathematisch sind die für dieses Kapitel ausgewählten linearen Differentialgleichungen dadurch ausgezeichnet, dass man für sie eine allgemeine Lösungsformel besitzt, mit deren Hilfe man wiederum gut und verallgemeinerbar die Eigenschaften der Lösungen untersuchen kann.

(1.4.3) Überdies ist die Kenntnis dieser Gleichung sehr nützlich, da sich viele Anwendungsprobleme in die angegebene Form bringen lassen bzw. über eine Tangentenapproximation durch eine derartige Gleichung angenähert werden. Die Bewegungsgleichung für das ebene Pendel ist das klassische Beispiel: Nähert man $\sin x$ durch x , so erhält man eine gut handhabbare lineare Gleichung. Arbeitet man mit dem exakten $\sin x$,

dann erhält man eine schwer zu behandelnde Gleichung, die dafür jedoch viel interessantere Phänomene erfaßt und beschreibt!

Schließlich werden wir in 7.1.7 unter dem Stichwort "Reduktionstrick" sehen, dass sich entsprechende Gleichungen mit höheren Ableitungen auf diesen Fall zurückführen lassen.

(1.4.4) **Wir wollen die angesprochene allgemeine Lösungsformel jetzt herleiten.** Zunächst noch einmal die genaue Fragestellung:

V Sei endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} . $\dim V = N$.
 Weiter sei $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ der Raum aller beliebig oft differenzierbaren Kurven $\mathbb{R} \rightarrow V$ und $M:V \rightarrow V$ ein Vektorraumhomomorphismus.
Gesucht sind alle $\vec{y} \in \mathfrak{F}$, die $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$ erfüllen.
 Oder als Gleichung für die Werte $\vec{y}(t) = M \cdot \vec{y}(t)$ für alle t .
 \mathcal{L} sei die Menge **aller** Lösungen dieses Problems.

(1.4.5) **Und jetzt die Überlegung, die die Lösungsformel liefert:**

Sei $\vec{r} \in \mathcal{L} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V)$ eine Lösung unseres Problems. Laut Voraussetzung ist \vec{r} beliebig oft differenzierbar.

Die Ableitungen lassen sich leicht ausrechnen. Es ist $\dot{\vec{r}} = M \cdot \vec{r}$, weil eine Lösung vorliegt. (Dies ist jetzt keine Bestimmungsgleichung für \vec{r} . Vielmehr drückt sie $\dot{\vec{r}}$ durch \vec{r} aus.) (1.4.6) Differenzieren wir diese Gleichung so folgt

$$\ddot{\vec{r}} = M \dot{\vec{r}} = M^2 \cdot \vec{r} \quad \text{Induktiv folgt} \quad \boxed{\vec{r}^{(n)} = M^n \vec{r}}.$$

Ableiten bedeutet für eine Lösungskurve einfach Potenzieren von M! Jede Ableitung ergibt einen weiteren Faktor M. Speziell ist auch $\vec{r}^{(0)} = M^0 \cdot \vec{r}$, da $M^0 = \text{id}_V = 1$ ist.

(1.4.7) Die Taylorentwicklung der Ordnung N existiert daher und lautet:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^N \frac{M^k \cdot \vec{r}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k + \frac{1}{N!} \int_{t_0}^t ds (t-s)^N M^{N+1} \cdot \vec{r}(s).}$$

Der Restterm läßt sich leicht abschätzen, wenn wir eine Norm verwenden, die die Gleichung $\|M \cdot \vec{x}\| \leq \|M\| \cdot \|\vec{x}\|$ erfüllt und ebenso $\|M^k\| \leq \|M\|^k$. Die in Kap.6 (2.2.17) eingeführte Operatornorm und die L^1 -Norm tun das.

(1.4.8) Damit folgt unmittelbar eine Abschätzung für den Fehler N-ter Ordnung:

$$\|\vec{F}^{(N)}\| \leq \frac{(t-t_0)^{N+1}}{(N+1)!} \|M\|^{N+1} S \quad \text{wobei} \quad S = \sup_{|t-t_0| \leq T} \|\vec{r}(t)\| \text{ gesetzt ist.}$$

Erneut dürfen wir die Funktion nicht über ganz \mathbb{R} abschätzen, da dort das Supremum divergieren könnte. Beschränken wir uns aber (zunächst) auf $|t-t_0| \leq T$, so gilt mit Sicherheit obige Ungleichung mit von T abhängigem endlichen S.

(1.4.10) Inspektion zeigt: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\vec{F}^{(N)}\| = 0$ gleichmäßig für $|t-t_0| \leq T$. Punktweise, aber nicht notwendig gleichmäßige Konvergenz ist dagegen für jedes t gesichert. Der Konvergenzradius der Reihe ist ∞ .

(1.4.11) Damit haben wir folgendes Resultat:

Jede Lösungskurve \vec{r} von $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$ ist durch ihre (notwendig konvergente) Taylorreihe darstellbar. Da wir T in keiner Weise eingeschränkt haben, konvergiert die Potenzreihe sogar für alle $t \in \mathbb{R}$.

(1.4.12) Infolge der absoluten Konvergenz der Reihe dürfen wir weiter den von N nicht abhängigen Faktor $\vec{r}(t_0)$ ausklammern und finden:

$$\vec{r}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} (t-t_0)^k \right) \cdot \vec{r}(t_0) = e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{r}(t_0).$$

Wir hatten ja bereits in Kap.6.4.5 bewiesen, daß diese Potenzreihe aus Endomorphismen absolut konvergiert. Ihr Grenzwert ist erneut ein Endomorphismus, eben "e-hoch-Matrix"!

(1.4.13) Das Ergebnis ist eine bemerkenswerte Formel, für die sich eine sorgfältige Diskussion lohnt. Die Formel sagt aus:

◆	Nehme den Wert $\vec{y}(t_0)$ der Lösung zum Zeitpunkt t_0 . Das ist ein fester von t unabhängiger Vektor, den man Anfangswert nennt. Wende darauf den t -abhängigen Endomorphismus $\exp(M(t-t_0))$ an. Dann ist der resultierende Vektor gleich dem interessierenden Kurvenwert $\vec{r}(t)$ für den Zeitpunkt t .
◆	Die Matrix $\exp(M(t-t_0))$ ist durch M vollständig bestimmt. Kennt man $\exp(M(t-t_0))$, so kann man die gesamte Kurve aus einem einzigen Kurvenpunkt berechnen.
◆	$\exp(M(t-t_0))$ ist ein Entwicklungsoperator von der in Kap3.3.5a beschriebenen Art. Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf der Menge V vermöge $(t, \vec{y}) \mapsto \exp(tM) \cdot \vec{y}$
◆	Zur Erinnerung nochmals die wichtigsten Eigenschaften von $t \mapsto e^{tM}$: 1) $e^{0M} = id_V$ 2) $(e^{tM})^{-1} = e^{-tM}$ 3) $e^{(t+s)M} = e^{tM} e^{sM}$ 4) $\frac{d}{dt} e^{tM} = M e^{tM} = e^{tM} M$.

(1.4.14) **Offen ist noch, ob man auch umgekehrt den Kurvenpunkt $\vec{r}(t_0)$ beliebig vorgeben kann oder ob er noch gewissen einschränkenden Bedingungen genügen muß, damit eine Lösung herauskommt.**

(1.4.15) Die zu untersuchende Frage ist klar: Gebe $\vec{r}_0 \in W$ beliebig vor. Setze diesen Vektor für $\vec{r}(t_0)$ ein, bilde also $\vec{s}(t) = e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{r}_0$ und schaue nach, ob \vec{s} eine Lösung unserer Differentialgleichung bildet. Da man die Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, folgt sofort $\dot{\vec{s}}(t) = M e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{r}_0 = M \vec{s}(t)$. Also ist \vec{s} eine Lösung der Differentialgleichung.

(1.4.16) **Damit haben wir \mathcal{L} (= Lösungsmenge von $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$) vollständig bestimmt:**

◆	Es gilt: $\mathcal{L} = \{ r \in \mathfrak{F} \mid \vec{r}(t) = e^{(t-t_0)M} \vec{r}_0 \text{ für } t \in \mathbb{R}, \vec{r}_0 \in W \}$ t_0 äußerer Parameter Da $(W, \vec{r}_0 \mapsto \vec{r}, \mathfrak{F})$ offensichtlich linear und injektiv ist, ist das ein Vektorraumisomorphismus zwischen W und \mathcal{L} . D.h. der Lösungsraum ist ein endlichdimensionaler Teilraum des unendlichdimensionalen Abbildungsraumes \mathfrak{F} .
◆	Die Dimension des Lösungsraumes ist (im Falle von $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$) gleich der Dimension des Konfigurationsraumes W .

(1.4.17) Das gibt einen ungeheuren Zugewinn an Information über die Lösungsmenge unserer Differentialgleichung: **Es handelt sich um einen Teilvektorraum, und seine Dimension ist dieselbe wie die des Werteraumes W .**

(1.4.19) Die Dimensionsaussage ist neu, überraschend und wichtig.

Nehmen wir etwa unser Einstiegsbeispiel aus (1.3.2). Dort war der Werteraum der \mathbb{R}^2 . Also ist die Dimension des Lösungsraumes auch 2. Wir kennen bereits eine Lösung \vec{r}_1 mit $x_1(t) = \sin t$ und $y_1(t) = \cos t$. Für eine Basis benötigen wir nur noch eine zweite unabhängige Lösung. Inspektion zeigt, dass die Gleichungen auch durch \vec{r}_2 mit $x_2(t) = \cos t = \cos(-t)$ und $y_2(t) = -\sin t = \sin(-t)$ gelöst werden. Das beschreibt eine gegenüber der ersten um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobene Kreisbewegung. Beide Lösungen sind unabhängig. **Damit haben wir eine Basis des Lösungsraumes und sind fertig:** Jede Lösung hat die Form $\vec{x}_{ab}(t) = a \vec{r}_1(t) + b \vec{r}_2(t)$. Man nennt eine solche Parametrisierung des Lösungsraumes im Falle von Differentialgleichungen gern *die allgemeine Lösung der Gleichung*.

(1.4.20) Nochmals alle Resultate zur Differentialgleichung $\dot{\vec{r}}(t) = M \cdot \vec{r}(t)$ zusammengefaßt:

- | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) \mathfrak{L} ist Vektorraum mit $\dim \mathfrak{L} = \dim W = N$. 2) Hat man N unabhängige Lösungen, also eine Basis von \mathfrak{L}, dann erhält man alle Lösungen durch Linearkombination.
Das ist die allgemeine Lösung. 3) Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ hat man einen Vektorraumisomorphismus $(W, \vec{r}_0 \mapsto \vec{r}, \mathfrak{L})$ mit $\vec{r}(t) = e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{r}_0$, der über den <i>Anfangswert</i> \vec{r}_0 die gesamte Lösung festlegt. 4) Die Entwicklungsabbildung $(\mathbb{R}, t \mapsto e^{(t-t_0)M}, \text{Aut}(W))$ ist durch ihre Potenzreihe festgelegt. 5) Geometrische Deutung: Für $t \in \mathbb{R}$ ist der Feldwert $M \cdot \vec{r}(t)$ gleich der momentanen Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ am Orte $\vec{r}(t)$. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

7.1.5 Das Anfangswertproblem

(1.5.1) Damit ist im Rahmen der üblichen Gleichungslehre unsere Differentialgleichung gelöst: **Wir haben die Lösungsmenge bestimmt**, sogar eine Lösungsformel angegeben. Unser Resultat liefert aber noch mehr. Wir können noch eine wichtige Zusatzbedingung stellen und die Lösung zusätzlich erfüllen kann. Diese Zusatzbedingung nennt man etwas unglücklich *Anfangswertbedingung*. Formulieren wir einmal das zugehörige Problem:

Differentialgleichung mit Anfangswertproblem:

Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$. Dazu ein $t_0 \in \mathbb{R}$ und ein Vektor $\vec{r}_0 \in W$. Also ein Punkt (t_0, \vec{r}_0) des Graphenraumes $\mathbb{R} \times W$

Gesucht sind alle Lösungen $\vec{r} \in \mathfrak{L}$ der Differentialgleichung, die zusätzlich $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ erfüllen.

(1.5.2) Unsere Formel löst dieses Problem unmittelbar und vollständig durch die eine Lösung

$$\vec{r}(t) = e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{r}_0.$$

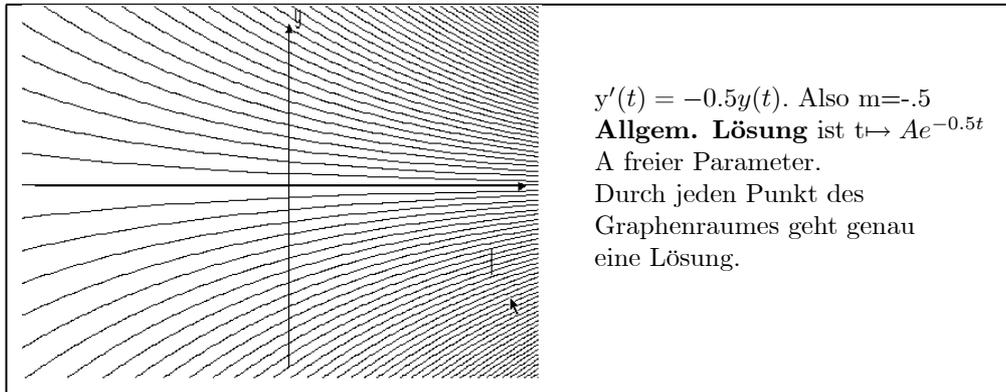
D.h: **Es gibt immer genau eine Lösung des Problems und die steht bereits da**. Die Formel ist jetzt nur mit anderer Rollenzuweisung zu lesen. \vec{r}_0 ist nicht mehr freier Parameter, sondern Konstante oder eventuell äußerer Parameter.

(1.5.3) Wir können das Resultat auch geometrisch interpretieren und sagen:

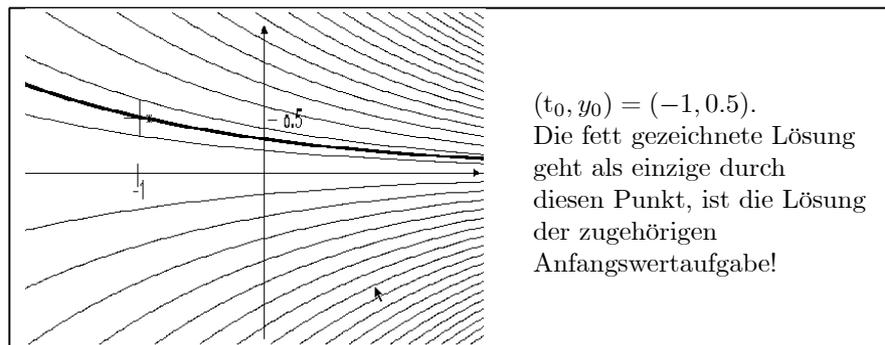
<p>Zu jedem Punkt (t_0, \vec{r}_0) des Graphenraumes gehört genau eine Lösung \vec{r} der Differentialgleichung, deren Graph durch diesen Punkt verläuft.</p>

(1.5.4) Den gesamten Sachverhalt veranschaulichen wir uns günstig am Fall $N = \dim W = 1$. Dann lautet unsere Differentialgleichung einfach $y'(t) = m y(t)$, wobei $m \in \mathbb{R}$ eine Zahl ist. (M ist eine 1×1 -Matrix!) Für $N=1$ ist die "e-hoch-tM- Reihe" die Reihe der gewöhnlichen Exponentialfunktion. Obige Formel gibt für den Punkt (a, Y) des Graphenraumes die Lösung $y_{aY}(t) = e^{(t-t_0)m} Y$, wobei rechts jetzt ein übliches Zahlprodukt steht.

(1.5.5) Der Graphenraum ist in diesem Fall zweidimensional. Der Einschub veranschaulicht unsere Resultate zum Anfangswertproblem für diesen Fall.



Und jetzt zum Anfangswertproblem:



(1.5.7) Eine Anmerkung eher psychologischer Art ist an dieser Stelle angebracht: Vielfach besteht die Vorstellung, in der Mathematik gehöre zu einem anspruchsvollen Problem immer eine schwierige Rechnung. *Die Lösung muß doch ausgerechnet werden.* Jetzt lösen wir Differentialgleichungen hier einfach durch Raten einiger unabhängiger Lösungen. (Deren Anzahl wird durch das Dimensionsargument festgelegt.) Das kann doch nicht in Ordnung sein. Nun, unsere Resultate aus der linearen Algebra und über die Dimension des Lösungsraumes machen machen eine solche Rechnung unnötig. Die allgemeinen Resultate liefern das gewünschte Resultat mit mathematischer Sicherheit, auch ohne lange Rechnung. Das Bedürfnis nach dem komplizierten Ausrechnen der jeweiligen Lösung ist in Wahrheit ganz unmathematisch. Wenn man will, zeigt sich hier der praktische Nutzen abstrakter Resultate.

(1.5.8) **Wieso sind Anfangswertprobleme wichtig?** Bei vielen Problemen, die im Zusammenhang mit Differentialgleichungen auftreten, interessiert man sich für eine ganz spezielle Lösung. Im Falle der Newtonschen Bewegungsgleichung etwa sucht man meist eine **bestimmte** physikalische Bahnkurve. Dann zerlegt man das Bestimmungsproblem in zwei Teile: Zunächst bestimmt man **alle** physikalischen Bahnen, und anschließend sucht man in dieser Menge die spezielle Lösung. Unser Resultat zeigt: Die Vorgabe eines Punktes des Graphenraumes ist der ideale Datensatz, um den zweiten Teil der Aufgabe anzugehen. Hat man einen solchen als Zusatzinformation - etwa als zusätzliches Beobachtungsergebnis - dann gibt es genau eine zugehörige Lösungskurve. Hat man weiter den Automorphismus $e^{(t-t_0)M}$, so reduziert sich für jedes solche Anfangswertproblem die Lösung auf das Anwenden einer Matrix (bzw. eines Automorphismus) auf einen Vektor.

(1.5.9) Die gefundene Lösung muß natürlich keineswegs im Zeitpunkt t_0 "anfangen". Daher ist Anfangswert eine unglückliche Bezeichnung. t_0 ist vielmehr der oder ein Zeitpunkt, für den man zusätzliche Information über die Bahnkurve besitzt.

7.1.6 Anschauliche Vorstellungen zur Lösungsstruktur

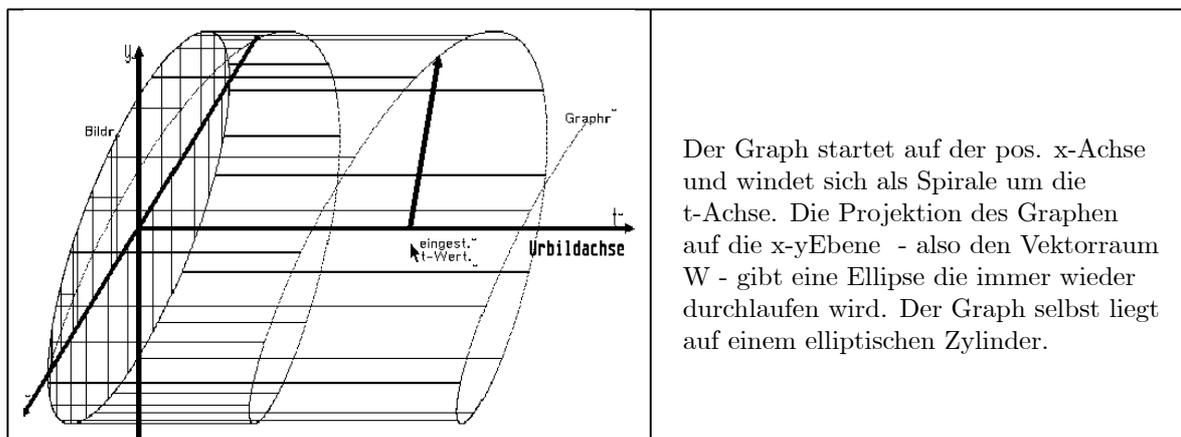
(1.6.1) Es ist wichtig, sich die angestellten Überlegungen und gefundenen Ergebnisse möglichst gut zu veranschaulichen. Das gilt besonders auch deshalb, weil die hier entstehenden Vorstellungen Grundlage für die Behandlung **aller** Differentialgleichungen sein werden. Wir entwickeln diese Vorstellungen zunächst für

die Fälle $N=1$ und $N=2$ und verallgemeinern sie dann mit den Methoden der analytischen Geometrie auf alle Dimensionen.

(1.6.2) Die Veranschaulichung der Lösungskurven $\mathbb{R} \rightarrow W$ kann entweder vom Graphenstandpunkt oder vom Parametrisierungsstandpunkt aus erfolgen. Im ersten Fall erhält $\mathbb{R} \times W$, im zweiten W die Rolle des Zeichen- und Vorstellungsraumes. (Vgl. Kap. 1.2.7. Der Feldstandpunkt mit \mathbb{R} als Konfigurationsraum ist hier weniger nützlich.)

(1.6.3) Beginnen wir mit dem Graphenstandpunkt. Leider ist der Graphenraum bereits für $\dim W=N=2$ dreidimensional. Ist $t \mapsto \vec{r}(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist $t \mapsto (t, \vec{r}(t))$ die zugehörige kanonische Parametrisierung des Graphen. Vgl. Kap.1.(2.6.6). Zu jedem t -Wert gibt es einen Schnittpunkt mit dem Graphen, und dieser bestimmt $\vec{r}(t)$. Unsere Resultate über die Anfangswertaufgabe besagen, dass durch jeden Punkt des Graphenraumes genau ein Graph laufen muß, so dass man insgesamt eine Partition des Graphenraumes in Kurvengraphen erhält! Jeder Graph selbst ist eindimensional vom Kurventyp (genauer: hat einen Freiheitsgrad). Es ist praktisch so, als hätten wir eine Raumzerlegung in (in Querrichtung) durch ausdehnungslose Spaghettis vorliegen. Wir werden sehen, dass das eine ganz **fundamentale Struktur der Lösungsmengen von Differentialgleichungen** ist.

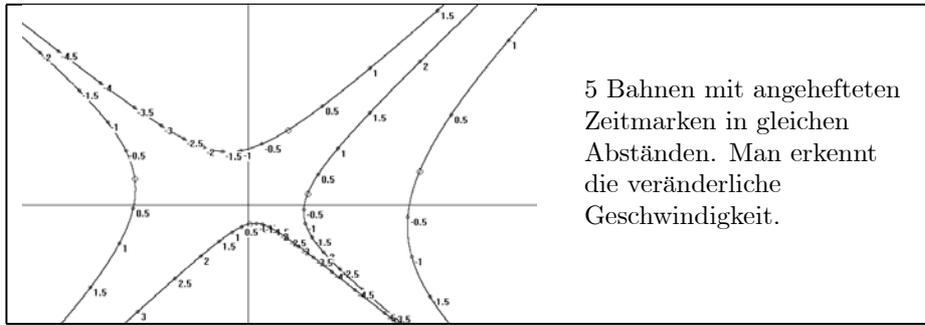
(1.6.4) Der Einschub zeigt einen derartigen Graphen für unser Beispielsystem (1.3.2). Das Bild ist mit Hilfe eines interaktiven Computerprogramms gewonnen worden, bei dem man mit der Maus den Zeitpunkt wählt und das dann den zugehörigen Graphenpunkt für die gezeichnete Lösung darstellt. Man muß sich den gesamten Raum durch derartige Spiralen erfüllt denken, die sich nie schneiden. oder treffen. Senkrecht zur t -Achse ist der hier zweidimensionale Konfigurationsraum gezeichnet. Die Projektion des Graphen ergibt eine Ellipse.



(1.6.5) Die Projektionen des Graphen in die x - t -Ebene und in die y - t -Ebene ergeben die üblichen Koordinatenfunktionen. Über die kanonische Parametrisierung des Graphen kann man sie sofort gewinnen. Diese Koordinatenfunktionen lassen sich natürlich auch für höheres $N=\dim W$ bestimmen und zeichnen. In vielen Fällen sind eine oder mehrere dieser Koordinatenfunktionen das eigentliche Ziel des Interesses.

- Skizzieren Sie für den Graphen aus (1.6.4) die beiden Koordinatenfunktionen.
- Bestimmen und skizzieren Sie für den folgenden Graphen im Vierdimensionalen die 3 zugehörigen Koordinatenfunktionen $t \mapsto (t, t^3, \cos(t), \sin(2t))$. Die 1-Achse ist die t -Achse. Was für eine Bewegung im zugehörigen dreidimensionalen Konfigurationsraum wird beschrieben?

(1.6.6) Vielfach zieht man im Differentialgleichungsbereich den Parametrisierungsstandpunkt vor, der zur Darstellung eine Dimension weniger verlangt. Das nächste Bild zeigt eine typische Darstellung dieses Typs. Zu sehen sind 5 Bahnen mit angehefteten Zeitmarken. Meist läßt man die Zeitmarken noch fort, beschränkt sich also auf die Darstellung von $\text{Bild}\vec{r}$. Beispiele hierfür geben bereits die Bilder aus (1.3.7).



(1.6.7) Wie hängen die beiden Veranschaulichungen zusammen? Nun Bild(\vec{r}) ist offensichtlich die Projektion des Graphen in den Phasenraum V . D.h. im ersten Beispiel ist das Bild die Ellipse in der x - y -Ebene.

(1.6.8) Jetzt erhebt sich die Frage, was geschieht, wenn man beim Parametrisierungsstandpunkt mehr als eine Lösungskurve zeichnet. Zu erwarten ist, dass dann ein Durcheinander entsteht, dass sich die Linien schneiden. Das ist allgemein auch der Fall, **aber nicht bei den Differentialgleichungen des hier besprochenen Typs**. Vielmehr entsteht auch eine Partition des Vektorraumes V . Das wollen wir jetzt zeigen. Das Ergebnis ist wegen der Dimensionsreduktion für die Veranschaulichung von großer Bedeutung.

7.1.6a Die Phasenraumpartition

(1.6.9) Mit Hilfe der e^{tM} -Formel lassen sich viele Fragen an unsere Differentialgleichung allgemein behandeln und lösen, ohne daß die Lösung explizit verfügbar sein müßte.

(1.6.10) Wir wollen dies am Beispiel der folgenden wichtigen Beobachtung illustrieren.

Es sei $t \mapsto \vec{r}(t)$ eine Lösung von $\dot{\vec{y}} = M\vec{y}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch $t \mapsto \vec{s}_a(t) = \vec{r}(t - a)$ eine Lösung (für jedes $a \in \mathbb{R}$).

Für den Graphen besagt dies: Ist G der Graph einer Lösung und verschiebt man diesen parallel zur t -Achse, dann erhält man den Graphen einer weiteren Lösung.

(1.6.11) Der Beweis ist trivial! Laut Kettenregel ist

$$\dot{\vec{s}}_a(t) = \dot{\vec{r}}(t - a) = M\vec{r}(t - a) = M\vec{s}_a(t).$$

Also ist auch \vec{s}_a Lösung der Differentialgleichung. Graph \vec{s}_a entsteht aus Graph \vec{r} =Graph \vec{s}_0 einfach, indem man den Graphen parallel zur t -Achse um a verschiebt. Oben im Bild entsteht eine verschobene elliptische Spirale auf demselben Zylindermantel. Der gesamte Zylindermantel wird disjunkt in solche Spiralen zerlegt, wenn man a alle Werte aus \mathbb{R} durchlaufen läßt. Und alle diese Graphen liefern dieselbe Projektion in die x - y -Ebene.

Variiert dann man noch den Radius des Zylindermantels, so erhält man die gesamte Spagettipartition des Graphenraumes.

□ Es sei f reelle Funktion und F eine Stammfunktion. Sehen Sie eine Analogie?

(1.6.12) Das soeben Gesagte hat eine einfache, aber nützliche Konsequenz: Hat man eine Formel für e^{tM} dann erhält man die Formel für $e^{(t-t_0)M}$, indem man überall t durch $(t-t_0)$ ersetzt! Es genügt daher immer, den Fall $t_0=0$ zu behandeln. Sehen Sie sich unter diesem Aspekt einmal die Formeln (1.4.12) oder (1.4.20) an. Von jetzt ab werden wir daher immer nur e^{tM} behandeln und vom Leser stillschweigend erwarten, dass er bei Bedarf t durch $t-t_0$ ersetzt.

(1.6.13) Wie steht es nun mit der angekündigten Partition des Konfigurationsraumes - besser Phasenraumes (nicht des Graphenraums)? Wir beobachten:

$(t, \vec{x}) \mapsto e^{tM} \cdot \vec{x}$ definiert eine Linksoperation der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf dem Phasenraum W . Die Bahnen dieser Operation sind gerade die Bilder der Lösungskurven. Sie bilden eine Partition von W .

(1.6.14) Es ist nachzuweisen, daß eine Linksoperation vorliegt:

0.) Die Zuordnung erklärt tatsächlich eine Abbildung $G \times W \rightarrow W$, also von der gewünschten Art.

1) Es ist $(0, x) \mapsto e^{0M} \vec{x} = id_W \vec{x} = \vec{x}$, also $\mathbb{I} \star \vec{x} = \vec{x}$.

2) $e^{(s+t)M} \vec{x} = (e^{sM} e^{tM}) \vec{x} = e^{sM} (e^{tM} \vec{x})$ wegen der Rechenregeln für Endomorphismen. Damit folgt $(s+t) \star \vec{x} = s \star (t \star \vec{x})$ wie gewünscht.

(1.6.15) Die Bahnen dieser Operation sind gerade die Bilder der Lösungskurven. Da eine Operation vorliegt, erhalten wir eine Partition des Phasenraums. Eine spezielle **einelementige** Klasse wird immer durch den Nullpunkt gebildet. Er ist das Bild der konstanten Bahnkurve $t \mapsto 0$, die offensichtlich für jedes M Lösung der Differentialgleichung ist. Die anderen Klassen dagegen haben (eindimensionalen) Kurvencharakter. In Bildern wie (1.3.5-7) sind immer nur einzelne dieser Bahnen gezeichnet. Tatsächlich geht natürlich durch jeden Punkt $\vec{x} \in W$ eine solche Bahn, die beispielsweise durch die Lösungskurve $t \mapsto e^{tM} \cdot \vec{x}$ erzeugt wird.

(1.6.16) Mit diesen Bildern ist daher die folgende Vorstellung zu verbinden: Wählt man einen Punkt $\vec{r}_0 \in W$ und einen Zeitpunkt t_0 , so gibt es genau eine Lösung $e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{r}_0$, die zur Zeit t_0 in \vec{r}_0 startet. Ihr Bild ist die durch \vec{r}_0 laufende Klasse. Man weiß, dass alle anderen Punkte der Klasse irgendwann durchlaufen werden, nur nicht wann.

(1.6.17) Zu jeder (nicht einelementigen) Bahn im Phasenraum gehören unendlich viele Graphen von Lösungen im Phasenraum, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Die Bilder selbst geben die zugehörige Partition nicht immer ganz korrekt wieder. So legt die Anschauung nahe, dass zwei sich im Nullpunkt schneidende Geraden als zusammenhängendes Gebilde eine einzige Klasse bilden. In Wahrheit liegen aber 5 Klassen vor: 4 Halbgeraden und eine einpunktige Klasse.

7.1.7 Der Reduktionstrick

(1.7.1) Auf den ersten Blick sieht es aus, als wäre die von uns behandelte Differentialgleichung $\dot{\vec{y}}(t) = M\vec{y}(t)$ sehr speziell. Insbesondere, weil im zugehörigen Differentialoperator nur **erste Ableitungen** auftreten. Das ist falsch, da man Differentialgleichungen *höherer Ordnung* - also mit höheren Ableitungen - immer auch als gleichwertige Differentialgleichung 1. Ordnung schreiben kann. Die Methode, mit der wir diese Umwandlung vornehmen, nennen wir den **Reduktionstrick**.

Die Ableitungen höherer Ordnung werden dabei durch Einführung zusätzlicher Variabler auf Ableitungen 1. Ordnung reduziert. Zusätzliche Variable bedeutet **Erhöhung der Dimension des Vektorraumes der Werte**.

(1.7.2) **Die Idee sieht so aus:** Treten in einem Differentialoperator zweite, dritte usw. Ableitungen auf, so führen wir zusätzliche Konfigurationsraumgrößen ein. Zunächst eine für die Geschwindigkeit. Da die zweite Ableitung die erste Ableitung der ersten ist, entsteht eine **erste** Ableitung der neuen Größe, der Geschwindigkeit. Dies setzen wir fort, bis nur noch erste Ableitungen auftreten.

(1.7.3) Angenommen, unsere Differentialgleichung lautet $\vec{r}''(t) = \vec{F}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t))$. Dabei handele es sich um Kurven $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow V$. Dann führen wir einen neuen Raum $W = V \times V \times V$ ein mit Elementen $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ und setzen $\vec{y}_1(t) = \vec{r}(t)$, $\vec{y}_2(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und $\vec{y}_3(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$. Jetzt können wir in der Differentialgleichung alle \vec{r} -Größen durch \vec{y} -Größen ersetzen. Zusammen entsteht das folgende System:

$$\begin{array}{|l} \dot{\vec{r}}(t) = \vec{y}_1(t) \\ \dot{\vec{r}}(t) = \vec{y}_2(t) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{y}_3(t) \end{array} \quad \text{Also} \quad \begin{array}{|l} \dot{\vec{y}}_1(t) = \vec{y}_2(t) \\ \dot{\vec{y}}_2(t) = \vec{y}_3(t) \\ \dot{\vec{y}}_3(t) = \vec{F}(t, \vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \vec{y}_3(t)) \end{array}$$

Das Ergebnis rechts ist offenbar eine Differentialgleichung mit nur noch ersten Ableitungen für Kurven der folgenden Art:

$$(\mathbb{R}, t \mapsto \vec{Y}(t) = {}^t(\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \vec{y}_3(t)), W) \quad \text{wobei } W = V^3 \text{ ist.}$$

(1.7.4) Die zugehörigen Lösungsmengen sind kanonisch isomorph: Hat man eine Lösung des neuen Systems, so liefert die erste Komponente eine Lösung der Ausgangsgleichung. Die zweite Komponente ist die zugehörige Geschwindigkeit, ist also die Ableitung der ersten, usw.. Hat man umgekehrt eine Lösung $\vec{r}(t)$

der Ausgangsgleichung, so kann man diese differenzieren. Dann setzt man aus \vec{r} , \vec{v} und \vec{a} eine Lösung \vec{Y} des neuen Systems zusammen. Ist beispielsweise $\vec{r}(t) = \vec{g}t^4 + \vec{a} \sin(t)$, so folgt:

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} \vec{g}t^4 + \vec{a} \sin t \\ 4\vec{g}t^3 + \vec{a} \cos t \\ 12\vec{g}t^2 - \vec{a} \sin t \end{pmatrix}.$$

Bei der ursprünglichen Gleichung gehe es um Kurven $\mathbb{R} \rightarrow V$. Diesen ursprüngliche Raum V nennen wir (weiter) den **Konfigurationsraum unseres Systems**. Dabei handelt es sich üblicherweise um den physikalischen Erfahrungsraum. Seine Dimension bezeichnen wir mit n . Wenn in der Ausgangsgleichung Ableitungen bis zur k -ten Ableitung auftreten, dann gehören zum neuen System Kurven $\mathbb{R} \rightarrow W$ mit $W=V^k$. Diesen Raum für die Kurven der (auf die erste Ordnung) reduzierten Differentialgleichung nennen wir den **Phasenraum des Systems**. Für seine Dimension N gilt $N=kn$. Unsere e^{tM} -Formel bezieht sich auf den Phasenraum, ist als Matrix eine $N \times N$ -Matrix!

Der Lösungsraum der Differentialgleichung hat dieselbe Dimension $N=kn$.

Wenn die Ausgangsgleichung nur erste Ableitungen enthält, stimmen Konfigurationsraum und Phasenraum überein, sonst ist der Phasenraum größer.

(1.7.6) **Achtung:** Für Veranschaulichungszwecke oder geometrische Überlegungen wird man dem Phasenraum vielfach die **Rolle eines Konfigurationsraumes** im bisherigen Sinne zuweisen. Dann kann der Terminus Konfigurationsraum in zweierlei Bedeutung auftreten.

Auch der Begriff "Phasenraum" wird in der Physik noch in einer anderen Bedeutung verwendet, wie wir später sehen werden.

(1.7.7) Im wichtigen Fall Newtonscher Bewegungsgleichungen treten zweite Ableitungen (Beschleunigungen) auf. Der Phasenraum hat dann die doppelte Dimension wie der Konfigurationsraum. Also $N=2n$. Vgl. das Einführungsbeispiel in Kap.7.0.

- Wie lautet die Phasenraumform der Newtonschen Gleichung für einen Massenpunkt?
- Wie lautet die Phasenraumform der folgenden beiden Differentialgleichungen : $x''(t) + tx'(t)x(t) + x^2(t) = e^t$ und $(x''(t))^2 + t \sin(x'(t)) = x(t)$?

(1.7.8) Ist insbesondere die Ausgangsgleichung linear und homogen, so ist die reduzierte Gleichung automatisch von der besprochenen Form $\dot{\vec{Y}}(t) = M \cdot \vec{Y}(t)$. Zwar ist die Raumdimension von n auf $N=kn$ erhöht, aber das macht für unseren Formalismus nichts aus.

- Wandeln Sie $y^{(4)}(x) + 2y^{(3)}(x) + 3y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0$ in die Matrixform um!

(1.7.9) Nehmen wir als Illustration den in der Physik beliebten Fall des Oszillators mit Reibung, dem wir das gesamte Kap.7.2 widmen werden. Die Differentialgleichung lautet ($n=1$, also eindimensionaler Konfigurationsraum) $\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$. Hier ist $k=2$ und damit $N=2$. Mit dem Reduktionstrick wird daraus das folgende System:

$y_1(t) = x(t)$	also	$\dot{y}_1(t) = 0y_1(t) + 1y_2(t)$
$y_2(t) = \dot{x}(t) = v(t)$		$\dot{y}_2(t) = -\omega_0^2 y_1(t) - 2\rho y_2(t)$

Damit ergibt sich folgendes System erster Ordnung:

$$\dot{\vec{Y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\rho \end{pmatrix} \vec{Y}(t)$$

Für $\rho = 0$, also den reibungsfreier Fall, werden wir die Lösungen in Kürze nochmals explizit bestimmen. (1.7.10) Fassen wir zusammen:

- ◆ Mit Hilfe des Reduktionstricks kann man Differentialgleichungen mit höheren Ableitungen stets auf gleichwertige mit nur ersten Ableitungen zurückführen!
- ◆ Insbesondere lassen sich alle linearen homogenen Differentialgleichungen in der Form $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$ schreiben.
- ◆ Und noch spezieller führt die Oszillatorgleichung auf $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\rho \end{pmatrix}$

- Nicht jede Matrix hat die Form der durch den Rdktionstrick entstehenden Matrizen.

7.1.8 Die Berechnung der Lösungen im Falle N=2

(1.8.1) Damit kehren wir zur Diskussion unserer Gleichung $\dot{\vec{y}} = M\vec{y}$ zurück, die jetzt natürlich viel gewichtiger wirkt.

(1.8.2) Das Hauptproblem, dessen Lösung auf den Nägeln brennt, lautet: Wie kann man diese Matrix e^{tM} mit ihren wunderbaren Eigenschaften konkret aus M berechnen? Die Frage ist ungenau. Im Prinzip kann man diese Matrix immer mit Hilfe der definierenden Reihe berechnen. Per Hand ist eine solche Rechnung jedoch fast nie machbar. Numerisch geht es mit dem Computer, wenn man über ein Matrixalgebraprogramm verfügt. Was man möchte, ist die Matrix e^{tM} durch einen anderen Rechenausdruck darzustellen, der einfacher zugänglich ist, aus dem man per Inspektion Eigenschaften der Matrix ablesen kann. (Beispiel in (1.8.8).) In der neuen Form wird einem die Matrix e^{tM} natürlich auch vertrauter und zugänglicher werden. Außerdem kann man über diese Darstellungen für spezielle Differentialgleichungen wie die des harmonischen Oszillators Formeln für die Lösungen aufstellen.

(1.8.3) Bisher können wir für e^{tM} vereinfachende Rechenausdrücke nur für einige besondere Typen von Matrizen bilden: Für nilpotente und diagonale Matrizen, für \mathbb{I} -nilpotent und für solche, bei denen sich die Matrixpotenzen zyklisch wiederholen. Genauer gesagt, in jedem dieser Fälle ist die auswertende Berechnung der Reihe eine relativ einfache Übung.

7.1.8a Berechnung einer Potenzreihe

(1.8.4) Zur Illustration rechnen wir ein Beispiel mit sich zyklisch wiederholenden Matrixpotenzen. Für den Fall \mathbb{I} -nilpotent findet man in 7.1.13 ein Beispiel.

(1.8.5) Wir betrachten die Differentialgleichung des freien ungedämpften harmonischen Oszillators, die per Reduktionstrick auf eine 2×2 -Matrix führt. Die Ausgangsgleichung lautet $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$. Hierbei ist ω_0^2 , üblicherweise ein positiver äußerer Parameter.

Wir ersetzen ω_0^2 durch $-a$, um auch die Möglichkeit von $a < 0$ zu erfassen. Also $\ddot{x}(t) - ax(t) = 0$. Dann sei $y_1(t) = x(t)$ und $y_2(t) = v(t) = \dot{x}(t)$. Es entsteht folgendes Gleichungssystem :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= 0y_1(t) + 1y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= ay_1(t) + 0y_2(t) \end{aligned} \quad \text{Also} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

(1.8.6) Für die Potenzen M^n findet man

$$M^2 = a\mathbb{I} \quad \text{und damit folgt} \quad M^{2n} = a^n \mathbb{I} \quad \text{und} \quad M^{2n+1} = a^n M.$$

(1.8.7) Damit läßt sich die Exponentialreihe umschreiben zu:

$$e^{(t-t_0)M} = \mathbb{I} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(2k)!} (t-t_0)^{2k} \right) + M \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(2k+1)!} (t-t_0)^{2k+1} \right)$$

(1.8.8) Bei beiden Reihen handelt es sich aber um bekannte Funktionen. Nehmen wir etwa an, dass $a < 0$ sei. Dann setzen wir $a = -\omega_0^2$ und erhalten damit eine Sinus- und eine Cosinusreihe. Nämlich:

$$e^{(t-t_0)M} = \mathbb{I} \cdot \cos(\omega_0(t-t_0)) + M \cdot \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-t_0))$$

Hier ist e^{tM} als Linearkombination zweier einfacher Matrizen (\mathbb{I} und M) dargestellt. Die t -Abhängigkeit ist vollständig in den Koeffizienten enthalten.

(1.8.9) Durch Einsetzen der Matrizen erhält man die eigentliche Matrixform:

$$e^{(t-t_0)M} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0(t-t_0)) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-t_0)) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0(t-t_0)) & \cos(\omega_0(t-t_0)) \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, wie eine Matrix entstanden ist, deren Komponenten von t abhängen. Vergleichen Sie mit der Matrix, die eine Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 beschreibt!

(1.8.10) Die beiden erhaltenen Formeln zeigen, wie eine Matrix e^{tM} typischerweise aussehen kann. Nach unserem allgemeinen Resultat können wir diese Matrix auf \vec{r}_0 anwenden, um eine Lösungskurve mit vorgebarem Anfangswert zu erhalten. Mit $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{10} \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{y_{20}}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) \\ y_2(t) = -y_{10}\omega_0 \sin(\omega_0(t - t_0)) + y_{20} \cos(\omega_0(t - t_0)) \end{cases}$$

Differenziert man das, so sieht man sofort, daß und weshalb die Differentialgleichung erfüllt ist.

(1.8.11) Inspizieren Sie die erhaltenen Gleichungen genau, damit Sie mit der ungewohnten Größe "e-hoch-tM" vertraut werden. Beachten Sie, dass t_0 nur in der Form $t-t_0$ vorkommt und denken Sie an (1.6.12).

(1.8.12) Man kann die Konkretisierung noch einen Schritt weiter treiben. Wählen wir beispielsweise $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $t_0=0$, so folgt $y_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ und $y_2(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Das ist eine Bahnkurve, deren Bild im Phasenraum eine Ellipse bildet. Für $\omega_0=1$ ergibt sich der Fall, den wir oben durch Raten gelöst haben.

(1.8.13) Wir sehen, wie der durch e^{tM} induzierte Isomorphismus zwischen dem uns vertrauten Vektorraum \mathbb{R}^2 und dem unanschaulichen, aber ebenso zweidimensionalen Funktionsraum \mathcal{L} vermittelt. Aus \vec{r}_0 wird die in der Formel gegebene Kurve $t \mapsto \vec{y}(t) = e^{tM} \cdot \vec{r}_0$.

□ Dieselben Rechnungen für $a=\Omega^2 > 0$. Denken sie an die hyperbolischen Funktion sh und ch!

7.1.8.b Diagonalisierung des Systems/ Die Eigenwertmethode

Was aber ist zu tun, wenn die Matrix keine spezielle Form hat, die ein direktes Aufsummieren der Reihe gestattet?

(1.8.14) Wir beschreiben eine Idee, mit deren Hilfe man die Frage angehen kann. Die allgemeine Durchführung verschieben wir auf Kapitel 13, da wir dazu noch Resultate der Eigenwerttheorie benötigen. **Den Fall N=2 (zweidimensionaler Phasenraum) werden und können wir bereits jetzt als Beispiel vollständig behandeln.**

Und eine ganze Reihe weiterer Fälle läßt sich analog ohne Rückgriff auf die allgemeinen Resultate lösen. Ebenso werden. Die späteren Ergebnisse werden auch den Arbeitsaufwand reduzieren. Da die Methode einerseits relativ komplex ist, andererseits aber sehr wichtig, ist ein mehrfaches Durchgehen auf unterschiedlichem Niveau durchaus angebracht.

(1.8.15) **Wie sieht die Idee aus?** Sie besteht darin, im Lösungsraum \mathcal{L} , der ja immer N-dimensional ist, nach Lösungen besonders einfacher Art zu suchen. Und hat man N unabhängige Lösungen gefunden, ist man fertig. Denn dann verfügt man über eine Basis von \mathcal{L} . Das mag primitiv klingen, aber es funktioniert.

(1.8.16) Die einfachsten Kurven, die einem einfallen, sind solche, bei denen der Ortsvektor immer konstante Richtung hat. Nur die Länge darf sich ändern. Kurz Kurven, deren Bild auf einer Ursprungsgeraden in W liegt. Eine solche Lösung muß die Form haben: $\vec{y}(t) = f(t)\vec{u}$, wobei $\vec{u} \in W$ ein fester (also t-unabhängiger) Vektor des Phasenraumes sein soll. Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich: $f'(t)\vec{u} = f(t)M\vec{u}$ für alle t. **Das ist aber offensichtlich nur erfüllbar, wenn \vec{u} und $M\vec{u}$ dieselbe Richtung haben.** D.h., wenn \vec{u} ein *Eigenvektor* zu M ist! Die zugehörige die Längenänderung beschreibende Zahl wird *Eigenwert* (von λ) genannt. Also $M\vec{u} = \lambda\vec{u}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1.8.17) Inspizieren Sie einmal die Bilder in (1.3.7). Im ersten Bild gibt es zwei erkennbare Geraden mit Vektoren dieser Eigenschaft, die durch Koordinatenachsen gekennzeichnet sind. Im dritten Bild gibt es eine solche Richtung und im zweiten keine.

(1.8.18) Nehmen wir an, wir hätten ein derartiges Paar (λ, \vec{u}) gefunden. Dann folgt $f'(t) = \lambda f(t)$. Und diese Differentialgleichung können wir sofort lösen! $f(t) = e^{\lambda t}$ ist Lösung wie man sofort sieht. Alle übrigen unterscheiden sich nur durch einen Faktor. (Fall N=1, eindimensionaler Lösungsraum!).

Folglich lautet unser Ansatz für eine Lösung $\vec{y}(t) = e^{\lambda t}\vec{u}$.
Und das ist genau dann eine Lösung, wenn $M\vec{u} = \lambda\vec{u}$ gilt.

(1.8.19) Damit haben wir aus einem auf den Funktionsraum bezogenen Differentialgleichungsproblem $\vec{y}'(t) = M\vec{y}(t)$ ein Problem der linearen Algebra in W gemacht.

(1.8.20) Den weiteren Weg haben wir bereits angedeutet: Man versucht, sich $N=\dim W=\dim \mathcal{L}$ linear unabhängige Lösungen dieses Typs zu verschaffen. Ist das gelungen, hat man eine Basis des Lösungsraumes, was für viele Zwecke bereits reicht. Mit Hilfe dieser Basis kann man bei Bedarf e^{tM} routinemäßig, wenn auch mit etwas Rechnung, konstruieren. Das Hauptproblem besteht darin, ausreichend Eigenvektoren zu finden, was keineswegs immer möglich ist. Im letzteren Fall ist eine alternative Methode zu entwickeln.

Und wie bereits angedeutet: Es gibt eine Vielzahl von unterschiedlichen Vorgehensweisen, das beschriebene Programm zu realisieren, sowie von Tricks, die dazu erforderliche rechnerische Arbeit zu verringern. Computeralgebraprogramme liefern die Lösungen all dieser Teilaufgaben. Jedoch sollte man verstehen, was dabei vor sich geht. Diese Fragen werden in Kap.13 behandelt.

7.1.8c Der Fall $N=2$

(1.8.21) Wir wenden uns jetzt dem Fall eines zweidimensionalen Phasenraums W zu, also dem Fall, den wir vollständig diskutieren wollen. Zunächst formulieren wir das Problem mit Hilfe einer festen, aber beliebigen Basis.

Für $N=2$ schreibt sich $\vec{y}'(t) = M \cdot \vec{y}(t)$
in Komponentenform wie folgt:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = ay_1(t) + by_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = cy_1(t) + dy_2(t) \end{cases}$$

Nach unserer Vorüberlegung müssen wir das zugehörige Eigenwertproblem behandeln, also $M \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}$, wobei (λ, \vec{u}) gesucht ist. In Komponenten ergibt das ein von t unabhängiges Gleichungssystem. Beachten Sie genau die zugehörige Rollenverteilung:

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 = \lambda u_1 \\ cu_1 + du_2 = \lambda u_2 \end{cases}$$

- ◆ Die Matrixkomponenten a, b, c, d sind vorgegebene Konstanten,
- ◆ u_1, u_2, λ sind Unbestimmte.

(1.8.22) Wegen der beiden Terme der Form $\lambda \vec{u}$ ist das System **nichtlinear**, also unangenehm. Der Trick zur Lösung besteht in einem Rollenwechsel für λ . Man interpretiert λ zunächst als äußeren Parameter statt als Unbestimmte. Da man dann für λ alle Werte nehmen darf, kann man auch eventuelle Lösungswerte wählen und erhält für sie die Lösung. Statt eines unangenehmen Gleichungssystems (für u_1, u_2, λ) betrachtet man eine Schar angenehmer linearer Gleichungen in u_1, u_2 . Inspektion zeigt: **Mit λ als äußerem Parameter ist unser Gleichungssystem linear und homogen.**

(1.8.23) Natürlich sind jetzt **Verzweigungen des Lösungsweges** (Fallunterscheidungen in λ) zu erwarten, aber diese Verzweigungen sind es gerade, die uns interessieren. Wir suchen Vektoren $\vec{u} \neq \vec{0}$ und die gehören zu nichttrivialen Lösungen unseres Systems. Also: **Für welche Werte des äußeren Parameters λ hat unser System nichttriviale Lösungen, einen nichttrivialen Kern?**

(1.8.24) Dazu bringen wir das Gleichungssystem auf Normalform. Das ergibt die Systemmatrix $M - \lambda \mathbb{I}$. Diese Matrix wird normalerweise den Rang 2 haben. Dann gibt es nur die triviale Lösung. In Ausnahmefällen - für besondere λ - wird der Rang kleiner sein. **Diese Ausnahmewerte suchen wir.** Für sie hat die Gleichung in \vec{u} nichttriviale Lösungen.

$$\begin{cases} (a-\lambda)u_1 + bu_2 = 0 \\ cu_1 + (d-\lambda)u_2 = 0 \end{cases} \quad M-\lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

(1.8.25) Als Bedingung für das Auftreten des kleineren Ranges - also 1 - nehmen wir die übliche Determinantenbedingung für die Matrixkomponenten, die für unserer Matrix folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{cases} \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 & \text{oder} \\ \lambda^2 - 2S\lambda + Det = 0 & \text{wobei } S = \frac{1}{2}(a+d) \quad \text{und } Det = ad-bc. \end{cases}$$

Dabei haben wir die Hilfsgrößen $S=(a+d)/2$ und $Det=(ad-bc)$ eingeführt. Beide -*Spur* und *Determinante* - beziehen sich natürlich auf die Ausgangsmatrix M . In der quadratischen Gleichung ist λ Unbestimmte, alles andere sind Konstanten.

(1.8.26) Die übliche Lösungsformel gibt

$$\lambda_{\pm} = S \pm \sqrt{S^2 - Det} \quad \begin{matrix} S = \frac{1}{2}(a+d) \\ Det = ad-bc \end{matrix}$$

Das sind **zwei Kandidaten** für Eigenwerte. Für diese Werte von λ wird unser Gleichungssystem nichttriviale Lösungen haben. Setzt man die gefundenen λ -Werte in das Gleichungssystem ein, kann man die zugehörigen und immer noch gesuchte Eigenvektoren \vec{u} bestimmen.

Sie sollten an dieser Stelle eine Besinnungsminute einlegen und sich den Inhalt der Kästen (1,8.21-26) im Zusammenhang ansehen. Wie ganz allgemein aus dem Differentialgleichungsproblem eine quadratische Gleichung wurde. Und Sie sollten bemerken, dass man bei der Behandlung konkreter Fälle sofort von (21) nach (25) oder (26) springen kann. Denn die beiden resultierenden λ -Werte (also die Eigenwerte von M) sind alles, was man für die weitere Arbeit benötigt.

(1.8.27) Will man weiter allgemein argumentieren, wird eine neuerliche Fallunterscheidung erforderlich. Da eine quadratische Gleichung vorliegt, sind die üblichen drei Fälle je nach Anzahl der reellen Lösungen zu unterscheiden. Welcher Fall vorliegt, kann man mit Hilfe von S und Det sofort aus der ursprünglichen Matrix ablesen.

Wir gehen unten nacheinander die drei Fälle durch mit dem Endziel, für jeden Fall eine praktikable Formel für e^{tM} zu gewinnen.

□ Bestimmen Sie die Eigenwerte für die folgenden drei Beispiele:

a=d=0, b=-c=1	a=d=0, b=c=1	a=b=d=1, c=0.
---------------	--------------	---------------

Berechnen sie dann die zugehörigen Eigenvektoren.

7.1.8d Zwei reelle Eigenwerte

Also $S^2 > Det$ oder $(a+d)^2 > 4(ad - bc)$

(1.8.28) Einsetzen der beiden reellen Eigenwerte ins Gleichungssystem liefert zwei verschiedene eindimensionale Lösungsräume. (**Wegen Rang 1 kann man eine der beiden Gleichungen in (1.8.24) streichen. Wir streichen die zweite.**) Aus den Lösungsräumen wählen wir je einen (i.a. nicht normierten) Basisvektor \vec{u}_+ bzw. \vec{u}_- aus. Beispielsweise

$$\vec{u}_+ = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_+ - a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_- = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_- - a \end{pmatrix}.$$

Für $b \neq 0$ ergibt das eine Basis von W : Die beiden Vektoren sind ungleich Null und nicht proportional.

(1.8.29) Dann sind nach den Vorüberlegungen $t \mapsto \vec{u}_+ e^{t\lambda_+}$ und $t \mapsto \vec{u}_- e^{t\lambda_-}$ Lösungen unserer Differentialgleichung und zwar linear unabhängige ($b \neq 0!$). **Also haben wir eine Basis von \mathcal{L} und sind im Prinzip fertig.** Wir können eine Parametrisierung des Lösungsraumes angeben. Diese Parametrisierung nennt man gerne *die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*.

$\mathcal{L} = \{ \vec{y} \mid \vec{y}(t) = \alpha \cdot \vec{u}_+ e^{t\lambda_+} + \beta \cdot \vec{u}_- e^{t\lambda_-}; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$

Oder ausgeschrieben:

$\vec{y}_{\alpha\beta}(t) = \alpha e^{t\lambda_+} \begin{pmatrix} b \\ \lambda_+ - a \end{pmatrix} + \beta e^{t\lambda_-} \begin{pmatrix} b \\ \lambda_- - a \end{pmatrix} \quad b \neq 0$

(1.8.30) Liegt ursprünglich eine Differentialgleichung 2. Ordnung vor (Reduktionstrick), so dass man nur die erste Komponente benötigt, so folgt für deren allgemeine Lösung durch Spezialisierung

$x_{\alpha\beta}(t) = \alpha e^{t\lambda_+} + \beta e^{t\lambda_-} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	Oszillatorlösung im Dämpfungsfall.
--------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------

(1.8.31) Das sind ausgesprochen wichtige Resultate. Beachten Sie, wie leicht und problemlos man im konkreten Fall zum Ergebnis gelangt:

(21) inspizieren / (26) anwenden und "Zwei reelle Lösungen" erkennen / (28) hinschreiben und (29) oder (30) bilden.

(1.8.32) Natürlich haben wir auch unser allgemeines Resultat zu e^{tM} benutzt! Denn nur damit sind wir sicher, dass zwei unabhängige Vektoren bereits eine Basis des Lösungsraumes ergeben.

(1.8.33) Wir können aber auch zur Entwicklungsmatrix e^{tM} selbst vorstoßen, für sie eine günstige Darstellung angeben. Dazu argumentieren wir wie folgt:

- ◆ $\vec{y}(t) = e^{tM}\vec{y}_0$ liegt in \mathcal{L} . Also muß es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_S = \alpha_S(\vec{y}_0)$ und $\beta_S = \beta_S(\vec{y}_0)$ geben, so daß $e^{tM}\vec{y}_0 = \alpha_S e^{t\lambda_+}\vec{u}_+ + \beta_S e^{t\lambda_-}\vec{u}_-$ für **alle** t gilt. Insbesondere muß dies auch für $t=0$ gelten.
- ◆ Dann hat man aber eine Gleichung, aus der man α_S und β_S mit Hilfe der Methode der dualen bzw. reziproken Basis bestimmen kann. Danach ist $\alpha_S = u_+^*(\vec{y}_0)$ und $\beta_S = u_-^*(\vec{y}_0)$.
- ◆ Setzt man das ein, so folgt $e^{tM}\vec{y}_0 = ((e^{tM}\vec{u}_+)u_+^* + (e^{tM}\vec{u}_-)u_-^*) \cdot \vec{y}_0$
- ◆ Nun ist $M\vec{u}_+ = \lambda_+\vec{u}_+$ und $M^2\vec{u}_+ = \lambda_+^2\vec{u}_+$ usw. Über die Reihenentwicklung folgt $e^{tM}\vec{u}_+ = e^{t\lambda_+}\vec{u}_+$ und $e^{tM}\vec{u}_- = e^{t\lambda_-}\vec{u}_-$. **(Entscheidende Stelle!)**

Jetzt muß man nur noch Koeffizientenvergleich vornehmen und erhält:

$$e^{tM} = e^{t\lambda_+} (\vec{u}_+ u_+^*) + e^{t\lambda_-} (\vec{u}_- u_-^*)$$

(1.8.34) Nach unseren Regeln ist $\vec{u}\vec{u}^*$ ein Matrixprodukt des Typs "Spalte×Zeile". Beachten Sie die Reihenfolge! Das Ergebnis ist eine quadratische 2×2 -Matrix, wie es sein muß. Zur Auswertung benötigen wir die zu (\vec{u}_+, \vec{u}_-) duale Basis (in Matrixdarstellung). Über die definierenden Eigenschaften finden wir - unter unserer immer mitgeschleppten Annahme $b \neq 0$:

$$u_+^* = \frac{1}{b(\lambda_+ - \lambda_-)}(a - \lambda_-, b) \quad \text{und} \quad u_-^* = \frac{-1}{b(\lambda_+ - \lambda_-)}(a - \lambda_+, b)$$

- Verifizieren Sie das, also die Matrixprodukte $u_+^*\vec{u}_+ = 1$, $u_+^*\vec{u}_- = 0$, $u_-^*\vec{u}_+ = 0$ und $u_-^*\vec{u}_- = 1$.
Jetzt folgt mit etwas Rechnung, bei der bemerkenswerterweise das b im Nenner herausfällt:

$$\vec{u}_+ u_+^* = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}(M - \lambda_- \mathbb{I}_2) \quad \vec{u}_- u_-^* = \frac{-1}{\lambda_+ - \lambda_-}(M - \lambda_+ \mathbb{I}_2)$$

(1.8.35) Einsetzen gibt die gesuchte Formel für e^{tM} (für den Fall zweier reeller Eigenwerte) zunächst wieder als Linearkombination von M und $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$e^{tM} = \frac{e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-}}{\lambda_+ - \lambda_-} M + \frac{(-\lambda_-)e^{t\lambda_+} + \lambda_+ e^{t\lambda_-}}{\lambda_+ - \lambda_-} \mathbb{I}_2$$

Und diese Endgleichung gilt auch für $b=0$.

- Sie können das Resultat auch ohne den gedanklichen Hintergrund der dualen Basis finden: Starten Sie mit $\vec{y}_0 = \alpha_s \vec{u}_+ + \beta_s \vec{u}_-$. Multiplizieren sie mit den beiden einfach vorgegebenen Zeilenvektoren u_+^* und u_-^* von links. Bestimmen Sie α_s und β_s und steigen Sie damit in die Rechnung ein.

(1.8.36) Zum späteren Vergleich mit dem Fall zweier komplexer Nullstellen ist eine Darstellung mit Hyperbelfunktionen vorzuziehen. Wir haben $2e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$ und $2e^{-x} = \text{ch}(x) - \text{sh}(x)$. Weiter setzen wir $\lambda_+ = S + \Omega$ und $\lambda_- = S - \Omega$ mit $\Omega = \sqrt{S^2 - \text{Det}}$. Einsetzen gibt nach Umordnung:

$$e^{tM} = e^{tS} \left\{ \text{ch}(\Omega t) \mathbb{I}_2 + \frac{\text{sh}(\Omega t)}{\Omega} (M - S \mathbb{I}_2) \right\}.$$

(1.8.37) Für die Oszillatorgleichung geben wir die zugehörige Lösung des Anfangswertproblems an. Wir benötigen nur die erste Zeile von e^{tM} . Ablesen gibt mit $a=0, b=1, c=-\omega_0^2$ und $d=-2\rho, S=-\rho$

$$x(t) = e^{-\rho t} \left\{ \text{ch}(\Omega t) x_0 + \frac{\text{sh}(\Omega t)}{\Omega} (2\rho + v_0) \right\}. \quad \text{Mit } x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Das ist die allgemeine Oszillatorlösung, parametrisiert durch die Anfangswerte zur Zeit $t=0$ für den Fall zweier reeller Eigenwerte.

All dies sind Routinefolgerungen aus der Hauptformel (1.8.35) für e^{tM} , auch wenn die zugehörigen Rechnungen etwas anspruchsvoller sind.

- Führen Sie die Rechnungen in (1.8.34) aus.
- Vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen zur Frage nach (1.8.13).

7.1.8e Die Komplexifizierungssätze

(1.8.38) Der Fall mit komplexen Eigenwerten bereitet auf den ersten Blick Probleme. Man erhält formal Lösungen wie $e^{t(3-2i)} \begin{pmatrix} 3 \\ 2+i \end{pmatrix}$. Tatsächlich sind Lösungen dieser Form völlig in Ordnung und für das praktische Rechnen sogar vorteilhaft. (Das ist ziemlich analog zum Fall der Behandlung von Wechselstromkreisen mit komplexen Zahlen!) Was derartige Lösungen bedeuten und wie man mit ihnen umgeht, wollen wir jetzt untersuchen.

(1.8.39) Die wichtige Idee, die den Umgang mit komplexen Eigenwerten steuert, besteht darin, den Phasenraum W erneut zu vergrößern. Und zwar macht man ihn zu einem komplexen Vektorraum $W_{\mathbb{C}}$ über \mathbb{C} .

Die nachfolgend gegebene Konzeption werden wir mehrfach benutzen.

Komplexifizierung des Phasenraumes.

- Setze $W_{\mathbb{C}} = W \oplus iW$. $\vec{z} \in W_{\mathbb{C}}$ bedeutet daher $\vec{z} = \vec{u} + i\vec{v}$ mit $\vec{u}, \vec{v} \in W$ eindeutig. \vec{u} nennen wir Realteil und \vec{v} Imaginärteil von \vec{z} .
- Über $i(\vec{u} + i\vec{v}) = -\vec{v} + i\vec{u}$ definieren wir eine Verknüpfung $\mathbb{C} \times W_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$, die aus $W_{\mathbb{C}}$ offensichtlich einen Vektorraum über \mathbb{C} macht.
- $\dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} W = N$, da ja $i(\vec{z} + i\vec{0}) = \vec{0} + i\vec{z}$ ist. Dagegen gilt $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{C}} = 2n$. Und W selbst ist über $\vec{x} \mapsto \vec{x} + i\vec{0}$ eingebetteter **reeller** Teilvektorraum von $W_{\mathbb{C}}$.
- Mit W ist auch $W_{\mathbb{C}}$ **normierter Vektorraum**. Als Norm nimmt man $\|\vec{u} + i\vec{v}\| = \sqrt{\vec{u}^2 + \vec{v}^2}$ wie man leicht nachprüft.
- Kurven $\mathbb{R} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$ sind daher in der üblichen Weise differenzierbar. Alle Kurven $\mathbb{R} \rightarrow W$ können über $\vec{s}(t) = \vec{r}(t) + i\vec{0}$ als Kurven $\mathbb{R} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$ interpretiert werden.
- Der Differentialoperator $\vec{r} \mapsto \dot{\vec{r}} - M\vec{r}$ ist auf $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, W_{\mathbb{C}})$ ausdehnbar. D.h man kann nach Lösungen dieser Gleichung unter den Kurven $\mathbb{R} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$ suchen. (So wie man eine

quadratische Gleichung auf \mathbb{C} ausdehnt. Polynome...Kap3)

(1.8.40) Aber was nützt uns das für unser Ausgangsproblem der Anwendung der Eigenwertmethode im Falle komplexer Eigenwerte? Nun, es gilt der folgende **Satz**:

Sei $\dot{\vec{y}} = M\vec{y}$ eine lineare Differentialgleichung mit einer **reellen** Matrix M .
Sei weiter $\vec{x} = (J, t) \mapsto \vec{x}(t) = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$, $W_{\mathbb{C}}$ eine komplexwertige Lösung dieser Gleichung, also aus $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, W_{\mathbb{C}})$.
Dann sind Real- und Imaginärteil von \vec{x} Lösungen des zugehörigen reellen Problems $J \rightarrow W$.

(1.8.41) **Beweis:** Jede Kurve $\vec{x} : J \rightarrow W_{\mathbb{C}}$ hat eine eindeutige Darstellung durch Real- und Imaginärteil: $\vec{x}(t) = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$. Dabei sind \vec{u} und \vec{v} beides Kurven $\mathbb{R} \rightarrow W$. Sie sind rein reell. Die Ableitung vertauscht mit der Summenbildung, so dass gilt: $\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{u}}(t) + i\dot{\vec{v}}(t)$. Die Matrix M ist linear und rein reell vorausgesetzt. Daher gilt auch $M\vec{x}(t) = M\vec{u}(t) + iM\vec{v}(t)$ und das **ist** die Darstellung von $M\vec{x}$ durch Real- und Imaginärteil. Da eine Lösung vorliegen soll, also $\dot{\vec{x}}(t) = M\vec{x}(t)$ gilt, sind die rechten Seiten gleich. Die Realteile und die Imaginärteile müssen übereinstimmen und das besagt: $\dot{\vec{u}}(t) = M\vec{u}(t)$ und $\dot{\vec{v}}(t) = M\vec{v}(t)$. **D.h. aber: \vec{u} und \vec{v} sind beides reelle Lösungen unserer reellen Ausgangsgleichung.** Eine komplexe Lösung liefert uns **zwei** reelle!

(1.8.42) Bemerkung: Der Beweis gilt auch für andere Differentialoperatoren, etwa den des harmonischen Oszillators. Was man benötigt, ist immer zweierlei: 1) Der Operator muß linear sein. 2) Die Koeffizienten der Ableitungen müssen reell sein.

7.1.8f Zwei komplexe Eigenwerte

Also $S^2 < Det$ oder $(a+d)^2 < 4(ad - bc)$

(1.8.43) Wir können zur Behandlung des 2x2-Problems zurückkehren. Um die Analogie mit dem reellen Fall zu verdeutlichen, nehmen wir dieselbe Numerierung nur mit einem zusätzlichen k für *komplex* vor.

(1.8.28k) Was ergibt die Ausdehnung der Differentialgleichung auf $W_{\mathbb{C}}$ für diesen Fall? Die quadratische Gleichung hat jetzt 2 komplexe Lösungen. Wir nehmen die erste $\lambda_+ = S + i\omega$ mit $\omega^2 = Det - S^2$. Hierzu gehört ein komplexer Eigenvektor \vec{u}_+ in $W_{\mathbb{C}}$, der ebenso wie im reellen Fall gebildet wird und der uns die folgende komplexe Lösungskurve liefert. Erneut sei $b \neq 0$.

$$\vec{x}(t) = e^{(S+i\omega)t}(\vec{u} + i\vec{v})$$

mit $\vec{u}_+ = \vec{u} + i\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ S + i\omega - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ S - a \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$

Aufspalten in Real- und Imaginärteil gibt uns nach dem Satz zwei reelle Lösungen $\mathbb{R} \rightarrow W$:

$$\vec{x}_1(t) = e^{St} \{ \cos(\omega t) \vec{u} - \sin(\omega t) \vec{v} \} \quad \vec{x}_2(t) = e^{St} \{ \sin(\omega t) \vec{u} + \cos(\omega t) \vec{v} \}$$

(1.8.29k) Beide Lösungen sind offensichtlich unabhängig, so dass wir bereits eine Basis unseres Lösungsraumes haben. Die allgemeine Lösung folgt als Linearkombination:

$$\vec{x}_{\alpha\beta}(t) = \alpha \vec{x}_1(t) + \beta \vec{x}_2(t).$$

(1.8.30k) Für den Oszillatorfall benötigen wir nur die erste Komponente. Mit $S = -\rho$ finden wir **die allgemeine Lösung für den Oszillator im Schwingungsfall:**

$x_{\alpha\beta}(t) = e^{-\rho t} (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$.

Diese Formel muß man sich wegen ihrer besonderen Bedeutung unbedingt merken: Dämpfungsfaktor mal Linearkombination aus Sinus und Cosinus. Die Kreisfrequenz wird modifiziert.

(1.8.33k) Jetzt können wir analog zum reellen Fall e^{tM} bestimmen. Beachten Sie, daß $\vec{x}_0 = \vec{x}_{\alpha\beta}(0) = \alpha \vec{x}_1(0) + \beta \vec{x}_2(0) = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ gilt - kein i vor \vec{v} ! Daher kann man mit der zu \vec{u}, \vec{v} dualen Basis die Koeffizienten α und β bestimmen. Es folgt:

$$e^{tM} \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_{\alpha\beta}(t) = \vec{x}_1(t) u^*(\vec{x}_0) + \vec{x}_2(t) v^*(\vec{x}_0).$$

Wenn wir hierin alle Größen einsetzen, können wir e^{tM} über Koeffizientenvergleich ablesen. Einsetzen gibt nach Umordnung:

$$e^{tM} \cdot \vec{x}_0 = e^{St} \{ \cos(\omega t) (\vec{u} u^* + \vec{v} v^*) + \sin(\omega t) (\vec{u} v^* - \vec{v} u^*) \} \cdot \vec{x}_0.$$

(1.8.34k) Wir benötigen die zu \vec{u}, \vec{v} duale Basis konkret. Man findet sofort:

$$u^* = \frac{1}{b}(1, 0) \quad v^* = \frac{1}{2\omega b}(a - d, 2b) \quad \text{wie üblich } b \neq 0.$$

Beim Ausführen der erforderlichen Matrixprodukte kürzt sich das ärgerliche b im Nenner heraus. Man erhält nach einigem Rechnen das sehr ansprechende auch für $b=0$ geltende Ergebnis

$\vec{u} u^* + \vec{v} v^* = \mathbb{I}_2 \quad \vec{u} v^* - \vec{v} u^* = \frac{1}{\omega}(M - S \mathbb{I}_2)$

(1.8.36k) Damit sind wir am Ziel, wobei das Resultat direkt mit (1.8.36) zu vergleichen ist:

$e^{tM} = e^{St} \left\{ \cos(\omega t) \mathbb{I}_2 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} (M - S \mathbb{I}_2) \right\}$

(1.8.37k) Und jetzt abschließend erneut die Parametrisierung der allgemeinen Oszillatorlösung durch die Anfangswerte zur Zeit $t=0$. (Vgl. (1.8.30k)):

$$\boxed{x(t)=e^{-\rho t} \left\{ x_0 \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} (v_0 + \rho x_0) \right\} \quad x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=v_0.}$$

7.1.8g Ein reeller Eigenwert

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Also } S^2 = Det \\ \text{oder } (a+d)^2 = 4(ad - bc) \end{array}}$$

(1.8.44) Der einzige Eigenwert ist $\lambda=S=(a+d)/2$. Hierzu gehören zwei Fälle: Entweder ist M Vielfaches der Einheitsmatrix. Dann ist das Problem trivial mit $e^{tM} = e^{t\lambda}M$. Oder aber die Eigenwertmethode liefert nur eine - nicht zwei - unabhängige Lösung! Es zeigt sich, dass wir in diesem Fall e^{tM} leicht direkt ausrechnen können.

(1.8.45) Dazu schreiben wir M wie folgt um:

$$M = \lambda \mathbb{I}_2 + (M - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda \mathbb{I}_2 + N \quad \text{mit } N = M - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

Berechnet man jetzt N^2 , so findet man $N^2=$ Nullmatrix. D.h. N ist nilpotent! Hierbei geht natürlich die vorausgesetzte Bedingung $(a-d)^2+4bc=0$ an die Komponenten ein. Damit folgt aber:

$$\begin{aligned} e^{tM} &= e^{t(\lambda \mathbb{I}_2 + N)} = e^{t\lambda \mathbb{I}_2} e^{tN} = e^{t\lambda} \mathbb{I}_2 (\mathbb{I}_2 + tN) \\ &= e^{t\lambda} (\mathbb{I}_2 + t(M - \lambda \mathbb{I}_2)) = e^{t\lambda} (1 - t\lambda) \mathbb{I}_2 + t e^{t\lambda} M. \end{aligned}$$

Der zweite Schritt ist zulässig - das ist entscheidend - weil \mathbb{I}_2 und N miteinander vertauschen. Deshalb darf man die Exponentialfunktion faktorisieren. Damit sind wir am Ziel

$$\boxed{e^{tM} = e^{t\lambda} \{ (1 - t\lambda) \mathbb{I}_2 + tM \}.}$$

Hieraus folgen leicht wieder alle weiteren Größen, die wir hier aber nicht angeben.

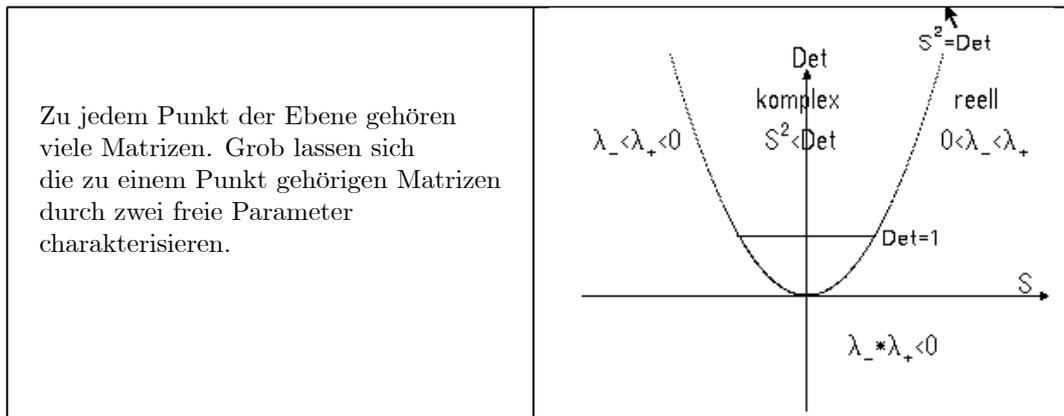
7.1.8h Vergleich der drei Fälle

(1.8.46) Bisher haben wir die drei Fälle getrennt behandelt. Für die Herleitung der Lösungsformeln ist das angemessen. Für die Diskussion der Lösungen selbst ist eine gemeinsame Behandlung möglich und vorzuziehen. Diese gebündelte Behandlung sollte man auch als Leitlinie zur Diskussion konkreter Fälle verwenden.

(1.8.47) **Wie geht man vor, wenn eine konkrete 2×2 -Matrix M gegeben ist?**

- Man bestimmt S und Det über $S=\frac{1}{2}(a+d)$ und $Det=ad-bc$.
- **Man stellt fest, welcher der drei Fälle vorliegt.** Hierzu ist es vorteilhaft, eine S - Det -Ebene einzuführen und die Matrix M darin als Punkt mit Koordinaten (S, Det) zu repräsentieren. Unsere Bedingungen - insbesondere $S^2 = Det$ - zerlegen diese Ebene in drei Bereiche. Die geometrische Lage

entscheidet, welcher Fall vorliegt.

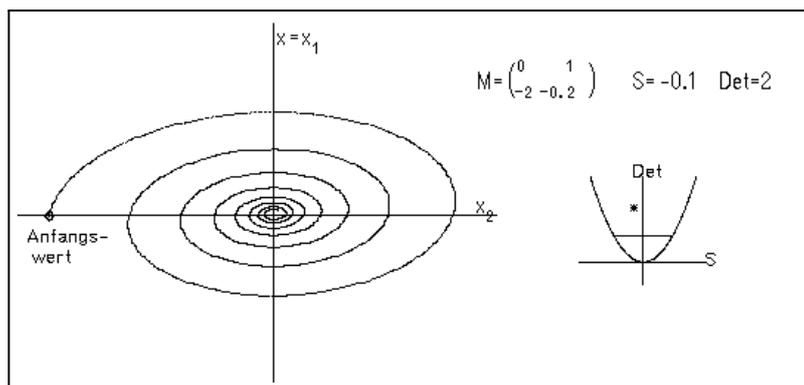


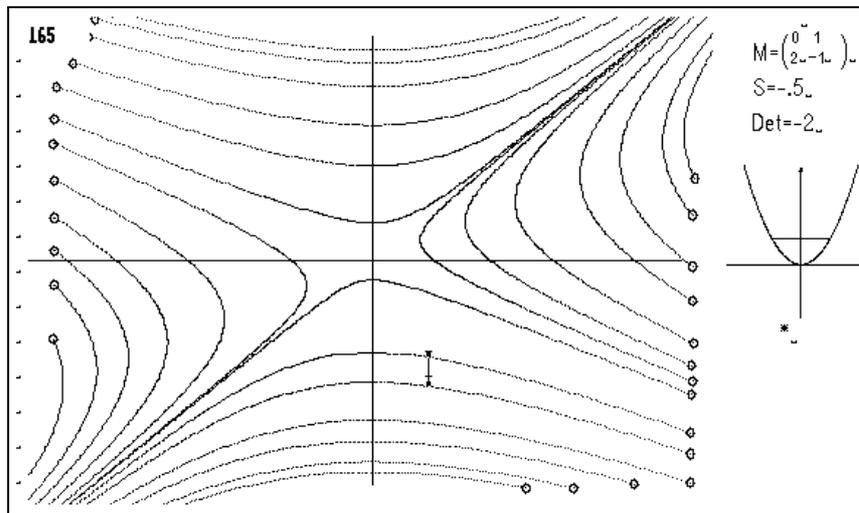
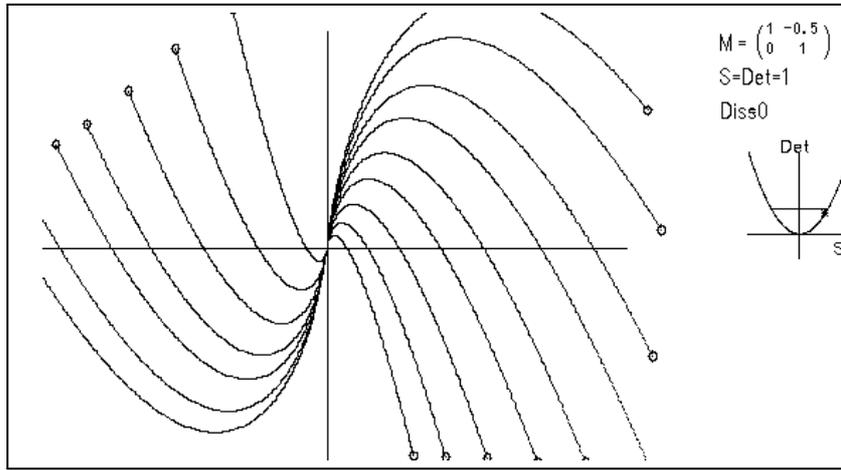
- Man schreibt die jeweilige allgemeine Lösung auf oder - bei Bedarf - die zugehörige Formel für e^{tM} .

- Überlegen Sie sich je eine 2×2 -Matrix, die näherungsweise zu den Bildern in (1.3.7) gehört. Die Lage in der S-Det-Ebene ist in den dortigen Bildern mit angegeben. Im dritten Fall ist nicht die Einheitsmatrix zu nehmen. Welcher Typ liegt jeweils vor? In welcher Weise sollten die Lösungen ihrer Matrix mit den Lösungen der Bilder übereinstimmen? Welche Unterschiede könnten noch auftreten?
- Gegeben ein Punkt (S, Det) außerhalb der Parabel. Von diesem Punkt aus lassen sich zwei Tangenten an die Parabel legen. Bestimmen Sie deren Gleichung und die Schnittpunkte der beiden Tangenten mit der Parabel. Zeigen Sie: Die S-Koordinaten der Schnittpunkte sind die Eigenwerte. Welche anschaulichen Konsequenzen hat das?

(1.8.48) Wie sehen die Lösungskurven in den einzelnen Bereichen der S-Det-Ebene aus? Komplexe Eigenwerte fallen in das Innere der Parabel. Für $S > 0$ ergeben sich nach außen laufende Spiralen, für $S < 0$ nach innen auf den Ursprung zulaufende Spiralen. Für $S = 0$ Ellipsen. Der zweite Quadrant gehört zum üblichen Oszillatorsystem mit Dämpfung. In der unteren Halbebene ist einer der stets reellen Eigenwerte positiv, der andere negativ. Für die Lösungen ergeben sich hyperbelartige Bilder wie im dritten Bild unten. Die Asymptoten haben gerade die Richtung der Eigenvektoren. In den Bildern zu 7.(1.3.7) sind die Richtungen der Eigenvektoren mit eingezeichnet! Oberhalb der S-Achse - aber außerhalb der Parabel - haben beide Eigenwerte dasselbe Vorzeichen. Das erste Bild aus 7.(1.3.7) liefert ein Beispiel. Das dritte Bild in 7.(7.1.3) ebenso wie das zweite Bild unten geben Beispiele für das Verhalten bei nur einem reellen Eigenwert und nur einer Eigenwertrichtung

(1.8.49) Wir geben nochmals je ein typisches Bild für die Phasenraumbahnen.





(1.8,50) Abschließend konkretisieren wir das beschriebene Vorgehen an einem Beispiel. Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Inspektion zeigt $S=1$ und $\text{Det}=-3$. Also $\lambda_+=3$ und $\lambda_-=-1$. Es handelt sich um den Fall zweier reeller Eigenwerte. Mit unseren allgemeinen Formeln folgt $\vec{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei ein Faktor -1 fortgelassen ist und $\vec{u}_- = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Beim Verifizieren dieser Resultate sollte der Leser auch die Eigenwerteigenschaften der beiden Vektoren überprüfen.

Für die duale Basis gibt das $u_+^* = \frac{1}{4}(3, 1)$ und $u_-^* = \frac{1}{4}(-1, 1)$. Damit gehen wir in (1.8.33) ein und finden

$$e^{tM} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Für $t=0$ gibt das die Einheitsmatrix. Prüfen Sie auch $\frac{d}{dt}e^{tM} = Me^{tM}$ nach. Schneller geht es mit (1.8.35). Um diese Formel anzuwenden, benötigen Sie nur die beiden Eigenwerte. Natürlich erhält man eine andere Darstellung von e^{tM} . Wählt man jetzt einen Anfangswert, etwa $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhält man sofort die zugehörige Lösungskurve:

$$\vec{r}(t) = e^{tM} \cdot \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Man verifiziert leicht, dass eine Lösung vorliegt. Für positive t dominiert der erste Summand, für negative der zweite. Damit wird der qualitative Verlauf von $\text{Bild} \vec{r}$ für die dritte Figur aus (8.3.19) verständlich-

- Bestimmen Sie für die drei Fälle aus (8.3.19) die Eigenwerte und dann $\exp(tM)$. Vollziehen Sie dazu **nicht** die allgemeine Rechnung nach, sondern verwenden Sie die allgemeinen Endresultate, um mit möglichst wenig Arbeit zum Ergebnis zu kommen. Lösen Sie sodann die Anfangswertaufgabe $x_1(t)=0$ und $x_2(t)=-1$. Vergleichen Sie mit den Figuren.

Kap.7.2: Die Oszillatorgleichung

7.2.0 Vorbemerkung

(2.0.1) Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators zusammen mit sich daran anschließenden Verallgemeinerungen ist für die Anwendungen von besonderer Bedeutung. Die Gleichungen und damit verbundene Fragestellungen tauchen in physikalischen Überlegungen beständig auf, so dass man die zugehörigen Resultate sicher beherrschen sollte.

Und diese Beherrschung sollte unabhängig davon sein, wie weit man sonst in das Verständnis der Differentialgleichungen eindringen will.

(2.0.1) Da sich die Oszillatorgleichung - über den Reduktionstrick - als Spezialfall der im letzten Teil besprochenen Differentialgleichung $\dot{y}=M \cdot y$ erweist, bildet sie ein wichtiges Konkretisierungsbeispiel der in Kap.7.1 entwickelten Resultate. Wir wollen unsere Behandlung der Oszillatorgleichung jedoch so einrichten, dass man das Teilkapitel 7.2 unabhängig vom allgemeinen Teil bearbeiten kann. Die Eigenwertmethode wird dazu ohne Rückgriff auf den Reduktionstrick fallspezifisch vereinfacht. Besonderer Wert wird auf die Diskussion und Beschreibung der Lösungen gelegt.

(2.0.2) Ausgangspunkt aller Überlegungen ist die Differentialgleichung

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$	Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung!
----------------------------------	----------------------------------------------------------

Man sollte immer auf das Vorzeichen des Krafttermes achten. Gegeben ist die Newtonsche Form der Gleichung. In der mathematischen Form lautet die Gleichung $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ mit einem Plus!

Als Gleichungssystem für die Änderungen der Größen schreibt sich das:

$dx=v(t)\Delta t$	und	$dv=-\omega_0^2 x(t)\Delta t$
-------------------	-----	-------------------------------

Die Änderung von x wird durch die momentane Geschwindigkeit bestimmt. Und die Änderung von v durch eine rücktreibende Kraft, die proportional zum momentanen Funktionswert ist. Je größer $x(t)$ ist, desto stärker ist die Änderung von v , wobei das Vorzeichen bewirkt, dass sich der Betrag von x verkleinert.

- $x^2(t) + y^2(t) = r^2$. Differenzieren Sie beide Seiten nach t und bestimmen Sie die Änderung in Tangentenapproximation. Was ergibt sich?
- Wiederholen Sie die **Vorzeichendiskussion** der Kraft für die folgenden beiden Differentialgleichungen: $\ddot{x}(t) + x^2(t) = 0$ und $\ddot{x}(t) + x(t)|x(t)| = 0$.

7.2.0a Verallgemeinerungen der Oszillatorgleichung

(2.0.3) Die Grundgleichung besitzt eine Reihe von **Verallgemeinerungen**, für die wir unten tabellarisch typische Beispiele zusammenstellen. Die Bedeutung dieser Tabelle besteht darin, dass man vielfach aus der **Ähnlichkeit der Differentialgleichung auf die Ähnlichkeit der Lösungen schließen kann**. D.h. mit einer gewissen Vorsicht kann man Oszillatorresultate auf die Lösungen der anderen Gleichungen übertragen. Da diese z.T. sehr viel schwieriger zu behandeln sind, ist diese Möglichkeit von großem Nutzen. Mathematisch ist das Zentrum der Tabelle der **gedämpfte** harmonische Oszillator, der das Hauptthema von Kapitel 7.2 bildet und der sich relativ leicht auf den freien ungedämpften zurückführen läßt.

(2.0.4) Die Übersicht:

$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ $\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ Oszillator mit Reibung	"Inhomogen, linear" $\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)$ Oszillator mit äußerer Kraft
$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + a \sin(bt) x(t) = 0$ Linear mit variablen Koeffizienten	$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + a \sin(bx(t)) = 0$ $\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + a(x(t))^3 = 0$ Nichtlineare Oszillatoren
$\ddot{x}(t) + \frac{1}{t}\dot{x}(t) + (1 - \frac{v^2}{t^2})x(t) = 0$ Besselsche Differentialgl. Linear.	$\ddot{x}(t) + P\sin(x(t)-\omega t) + q\cos(x(t)) = 0$ Getriebenes Pendel aus 7.0

(2.0.5) ρ in der Oszillatorgleichung nennen wir den Reibungskoeffizienten. Achten Sie auf den herausgezogenen Faktor 2. Viele Autoren verwenden stattdessen $a=2\rho$, was in den Endformeln zusätzliche Brüche bewirkt: aus ρ^2 wird $\frac{a^2}{4}$. Der zugehörige Beitrag $2\rho\dot{x}(t)$ beschreibt eine zur Geschwindigkeit proportionale Kraft, etwa eine Reibungskraft. Für $\rho > 0$ ist sie zur Bewegung entgegengesetzt gerichtet und wirkt somit dämpfend: $dv = -2\rho v \Delta t$. Der Absolutbetrag von v wird durch diesen Term stets verringert. ($v = -10$, $dv = +1$ gibt $v + dv = -9$).

□ Wie verhält sich die Krafrichtung aus $\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}^2(t) = 0$ für $\alpha > 0$?

(2.0.6) Zu **merken** ist: In der Differentialoperatorform sind im Oszillatorfall beide Koeffizienten positiv und beim Reibungskoeffizienten ist ein Faktor 2 abzuspalten. In der Newtonschen Form erhalten beide Koeffizienten ein zusätzliches Minus.

(2.0.7) Die Oszillatoren mit veränderlichen Koeffizienten sind immer noch linear, so dass ihre Lösungsmenge einen Vektorraum bildet, den Kern des linearen Differentialoperators. Man sollte sie so interpretieren, dass hier die Reibungs- bzw. Rückstellkräfte zeitlich veränderlich sind. Als Beispiel kann man an eine Schaukel denken, auf der sich der Schaukelnde periodisch bewegt. Bei der Besselschen Gleichung nimmt die Reibung mit der Zeit ab. Für große Zeiten nähert sich diese Gleichung der eines freien Oszillators an. $t=0$ dagegen ist bei dieser Gleichung problematisch. Aber auch die Besselsche Gleichung ist linear. Es zeigt sich, dass der Lösungsraum zweidimensional ist, so dass man erneut eine Basis in Form von zwei unabhängigen Lösungen erhält. Für die Besselsche Gleichung findet man in den Formelsammlungen jeweils eine ganze Reihe von Basen.

(2.0.8) Die nichtlinearen Oszillatoren sind wesentlich schwieriger zu behandeln. Insbesondere ist die Lösungsmenge **kein Vektorraum** mehr. Das erste Beispiel beschreibt die Bewegung eines Pendels für große Ausschläge, das zweite ist unser Einstiegsbeispiel. (Sie sollten sich Gedanken machen, was für unterschiedliche Bewegungsformen beim Pendel auftreten müssen. Und die Differentialgleichung liefert derartige Bewegungen tatsächlich, wie die Kapiteleinleitung zeigte!)

(2.0.9) Schließlich gibt es noch die linear **inhomogenen** Gleichungen, die eine vom Systemzustand unabhängige Kraft enthalten. Auch für sie gibt es allgemeine Lösungsschemata, die wir am Ende des Kapitels behandeln werden.

7.2.1 Die Bestimmung der Oszillatorlösungen zu Fuß (Durch Raten und Probieren).

(2.1.1) Wir wollen uns in diesem Teilkapitel ausführlich mit dem gedämpften linearen Oszillator befassen. Die zugehörige Gleichung ist gleichwertig zum System $\dot{\vec{y}}(t) = M \cdot \vec{y}(t)$ mit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\rho \end{pmatrix}$. Die Phasenraumdimension ist $N=2$.

(2.1.2) Wir könnten daher die allgemeinen Resultate des vorangegangenen Abschnittes auf diesen Fall anwenden mit $S = -\rho$ und $\text{Det} = \omega_0^2$. Stattdessen wollen wir die Oszillatorgleichung direkt lösen, wobei wir nur eine einzige Anleihe bei der allgemeinen Theorie machen werden: **Wir übernehmen, dass der Lösungsraum die Dimension 2 hat.**

(2.1.3) Wir beginnen mit der Operatorformulierung unseres Problems. Vgl. Kap. 7.1.1. Unser Kurvenraum besteht hier aus Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wählen den Urbildraum \mathfrak{F} des Operators gleich dem Raum aller

beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Also $\mathfrak{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wenn man den größeren Raum aller zweifach differenzierbaren Funktionen als Urbildraum wählt, findet man übrigens keine zusätzlichen Lösungen.

Der Differentialoperator lautet im betrachteten Fall:

$$\mathfrak{D}_{Osz} = (\mathfrak{F}, f \mapsto f'' + 2\rho f' + \omega_0^2 f, \mathfrak{F}) \quad \text{Denn das Ergebnis ist erneut } C^\infty.$$

(2.1.4) Dieser Operator ist offensichtlich linear! Inspizieren wir ein Beispiel:

$$\begin{aligned} (\exp + 2 \sin) &\mapsto (\exp - 2 \sin) + 2\rho(\exp + 2 \cos) + \omega_0^2(\exp + 2 \sin) \\ &= (\exp + 2\rho \exp + \omega_0^2 \exp) + (-2 \sin + 2\rho 2 \cos + \omega_0^2 2 \sin) \end{aligned}$$

Also

$$\mathfrak{D}_{Osz}(\exp + 2 \sin) = \mathfrak{D}_{Osz}(\exp) + 2\mathfrak{D}_{Osz}(\sin).$$

(2.1.5) Gesucht sind alle $f \in \mathfrak{F}$, die $\mathfrak{D}_{Osz}(f) = 0$ erfüllen. 0 steht hier natürlich für die Nullfunktion $(\mathbb{R}, t \mapsto 0, \mathbb{R})$. Die Linearität bewirkt, dass die Lösungsmenge \mathfrak{L} ein Teilvektorraum von \mathfrak{F} sein muß: $\mathfrak{L} = \text{Kern}(\mathfrak{D}_{Osz})$. Nur über die Dimension dieses Kernes wissen wir zunächst noch nichts.

(2.1.6) **Können wir Lösungen durch Probieren finden?**

(2.1.7) Die einfachsten Funktionen sind h_n, \sin, \cos, \exp . Spielen wir einmal etwas mit diesen Funktionen und unserem Differentialoperator herum. Finden wir durch Ausprobieren Lösungen der Oszillatorgleichung? (So ein Herumspielen ist bei Differentialgleichungen eine immer wieder nützliche Tätigkeit, durch die man viel gewinnen kann!)

(2.1.8) Wir beginnen mit den homogenen Polynomen h_n mit $h_n(x) = x^n$. Man erhält $h_n \mapsto n(n-1)h_{n-2} + 2\rho n h_{n-1} + \omega_0^2 h_n$. Das gibt nur in Ausnahmefällen die Nullfunktion. Für $\omega_0^2 = 0$ beispielsweise ist h_0 eine Lösung. Allgemein erhält man so keine Lösung. Es nützt auch nichts, wenn man ein allgemeines Polynom oder eine Potenz ansetzt. Polynome und Potenzen liefern nur in Ausnahmefällen eine Lösung der Oszillatorgleichung.

(2.1.9) Wie steht es nun mit den trigonometrischen Funktionen? Als Ansatz versuchen wir es mit

$$c = (\mathbb{R}, t \mapsto \cos(\omega t), \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad s = (\mathbb{R}, t \mapsto \sin(\omega t), \mathbb{R}).$$

Hierbei ist ω als äußerer Parameter anzusehen. (Ein Faktor vor dem t ist aus physikalischen Gründen sicher erforderlich.)

Dieser Ansatz ergibt: $\mathfrak{D}_{Osz}(c) = -\omega^2 c - 2\rho s + \omega_0^2 c$. Nun sind s und c voneinander unabhängig. Der Term mit s kann nur für $\rho = 0$ verschwinden, also im dämpfungsfreien Fall. Nehmen wir diesen Fall an. Damit dann auch noch der Term mit c verschwindet, muß $\omega^2 = \omega_0^2$ gelten. Das legt uns den Wert von ω fest, wenn wir $\omega \geq 0$ verlangen. (Rollenwechsel: ω ist zunächst im Ansatz äußerer Parameter und wird durch die Festlegung zu einer Konstanten oder einer Hilfsgröße.)

Wir sehen: Im dämpfungsfreien Fall $\rho = 0$ haben wir zwei unabhängige Lösungen s mit $s(t) = \sin(\omega_0 t)$ und c mit $c(t) = \cos(\omega_0 t)$ gefunden. Das sind die klassischen Oszillatorlösungen.

(2.1.10) Falls wir jetzt das Dimensionsresultat unserer allgemeinen Theorie akzeptieren, sind wir fertig. Denn das besagt für unseren Fall, dass $\dim \mathfrak{L} = 2$ gilt. s und c sind (für $\omega_0 \neq 0$) unabhängig. Also verfügen wir über eine Basis von \mathfrak{L} . Die zugehörige Parametrisierung - also die Formel für die allgemeine Lösung des reibungsfreien Oszillators - lautet dann:

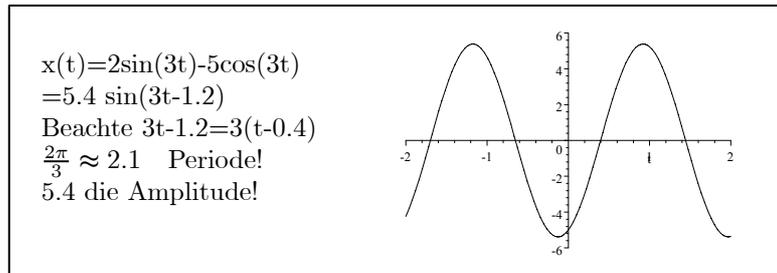
$$(\alpha, \beta) \mapsto x_{\alpha\beta} = \alpha c + \beta s \quad \text{mit} \quad x_{\alpha\beta}(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t).$$

□ Und wie steht es mit dem Fall $\omega_0 = 0$?

(2.1.11) **Wie sehen die Lösungen geometrisch aus?** Mit Hilfe des Additionstheorems für \sin kann man sofort eine andere Parametrisierung angeben:

$$(A, \varphi) \mapsto x_{A\varphi} \quad \text{mit} \quad x_{A\varphi}(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} A &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0 \\ \beta &= A \cos \varphi. \end{aligned}$$

(2.1.12) Ein konkretes Beispiel: Für $x(t)=2\sin(3t)-5\cos(3t)$ finden wir $A=\sqrt{29}$ und $\sin(\varphi)=-\frac{5}{\sqrt{29}}$.



Damit sehen wir: Jede Lösung aus(2.1.10) ist eine Sinusfunktion, die um $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega_0}$ verschoben ist und die die Amplitude A hat. Die Schwingungsdauer ist $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$.

(2.1.13) Jede Lösung des freien Oszillators wird durch drei Zahlangaben festgelegt. Entweder durch $(\alpha, \beta, \omega_0)$ oder durch (A, φ, ω_0) . Die erste Parametrisierung $x_{\alpha\beta}$ betont die Vektorraumstruktur des Lösungsraumes, die zweite macht die Form des Graphen der Inspektion zugänglich. Zum Behandeln von Problemen benötigt man beide Formen.

(2.1.14) Auf diese Weise haben wir genau dieselben Lösungen gewonnen, die wir in 7.1.8 durch Summation der zugehörigen Exponentialreihe fanden.

(2.1.15) Zurück zum allgemeinen Fall. Wie steht es mit der Exponentialfunktion? Als Ansatz wählen wir

$e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, wobei λ wieder ein äußerer Parameter sein soll.

(2.1.16) Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Osz}(e_\lambda) &= \lambda^2 e_\lambda + 2\rho\lambda e_\lambda + \omega_0^2 e_\lambda \\ &= (\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2) e_\lambda = 0 \end{aligned}$$

Das ist die Abbildungsgleichung. Als Wertegleichung schreibt sie sich:

$$\ddot{e}_\lambda(t) + 2\rho\dot{e}_\lambda(t) + \omega_0^2 e_\lambda(t) = (\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0 \quad \text{für alle } t.$$

(2.1.17) Ein bemerkenswertes Resultat: Die t-Abhängigkeit ist vollständig in den Faktor $e^{\lambda t}$ hineingewandert. Als Vektoren haben e_λ und somit $\mathcal{D}_{Osz}(e_\lambda)$ dieselbe Richtung. Oder auch: e_λ ist **Eigenvektor** zu \mathcal{D}_{Osz} . Bei den anderen Funktionen war das nicht so. So hatte $\mathcal{D}_{Osz}(c)$ im Reibungsfall eine störende zusätzliche Komponente in Richtung von s.

(2.1.18) Wann kommt Null heraus? Offenbar nur, wenn der Faktor vor $e^{\lambda t}$ verschwindet. Und das ist nur für ganz spezielle Werte von λ möglich. Nämlich dann, wenn $\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0$ gilt. Damit haben wir unsere frühere Eigenwertgleichung (1.8.25) - also $\lambda^2 - 2S\lambda + Det = 0$ - wiedergewonnen.

1. Station:

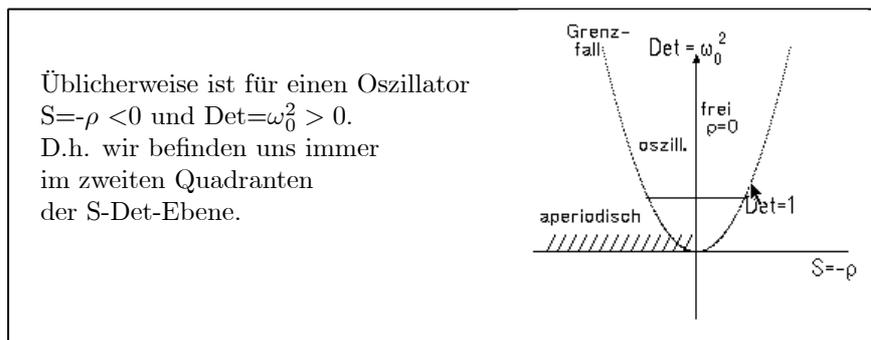
Unmittelbare Folge
der Dgl. (1.8.26):

$$\lambda_{\pm} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

(2.1.19) Für diese beiden λ -Werte ergibt e_λ eine Lösung der Oszillatorgleichung auch bei vorhandener Dämpfung. Damit sind wir durch Probieren erneut auf unseren früheren Eigenvektoransatz gestoßen. (Die zweite Komponente der Phasenraumkurve folgt durch Ableiten.)

(2.1.20) Das nächste Ziel ist die **allgemeine Lösung**. Infolge der Wurzel ist die früher getroffene Fallunterscheidung erforderlich.

Die Form der allgemeinen Lösung hängt ab vom jeweiligen Wert von $Dis = \rho^2 - \omega_0^2$, also von der Lage des



(2.1.21) Fassen wir die Schritte zusammen, die man bei der konkreten Behandlung von Oszillatorgleichungen auszuführen hat. **Es sind zunächst diese und keine weiteren!**

- **Inspektion** der Gleichung liefert ρ und ω_0^2 . (Vorzeichen? An 2ρ denken.....)
- Der **Ansatz** $x(t) = e^{\lambda t}$ für die Oszillatorgleichung führt auf die Bedingung (1. Station!)

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \text{für } \lambda.$$

- Je nach dem Wert von $Dis = \rho^2 - \omega_0^2$ gelangt man zu einem der **drei Fälle**

$$1) Dis > 0 \text{ aperiodisch} \quad 2) Dis < 0 \text{ schwingend} \quad 3) Dis = 0 \text{ Grenzfall}$$

- Für jeden der drei Fälle läßt sich die **allgemeine Lösung** unmittelbar hinschreiben und die Form der Konfigurationsraumkurven charakterisieren. (2. Station!)
- Anschließend erfolgt problemspezifische **Weiterverarbeitung** der allgemeinen Lösung. Insbesondere der Einbau eventueller Anfangswerte.

(2.1.22) Den vorletzten Punkt führen wir nachfolgend genauer aus. Der letzte Punkt ist der eigentlich interessante und wichtige. Es ist ein Übelstand, wenn immer wieder bei konkreten Rechnungen für den Weg bis zu diesem Punkt eine enorme Zeit und Energie benötigt wird, so dass für die eigentlich wichtige Fragestellung kaum noch Zeit und Energie verbleiben.

Jedenfalls sollte man bis zu diesem Punkt Zeit in der Größ enordnung von 1 Minute benötigen, nicht aber von 20 Minuten, wie vielfach zu beobachten ist. Speziell ist es unsinnig, alle Zwischenrechnungen des allgemeinen Falles stets erneut konkret nachzuvollziehen.

(2.1.23) Anmerkung zur Bezeichnung der drei Fälle: Die Bezeichnungen sind nicht einheitlich und leiden etwas unter fehlender Begriffsentfaltung der Alltagssprache. *Periodisch* sind die Lösungen nur im ungedämpften Fall. Ansonsten liegen für $Dis < 0$ *Schwingungen* vor. Für die Verneinung *nicht schwingend* oder *nicht oszillierend* gibt es keine sprachliche Kurzbezeichnung. Deshalb verwendet man gerne *aperiodisch* dafür, was aber eigentlich für nicht periodisch stehen sollte. Alternativ wird hierfür - besonders in der Technik - *Dämpfungsfall* gesagt. Aber natürlich sind auch die gedämpften Schwingungen gedämpft!

7.2.2 Der aperiodische Fall (starke Dämpfung)

$$\rho^2 > \omega_0^2 \quad \Omega = \sqrt{Dis}$$

$$Dis > 0$$

(2.2.1) In diesem Fall haben wir es mit zwei negativ reellen Lösungen (=Eigenwerte) zu tun.

$\lambda_- = -\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} \quad \lambda_+ = -\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} \quad \text{mit} \quad \lambda_- < \lambda_+ < 0$ Bei $\rho > 0$. Merke: "-" gehört zum kleineren Eigenwert.
Oder $\lambda_{\pm} = -\rho \pm \Omega \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$

□ Die Eigenwerte seien -5 und -1. Welcher ist λ_- . Wie erhält man aus den beiden Eigenwerten die Größen ρ und ω_0^2 ?

(2.2.2) Einsetzen in den Ansatz $e^{\lambda t}$ ergibt zwei unabhängige Lösungen der Oszillatorgleichung. Wir wissen auch hier aus der allgemeinen Theorie, dass der Lösungsraum zweidimensional ist. Folglich haben wir die allgemeine Lösung für den betrachteten Fall bereits gefunden:

2. Zwischenstation Hinschreibbar, sobald λ_{\pm} bestimmt!	$x_{\alpha\beta} = \alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t}$ $x_{\alpha\beta}(t) = \alpha e^{t\lambda_+} + \beta e^{t\lambda_-}$
------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(2.2.3) Dabei gehört α zum größeren Eigenwert λ_+ . Die Zahlen α und β sind freie Parameter. Dasselbe Resultat hat natürlich auch die allgemeine Theorie in (1.8.30) geliefert.

□ $\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 9x(t) = 0$. Die allgemeine Lösung in weniger als 2 Minuten!

(2.2.4) **Wie sieht eine derartige Lösung typischerweise aus?** Mit dieser Frage wollen wir uns genauer befassen. Kenntnisse dazu sind für alle Weiterbearbeitungen der allgemeinen Lösung relevant.

(2.2.5) Beide Eigenwerte sind negativ (solange $\rho > 0$ ist), so dass die Funktionswerte für $t \rightarrow \infty$ stets nach Null gehen. Dominanzüberlegungen zeigen wegen $\lambda_- < \lambda_+ < 0$:

- Für ausreichend negative t-Werte dominiert der Term mit $e^{t\lambda_-}$. Also $x_{\alpha\beta}(t) \approx \beta e^{t\lambda_-}$ und $\ln(x_{\alpha\beta}(t)) \approx \ln(\beta) - t\lambda_-$.
- Für ausreichend positive t-Werte dominiert der Term mit $e^{t\lambda_+}$. Also $x_{\alpha\beta}(t) \approx \alpha e^{t\lambda_+}$ und $\ln(x_{\alpha\beta}(t)) \approx \ln(\alpha) - t\lambda_+$.

(2.2.6) **Was heißt hier ausreichend ?** Das läßt sich (wegen der Monotonie der Exponentialfunktion) leicht präzisieren.

Sei T_+ derjenige t-Wert, für den $\beta e^{t\lambda_-}$ nur noch der ε -te Teil von $\alpha e^{t\lambda_+}$ ist. Als Formel:

$$|\beta| e^{T_+\lambda_-} = \varepsilon |\alpha| e^{T_+\lambda_+} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Dabei beschreibt ε die (wählbare) Stärke der Dominanz. Die Zahl ε ist als vorgegebener (äußerer Parameter) anzusehen und T_+ als Unbestimmte. Als Einstieg kann man $\varepsilon=0.1$ wählen Entsprechend definieren wir ein T_- für das Einsetzen des anderen Dominanzbereichs. Die entstehenden Bedingungsgleichungen können leicht nach T_+ , bzw. T_- aufgelöst werden. Beachten Sie, daß $-\ln(\varepsilon) > 0$ gilt. Ergebnis:

$T_+ = T_0 + \frac{-\ln(\varepsilon)}{\lambda_+ - \lambda_-}$	$T_+ = T_0 - \frac{-\ln(\varepsilon)}{\lambda_+ - \lambda_-}$
$T_0 = \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha} }{\lambda_+ - \lambda_-}$	$\lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} = 2\Omega$

(2.2.7) Für jede unserer Lösungskurven zerfällt der Urbildbereich mithin in drei Bereiche, deren Grenzen in etwa durch T_+ und T_- festgelegt werden. Im mittleren Bereich interferieren die beiden Summanden miteinander. In den Außenbereichen dominiert jeweils eine der beiden Exponentialfunktionen. Erhöhung des Genauigkeitsmaßes um eine Zehnerpotenz verschiebt die Grenzen um den konstanten Wert $\frac{\ln(10)}{2\Omega}$.

(2.2.8) Sofern α und β unterschiedliches Vorzeichen haben, gibt es noch eine Nullstelle bei t_0 und einen Extremwert bei t_E . Hierfür findet man sofort ($\frac{\lambda_-}{\lambda_+} > 1$, Oszillator!):

$$t_0 = T_0 = \frac{\ln|\frac{\beta}{\alpha}|}{2\Omega} \quad \text{und} \quad t_E = T_0 + \frac{\ln|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}|}{2\Omega}$$

(2.2.9) An der zweiten Formel fällt auf: Der t-Abstand *Nullstelle-Extremwert* ist unabhängig von den Koeffizienten α und β ! Er ist für **jede** Lösung derselbe, gleichgültig wie groß der Wert des Extremums ist. Diese zunächst überraschende Eigenschaft überträgt sich vom Schwingungsfall auf den Dämpfungsfall.

(2.2.10) Erläutern wir kurz die Bedeutung:

Die entwickelten Resultate und Formeln sind nützlich, um sich rasch und gezielt über den Kurvenverlauf von speziellen Lösungen zu orientieren. Man berechnet nacheinander die beiden Eigenwerte sowie T_0 , T_+ und T_- und eventuell t_E sowie $x_{\alpha\beta}(t_E)$. **Dann hat man bereits ein angemessenes Bild vom Kurvenverlauf.**

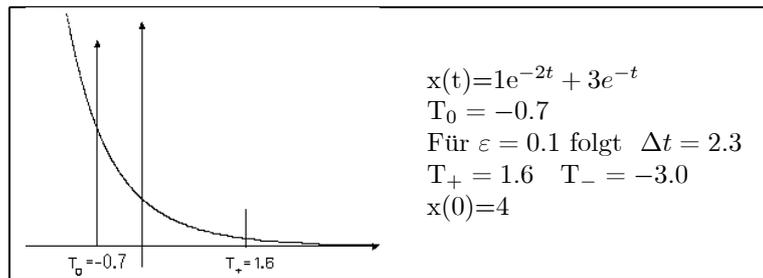
- Diskutieren Sie die Lösung $x(t)=2e^{\lambda+t} + 3e^{\lambda-t}$ des Oszillators aus der Frage zu (2.2.3) in der beschriebenen Weise. Dasselbe für $2e^{\lambda+t} - 3e^{\lambda-t}$.

(2.2.11) Bei zu unterschiedlichen Eigenwerten kann man diese Information einer einzigen graphischen Darstellung der üblichen Art kaum entnehmen und weiß auch nicht, wo man zu suchen hat.

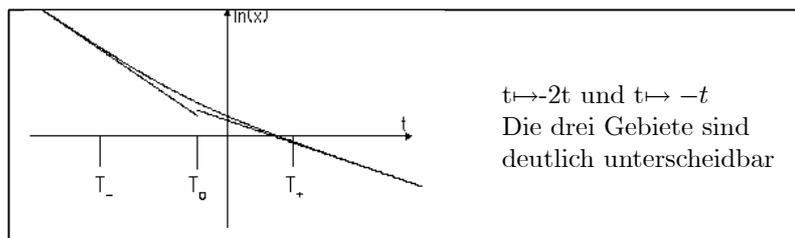
(2.2.12) Sind α und β beide positiv, kann es nützlich sein, den Logarithmus von $x(t)$ zu bilden, um so einen größeren Wertebereich gleichzeitig zu überblicken. Oben haben wir bereits gesehen, dass $\ln x(t)$ in den Dominanzbereichen näherungsweise Geraden ergibt, mit Steigungen gleich den Eigenwerten! Überdies ist T_0 der t-Wert des Schnittpunktes der beiden Geraden.

Jetzt einige Beispiele von Konfigurationsraumkurven zur Illustration.

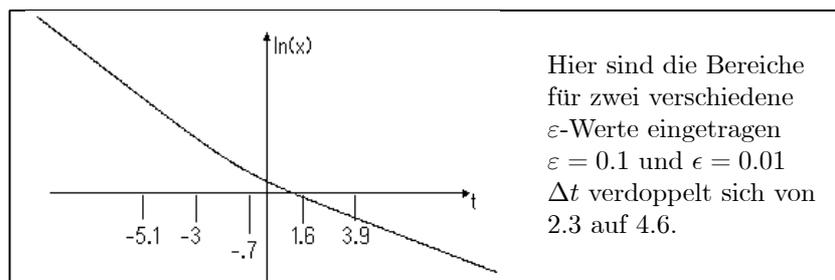
(2.2.13) Zunächst ein Beispiel mit $\alpha, \beta > 0$. In der üblichen Darstellung ist wenig Struktur zu erkennen.



Und nun derselbe Graph in logarithmischer Auftragung mit den beiden Asymptoten:



Und nun ein größerer t- Bereich erneut in logarithmischer Auftragung:

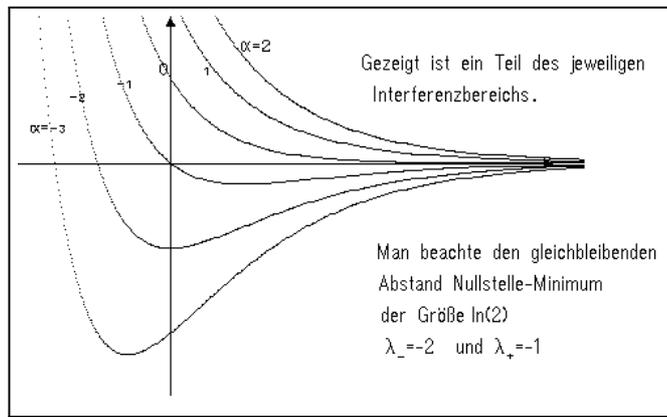


- Angenommen α und β haben verschiedenes Vorzeichen oder sind beide negativ. Was ist, wenn man $t \mapsto \ln|x(t)|$ aufträgt? In welchem Bereich liegt die Nullstelle notwendigerweise?

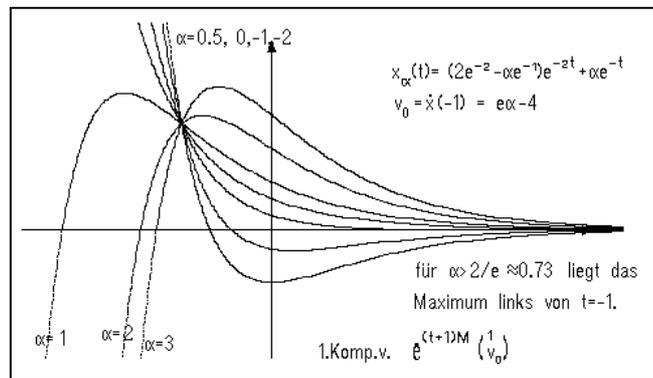
(2.2.14) Haben α und β unterschiedliches Zeichen, muss eine Nullstelle im Interferenzbereich auftreten. Das nächste Bild zeigt das. Die Formel gibt für den gewählten Fall $T_0 = -\ln(\alpha)$. Man sieht, wie die Nullstelle mit α von $+\infty$ nach $-\infty$ wandert.

Der Einfluß unterschiedlicher Koeffizienten. Gezeigt wird

$$x_\alpha(t) = 1e^{-2t} + \alpha e^{-t} \quad \text{für} \quad \alpha = 2, 1, \dots, -3.$$

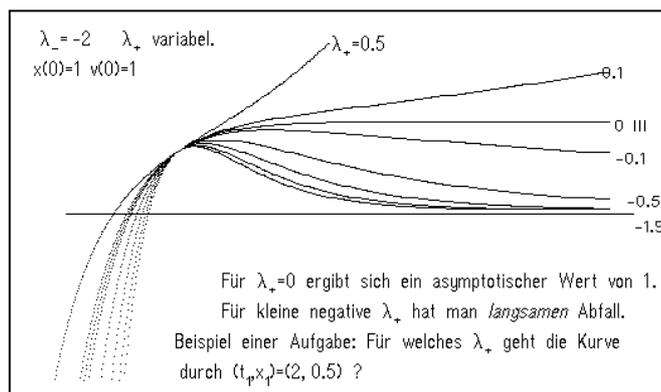


(2.2.15) Und jetzt alle Lösungskurven, die durch den Punkt $(t_0, x_0) = (-1, 2)$ hindurchgehen. Die allgemeine Lösung unseres Beispiels ist $x_{\alpha\beta}(t) = \beta \exp(-2t) + \alpha \exp(-t)$. Verlangt ist $x_{\alpha\beta}(-1) = 2$ als Bedingung für α und β . Ausgeschrieben $2 = \beta e^2 + \alpha e^1$. Wir wählen α frei und finden $\beta = e^{-2}(2 - \alpha e^1) = 2e^{-2} - \alpha e^{-1} \approx 0.271 - 0.368\alpha$. Das α ist ein auf den Rechenausdruck bezogener Parameter ohne direkte geometrische Bedeutung. Statt seiner könnte man auch $v_0 = \dot{x}(-1)$ einführen. Man findet sofort folgende Beziehung zwischen beiden Größen: $v_0 = \alpha - 4$. Während die allgemeine Lösung 2 freie Parameter hat und somit nur schlecht darstellbar ist, verbleibt jetzt eine einparametrische Funktionsschar, die gut zu zeichnen ist. Diese Lösung hätte man natürlich auch über e^{tM} bekommen. Genauer wird nur die erste Komponente von $e^{t(+1)M} \begin{pmatrix} 2 \\ v_0 \end{pmatrix}$ benötigt.



(2.2.16) Es folgt ein Beispiel für eine Änderung eines Eigenwertes bei festgehaltenen Anfangsbedingungen. λ_+ soll sich ändern, λ_- dagegen nicht. Das ist möglich, wenn man ρ und ω_0^2 in geeigneter Weise verkoppelt ändert.

Numerisch erreicht man das über die Gleichungen $\lambda_+ + \lambda_- = -2\rho$ und $\lambda_+ \lambda_- = -\omega_0^2$.



(2.2.17) Natürlich können wir auch in den **Phasenraum** gehen! Durch Differenzieren finden wir unser

altes Resultat aus der e^{tM} -Rechnung wieder:

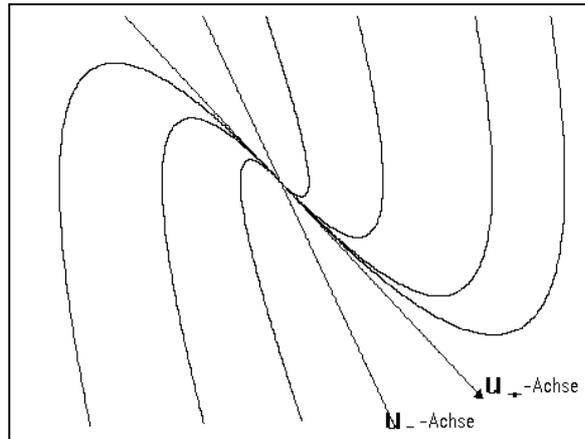
$$\vec{x}_{\alpha\beta}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{t\lambda_+} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} + \beta e^{t\lambda_-} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Erneut gilt und nutzt das Dominanzargument: Die Formeln für T_+ und T_- sind leicht abzuändern, da jetzt noch die Norm der Vektoren zu berücksichtigen ist. (Wir formulieren die Formeln hier nicht.)

(2.2.18) Da beide Eigenwerte notwendig negativ sind, ergibt sich folgendes Bild:

- Für $t < T_-$ dominiert der Term mit $\vec{u}_- e^{t\lambda_-}$. Wir erwarten eine auf das Zentrum gerichtete Bewegung mit Richtung (parallel) \vec{u}_- .
- Für $t > T_+$ dagegen verläuft die Bewegung in Richtung \vec{u}_+ auf das Zentrum zu.
- Im Interferenzbereich findet der Richtungswechsel statt.

(2.2.19) Nehmen wir wieder unser altes Beispiel mit $\lambda_- = -2$ und $\lambda_+ = -1$. Hieraus folgt $2\rho = 3$ und $\omega_0^2 = 2$. Das nachfolgende Bild zeigt eine Reihe von Lösungskurven in der Umgebung des Nullvektors. Horizontal ist die x-Achse und vertikal die v-Achse des Phasenraumes aufgetragen. Die von \vec{u}_- und \vec{u}_+ erzeugten Achsen sind mit eingezeichnet.



Vergleichen Sie auch mit dem ersten Bild zu (1.3.7), wo beide Eigenwerte positiv sind!

7.2.3 Der Schwingungsfall

$\rho^2 < \omega_0^2$	Dis < 0	$\omega = \sqrt{-Dis} = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$	$\omega = i\Omega$
-----------------------	---------	-----------------------------------------------------	--------------------

(2.3.1) Wir gehen jetzt zum zweiten Fall mit $Dis = \rho^2 - \omega_0^2 < 0$ über. Das ist der Fall komplexer Eigenwerte, also $\omega = i\Omega$. Wir setzen:

$\lambda_{\pm} = -\rho \pm i\omega$ mit $\omega = \sqrt{-Dis} = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ ω ist eine für diesen Fall wichtige Hilfsgröße, die nicht mit der Konstanten ω_0 aus der Differentialgleichung verwechselt werden darf. Man hat $\omega^2 = \omega_0^2 - \rho^2$, so daß $\omega^2 < \omega_0^2$ gilt.

(2.3.2) Damit findet man die grundlegende Beziehung:

$$e^{\lambda_+ t} = e^{-\rho t} e^{i\omega t} = e^{-\rho t} (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

(2.3.3) **Real- und Imaginärteil sind** - wie wir aus (1.8.40) wissen oder leicht direkt verifizieren können - **getrennt Lösungen**. Übernehmen wir erneut das Resultat über die Dimension des Lösungsraumes, so haben wir eine Basis und können bereits die allgemeine Lösung angeben:

2. Station Unmittelbar nach der Verzweigung	$x_{\alpha\beta}(t) = e^{-\rho t} \{ \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \}$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ α, β frei
-------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(2.3.4) Auch dieses Resultat ist leicht zu merken und das sollte man tun. Man kann damit zu gegebener Differentialgleichung die Lösung stets unmittelbar hinschreiben. Im wesentlichen ist nur ω auszurechnen! Beachten Sie, wie die Lösung für $\rho = 0$ in den Fall des harmonischen Oszillators übergeht. Insbesondere gilt nur für $\rho = 0$ Gleichheit der beiden Frequenzen, also $\omega_0 = \omega$.

□ Tun sie das für $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$ in einer Minute.

(2.3.5) Wie bereits in (2.1.11) erwähnt, läßt sich obiger Ausdruck mit Hilfe der Additionstheoreme in eine andere, zur graphischen Analyse geeigneteren Form bringen:

$$\boxed{x_{A\varphi}(t) = Ae^{-\rho t} \sin(\omega t + \varphi) \quad \begin{array}{l} A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \alpha = A \sin \varphi \quad \beta = A \cos \varphi \end{array}}$$

(2.3.6) Das zeigt, dass es sich bei allen Lösungen $\neq 0$ um gedämpfte Schwingungen der Kreisfrequenz ω handelt, die noch eine Phasenverschiebung besitzen können. Infolge der Dämpfung ist ω stets kleiner als die Kreisfrequenz ω_0 der entsprechenden ungedämpften Schwingung. Der zugehörige T-Wert ist also größer:

Die Reibung verlangsamt den Schwingungsvorgang.

(2.3.7) Diese zweite Form der Lösungen ist für Fragen der Kurvendiskussion geeignet, meist weniger zur Lösung von Anfangswertaufgaben. In diesem Fall sollte man eher die Vektorraumform wählen. Man muß beide Formen kennen und ineinander umwandeln können.

(2.3.9) Können wir wieder **charakteristische Zahlen** finden, die das geometrische Verhalten der Lösungen beschreiben? (Analog zu T_+, T_- usw.)

(2.3.10) Eine erste solche Zahl liefert ω , die zugehörige Kreisfrequenz. Über $T = \frac{\omega}{2\pi}$ erhalten wir hier den **Abstand einander entsprechender Nullstellen**. Im ungedämpften Fall ist das die Periode ω_0 . Durch die Dämpfung wird dieser Zeitraum vergrößert. T ist die Zeitgröße, die die Periode der beteiligten Sinus- und Cosinusfunktionen wiedergibt. Geht man um T weiter, so vermindert sich die Amplitude überall um immer denselben Faktor. Nämlich um $\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\rho T}$. Die Größe $\Lambda = \rho T$ wird auch selbsterklärend logarithmisches Dekrement genannt. Sie erfaßt eine wichtige gemeinsame Symmetrieeigenschaft aller Lösungskurven.

$$\boxed{\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\rho T} = e^{-\Lambda} \quad \text{für alle } t \text{ mit } x(t) \neq 0.}$$

(2.3.11) Eine weitere Größe sollte die Stärke der Dämpfung beschreiben. Wir definieren dazu die "Halbwertszeit" τ : Geht man auf der t-Achse um τ weiter nach rechts, so halbiert sich die Amplitude der dämpfenden Exponentialfunktion. Man rechnet leicht nach - und das ist der bemerkenswerte Punkt -, daß τ unabhängig von der Wahl des Startpunktes ist. Gleichgültig wie man t_0 wählt, für $t_0 + \tau$ ist die Amplitude (des Exponentialfaktors) auf den halben Wert gesunken. Für unsere Exponentialfunktion findet man $\tau = \frac{\ln(2)}{\rho}$. Da τ in der Regel kein Vielfaches von T ist und der Sinusfaktor bei $t + \tau$ daher einen anderen Wert hat, sieht man diese Abnahme vornehmlich als Abnahme der Hüllkurve. Zusammen:

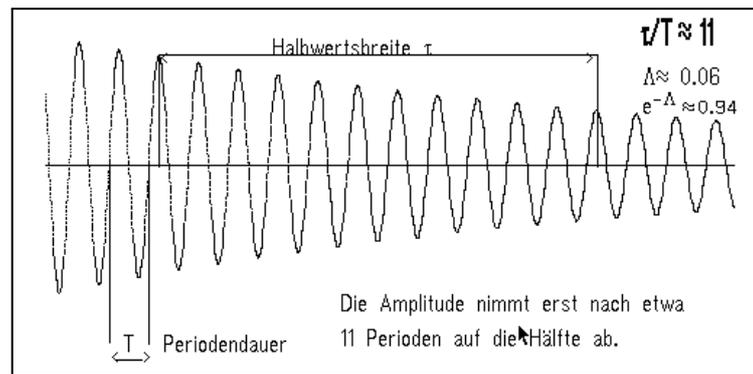
$$\boxed{\frac{e^{-\rho(t+\tau)}}{e^{-\rho t}} = 0.5 \quad \tau = \frac{\ln(2)}{\rho} \approx \frac{0.7}{\rho} \quad \begin{array}{l} \text{Halbwertszeit oder} \\ \text{Halbwertsordinate} \end{array}}$$

(2.3.12) Im konkreten Fall wird man immer τ mit T vergleichen, um zu sehen, wie stark die **Dämpfung über eine Periode** wirkt. Der Quotient $\frac{\tau}{T}$ ist demnach eine nützliche einheitenfreie Größe.

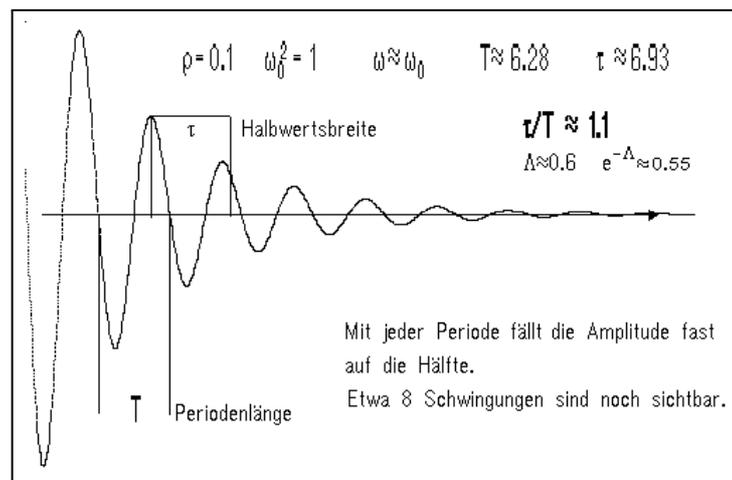
(2.3.13) Fassen wir zusammen:

- Erneut sind wir in der Lage, den Graphenverlauf von Oszillatorlösungen zu analysieren. Ausgehend von ρ und ω_0^2 verschaffen wir uns T und τ und eventuell das daraus abgeleitete Λ .
- Eventuell auch die gleich zu besprechende Größe δ .
- Damit sind dann die wichtigsten Merkmale der Graphen verfügbar

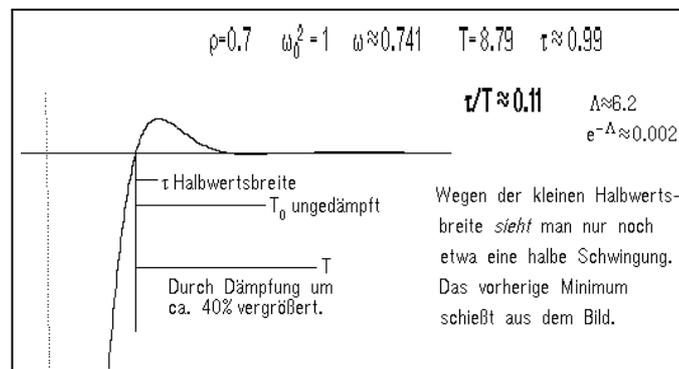
(2.3.14) Zur Verdeutlichung wieder einige Beispiele mit unterschiedlich starker Dämpfung.



(2.3.15) Jetzt ein Fall mit stärkerer Dämpfung.



(2.3.16) Und nun ein Fall mit noch stärkerer Dämpfung. Man sieht nicht mehr, daß unendlich viele Schwingungen vorliegen.



□ Bestimmen Sie für die drei Beispiele die Lage in der S-Det-Ebene: ($S = -\rho$, $\text{Det} = \omega_0^2$). Vgl. die Figur in (2.1.20).

(2.3.17) Ausgehend von der Formel für $x_{A\varphi}(t)$ kann man auch eine instruktive Formel für die Ableitung - also die **Geschwindigkeit** - herleiten. Differenzieren gibt zunächst:

$$\dot{x}_{A\varphi}(t) = Ae^{-\rho t} \{-\rho \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)\}$$

Inspektion dieses Ausdrucks legt erneute Anwendung des Additionstheorems nahe. Beachten Sie, daß $\rho^2 + \omega^2 = \omega_0^2$ gilt.

(2.3.18) Damit folgt

$$\dot{x}_{A\varphi}(t) = A\omega_0 e^{-\rho t} \{ \cos(\omega t + \varphi + \delta) \} \quad \omega = \omega_0 \cos \delta \quad \rho = \omega_0 \sin \delta$$

(2.3.19) Also: Der (gegenüber dem ungedämpften Fall) zusätzliche Faktor $e^{-\rho t}$ bewirkt beim Ableiten einfach eine Ersetzung von ω durch ω_0 und eine zusätzliche Phasenverschiebung. Erneut ist der durch δ bestimmte Abstand zwischen Nullstelle und Extremwert unabhängig von den Anfangswerten und zusätzlich von der Lage der Nullstelle. (Der Abstand ist nicht $T/4$ wie im ungedämpften Fall!)

(2.3.20) Durch die Dämpfung werden die Extremwerte der Schwingung gegenüber den Extremwerten der reinen Sinusfunktion nach links verschoben. Das Ausmaß dieser Verschiebung wird durch $\Delta t = \frac{\delta}{\omega}$ bestimmt. Zusätzlich werden die Maxima gegenüber den Maxima des Sinusfaktors erhöht. Diese Erhöhung kann man ausrechnen und sie ist erneut unabhängig vom t -Wert und den Lösungsparametern A und φ . Sie hängt nur von δ ab.

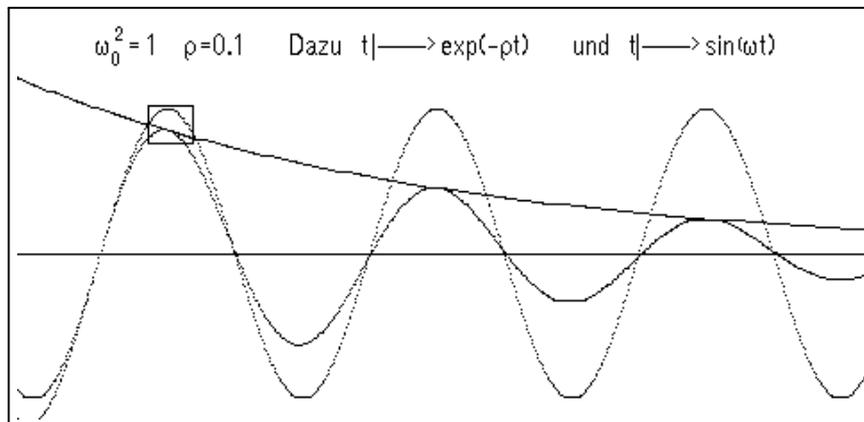
(2.3.21) Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

$$\frac{x(t_M)}{x(t_m)} = \cos \delta e^{\delta \tan \delta} \quad \Delta t = t_m - t_M = \frac{\delta}{\omega} \quad \begin{array}{l} \omega = \omega_0 \cos \delta \\ \rho = \omega_0 \sin \delta \end{array}$$

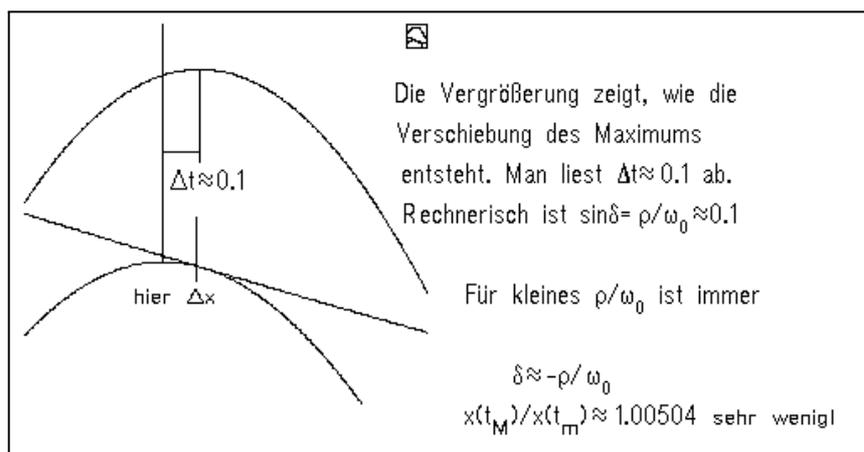
t_M Koordinate eines Maximums von $x = x_{A\varphi}$. Also $\dot{x}_{A\varphi}(t_M) = 0$.
 t_m Koordinate des darauf folgenden Maximums des Sinusfaktors.

- Verifizieren Sie die angegebenen Formeln!
- Bestimmen Sie die ersten Terme der Taylorentwicklung von $\delta \mapsto \cos \delta e^{\delta \tan \delta}$ und diskutieren Sie das Resultat.

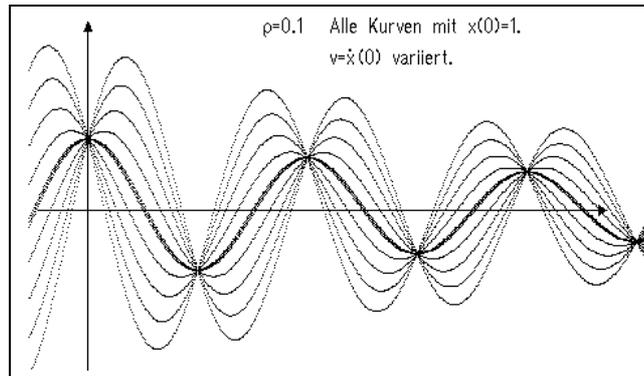
(2.3.22) Ein Beispiel.



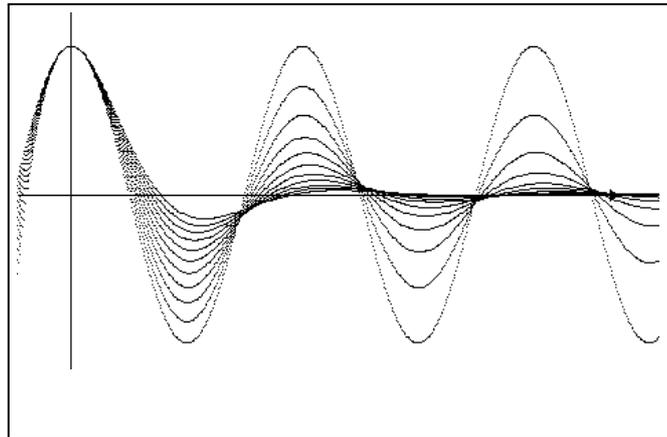
Jetzt die Vergrößerung des markierten Abschnitts um das erste Maximum.



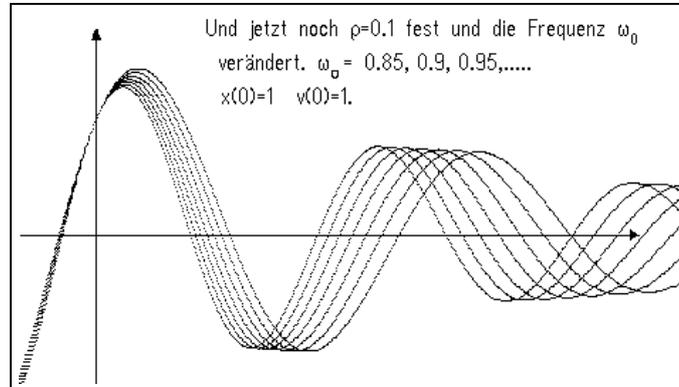
(2.3.23) Und jetzt wieder eine Reihe von Lösungskurven, die mit unterschiedlicher Steigung durch einem festen Punkt gehen:



Im folgenden Bild ist $v=\dot{x}(0)=0$ fest und ρ wird variiert. $\rho = 0, 0.1, 0.2, \dots$. Man erkennt die Änderung der Periode.



Alternativ kann man auch die Kreisfrequenz ω_0 ändern.

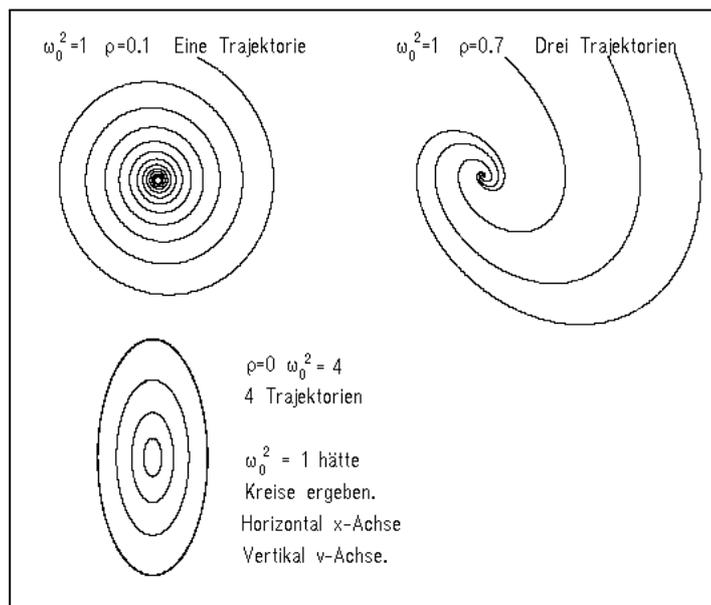


(3.2.24) Mit Hilfe der gefundenen Konfigurationsraumkurven $t \mapsto x(t)$ kann man auch die Phasenraumkurven $t \mapsto \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ angeben. Ableiten gibt mit (2.3.18):

$$\vec{y}_{A\varphi}(t) = A e^{\rho t} \begin{pmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \omega_0 \cos(\omega t + \varphi + \delta) \end{pmatrix}.$$

(2.3.25) Die Formel zeigt, daß eine nach innen laufende Spirale vorliegt. Im ungedämpften Fall entstehen Ellipsen. Im Phasenraum zeichnen wir in der Regel Bilder ausgewählter Lösungskurven, also *Trajektorien*.

Die Zeitabhängigkeit geht bei dieser Darstellung verloren. Auch kann man nicht alle Trajektorien zeichnen, immer nur ausgewählte typische. In diesem Sinne folgen jetzt einige Beispiele:



7.2.4 Der aperiodische Granzfall

$$\boxed{\rho^2 = \omega_0^2 \quad \text{Dis}=0}$$

(2.4.1) In diesem Fall liefert der Exponentialansatz $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, von dem wir ja ausgegangen sind, nur **eine** unabhängige Lösung. Beide λ -Werte stimmen überein mit $\lambda = -\rho$. Die gefundene Lösung ist einfach $x_1(t) = e^{-\rho t}$.

(2.4.2) Wir benötigen eine **zweite** Lösung, wobei wir mit der Suche wieder ganz von vorne beginnen müssen. Damit die Zeitabhängigkeit in bewährter Weise aus der Bedingung herausfällt, sollte die Exponentialfunktion als Faktor bleiben. Versuchen wir es mit "Polynom mal Exponentialfunktion". Hier wird man rasch fündig. (Denken Sie an den Fall $\rho = \omega_0 = 0$, also $\ddot{x}(t) = 0$. Wie sieht dort die allgemeine Lösung aus?) Die einfachste neue Möglichkeit führt bereits zum Ziel:

(2.4.3) Ansatz:

$$x(t) = te^{-\rho t}. \text{ Also } \dot{x}(t) = e^{-\rho t} + (-\rho)te^{-\rho t} \text{ und } \ddot{x}(t) = 2(-\rho)e^{-\rho t} + (-\rho)^2 te^{-\rho t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und sortieren:

$$(-2\rho + 2\rho + 0)e^{-\rho t} + (\rho^2 + 2\rho(-\rho) + \omega_0^2)te^{-\rho t} = 0.$$

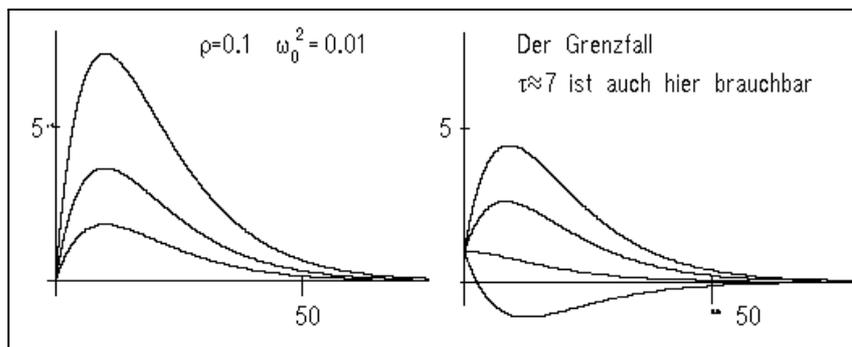
Der erste Term fällt immer weg, der zweite nur für $\rho^2 = \omega_0^2$. Und das ist gerade der von uns betrachtete Fall. Damit haben wir die benötigte zweite unabhängige Lösung!

(2.4.4) Mit zwei unabhängigen Lösungen verfügen wir erneut über eine Basis des Lösungsraumes, können also die allgemeine Lösung hinschreiben:

$$\boxed{\text{2. Station} \quad x_{\alpha\beta}(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\rho t} \quad \alpha, \beta \text{ frei.}}$$

(2.4.5) Diskussion: Für $\beta \neq 0$ gibt es immer eine Nullstelle bei $t_0 = -\frac{\alpha}{\beta}$ und damit über das übliche Dominanzargument auch einen Extremwert. Dieser liegt bei $t_E = \frac{1}{\rho} + t_0$. Erneut haben Nullstelle und Extremwert einen von α und β unabhängigen Abstand. Um t_0 herum dominiert der Faktor $\alpha + \beta t$, in den die Anfangswerte eingehen. Für $|\beta t| \gg |\alpha|$ dominiert nach beiden Seiten der Faktor $\beta te^{-\rho t}$

- Durch Differenzieren erhält man sofort die Phasenraumdarstellung der Lösungen, so wie sie auch aus der zugehörigen e^{tM} -Formel folgt. Führen Sie das aus.



7.2.5 Bemerkungen zur rechnerischen Behandlung von Anfangswertaufgaben

(2.5.1) Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung - etwa eines Oszillatorproblems - sei bekannt und ein zugehöriges Anfangswertproblem sei zu lösen. D.h. die zugehörige spezielle Lösung ist zu suchen. Und es soll nicht mit der e^{tM} -Form gearbeitet werden, etwa weil die nicht verfügbar ist. Derartige Problemsituationen sind in Anwendungen häufig zu bewältigen.

(2.5.2) In einer solchen Situation sollte man sich die folgenden beiden Fragen stellen und fallspezifisch beantworten:

1. Sofern konkrete Zahlwerte für die äußeren Parameter und die Anfangswerte gegeben sind: **An welcher Stelle der Rechnung sollte man diese Werte einsetzen?**
2. **Mit welcher Form der allgemeinen Lösung sollte man arbeiten?**

(2.5.3) Ungeschicktes Vorgehen kann den Rechenaufwand enorm erhöhen mit entsprechend hoher Fehleranfälligkeit. Leider besteht eine verbreitete und nur schwer zu beseitigende Tendenz, beide Fragen ungünstig zu beantworten. So werden die Zahlen immer wieder *möglichst früh* in die Rechnung eingesetzt und es wird immer ein und dieselbe Form der allgemeinen Lösung verwandt. Ersteres wohl aus tiefsitzender Abneigung gegen die Unheimlichkeit des Abstrakten und letzteres, weil dann weniger zu wissen und zu überlegen ist.

(2.5.4) Tatsächlich sollte man die erste Frage in der Regel entgegengesetzt beantworten: **Die Zahlwerte also möglichst spät einsetzen.** Es sei denn, es ergeben sich durch frühzeitiges Einsetzen erkennbare nützliche Vereinfachungen. Außerdem sollte man nicht gleich bei Beginn der Rechnung exakte Zahlwerte durch Kommastellennäherungen ersetzen.

(2.5.5) Umgekehrt sollte man ungenau bekannte Werte nicht durch scheinbar genauere ersetzen. Ist also ein Parameter nur auf 2 Kommastellen bekannt, sollte man nach dem Einsetzen nicht 5 Stellen angeben und damit rechnen, wie immer wieder zu beobachten ist.

(2.5.6) Jetzt ein **Beispiel** einer derartigen Rechnung.

Für die Oszillatordifferentialgleichung $\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + 9x(t) = 0$ soll die Anfangswertaufgabe $x(1)=1$ und $v(1)=1$ gelöst werden. Dabei sei $\rho=0.5$.

Wir haben es mit dem Schwingungsfall zu tun für $\omega^2 = 9 - 0.25 \approx 8.75$. Also $\omega \approx 2.96$ und nicht etwa $\omega = 2.95804$!

Man sollte mit ω weiterarbeiten und nicht lange Rechnungen mit $\sin(2.96t)$ ausführen. Eher sollte man $\omega_0 = 3$ als Hilfsgröße einführen. (Vgl. z.B. (2.3.18).)

(2.5.7) **Welche Form der allgemeinen Lösung wird man wählen?** Sicher die Linearkombinationsform $e^{-\rho(\dots)}(\alpha \sin \dots + \beta \cos \dots)$. Außerdem gehören die Beobachtungsdaten zum Zeitpunkt $t_0 = 1$. Daher ist nach (1.6.10) überall t durch $t-1$ zu ersetzen, was die folgende Form der allgemeinen Lösung ergibt

$$x_{\alpha\beta}(t) = e^{-\rho(t-1)} \{ \alpha \sin(\omega(t-1)) + \beta \cos(\omega(t-1)) \}$$

Die Einführung der Bezeichnung t_0 ist nicht erforderlich, aber auch nicht schädlich. Setzen wir in der allgemeinen Lösung $t=1$, so folgt **unmittelbar** $1=\alpha+\beta$. Also $\beta=1$. Differenzieren gibt mit etwas Inspektion:

$$\dot{x}_{\alpha\beta}(t) = -\rho x_{\alpha\beta}(t) + e^{-\rho(t-1)}\omega \{ \alpha \cos(\omega(t-1)) - \beta \sin(\omega(t-1)) \}$$

Über $v(1)=1$ und $x(1)=1$ folgt $1 = -\rho + \omega\{\alpha + 0\}$, also $\alpha = \frac{1+\rho}{\omega}$.

(2.5.8) Nun kann man bereits das Ergebnis aufschreiben:

$$\boxed{x_S(t) = e^{-\rho(t-1)} \left\{ \frac{1+\rho}{\omega} \sin(\omega(t-1)) + \cos(\omega(t-1)) \right\} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{8.75} \quad \rho = 0.5}$$

(S als Bezeichnung für die gesuchte spezielle Lösung. Die dabei benutzte Gleichung $x_S(t) = x_{\frac{1+\rho}{\omega},1}(t)$ wird man nicht anschreiben. Sie ist für die Herleitung wichtig, nicht für die Formulierung des Endresultates!)

(2.5.9) **Fertig.** Der Aufwand an Rechnung und Schreibarbeit ist minimal. In der Endformel sollten **alle** benötigten Resultate zusammengestellt sein. D.h. hier werden die Werte der Hilfsgrößen tatsächlich angegeben und nicht irgendwo in der Rechnung versteckt.

(2.5.10) Für die gleiche Aufgabe wurden bei ungeschicktem Vorgehen in Klausuren bis zu einer Stunde Rechnung über mehrere Seiten beobachtet mit meist auch noch falschem Resultat.

- Versuchen Sie das einmal selbst: Arbeiten Sie mit der Formel für $t_0 = 0$ und ersetzen Sie von Beginn an jedes ω durch 2.95804.

Kap 7.3: Der inhomogene Fall

7.3.0 Vorbemerkung

(3.0.1) Wir behandeln jetzt den inhomogenen Fall $\dot{\vec{y}} = M\vec{y} + \vec{b}$ oder $\dot{\vec{y}}(t) = M\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$. Hierbei darf und sollte \vec{b} recht allgemein gewählt werden, um Einschaltvorgänge und sprunghafte Änderungen von äußeren Einflüssen mit erfassen zu können. **Insbesondere darf \vec{b} im Gegensatz zu M von t abhängen.**

Genauer betrachten wir folgendes Szenenbild:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Phasenraum } W \text{ mit } \dim W = N, \quad M: W \rightarrow W \text{ linear.} \\ \vec{b}: I \rightarrow W \text{ stückweise glatt. } \quad I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall} \\ \text{Differentialgleichung } \dot{\vec{y}}(t) = M\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad . \text{ Dazu } L(\vec{y}) = \dot{\vec{y}} - M\vec{y}. \end{array}}$$

(3.0.2) Im Oszillatorfall besagt das physikalisch: **Es wirkt noch eine zusätzliche, von außen vorgegebene Kraft auf den Oszillator ein.** Diese hängt nicht vom Systemzustand, insbesondere der jeweiligen Auslenkung ab, sondern höchstens von der Zeit. Physikalische Realisierungen lassen sich leicht ausdenken. Hängt \vec{b} explizit von t ab, gelten die Überlegungen aus 7.1.6a nicht, **man erhält dann keine Phasenraumpartition.**

(3.0.3) Da der zugehörige homogene lineare Differentialoperator L einen N -dimensionalen Lösungsraum hat, kommt es nur darauf an, ob die inhomogene Gleichung überhaupt lösbar ist. Vgl. Kap.5.1. **Wir müssen eine einzige spezielle Lösung finden und sind fertig.** Das Verfahren der Variation der Konstanten leistet dies, ja liefert uns sogar erneut eine explizite Formel für diese Lösung. Der zunächst denkbare Fall eines unlösbaren Problems ("widersprüchliche Bedingung") kommt bei diesem Differentialgleichungsproblem nicht vor.

- Vergleichen Sie mit linearen Gleichungssystemen!

(3.0.4) Meist ist jedoch die Methode der Variation der Konstanten recht rechenaufwendig. Dann kann man sich durch eine Art geschicktes und systematisiertes Raten in vielen wichtigen Fällen das Leben erleichtern. In 7.3.4 besprechen wir diese Methode unter dem Stichwort *Faustregel*.

(3.0.5) In 7.3.3 behandeln wir den wichtigen Fall einer nicht glatten Inhomogenität. Auch er wird automatisch durch die Methode der Variation der Konstanten mit erfasst, aber erneut gibt es Probleme mit der Recheneffizienz, die eine andere Methode bedeutsam machen.

7.3.1 Variation der Konstanten

(3.1.1) Was bedeutet *Variation der Konstanten*? Dahinter steckt die folgende Idee

Ersetze in der Lösung der homogenen Gleichung die Integrationskonstanten durch t-abhängige Funktionen, *mache die Konstanten variabel*.

(3.1.2) Wieso diese Idee nützlich ist, zeigt die nachfolgende Rechnung. In unserem Fall müssen wir $e^{tM} \cdot \vec{y}_0$ durch $e^{tM} \cdot \vec{y}_0(t)$ ersetzen, wobei $t \mapsto \vec{y}_0(t)$ eine geeignet zu wählende oder zu bestimmende Funktion ist. (Rolle Unbestimmte!, $\vec{y}_0(t)$ ist die Variation der konstanten Anfangswerte!)

(3.1.3) Damit haben wir einen **Ansatz** für eine Lösung (Bezeichnung \vec{y}_S) und können das Bestimmungsproblem wie üblich angehen:

$$\begin{aligned} \vec{y}_S(t) &= e^{tM} \cdot \vec{y}_0(t) && \text{Ist einzusetzen in} && \dot{\vec{y}}(t) = M \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t) \\ \dot{\vec{y}}_S(t) &= M \cdot \vec{y}_S(t) + e^{Mt} \dot{\vec{y}}_0(t) && = M \cdot \vec{y}_S(t) + \vec{b}(t) && \text{Also } \boxed{e^{tM} \dot{\vec{y}}_0(t) = \vec{b}(t)} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist die von $t \mapsto \vec{y}_0(t)$ zu erfüllende Bedingung, die dann zu einer Lösung der Ausgangsgleichung führt. Diese Gleichung hat aber eine einfache Lösung, da die gesuchte Größe \vec{y}_0 rechts nicht vorkommt!

(3.1.4) Mit den Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion kann nach dem gesuchten $\vec{y}_0(t)$ aufgelöst werden. Vgl. (1.4.13). Es bleibt eine reine Integration:

$$\dot{\vec{y}}_0(t) = e^{-tM} \cdot \vec{b}(t). \quad \text{Also} \quad \underline{\underline{\vec{y}_0(t) = \vec{y}_0(t_0) + \int_{t_0}^t ds e^{(t-s)M} \cdot \vec{b}(s)}}$$

Einsetzen in den Ansatz gibt die gesuchte Lösung für die Ausgangsgleichung:

$$\vec{y}_S(t) = e^{tM} \cdot \vec{y}_0(t_0) + \int_{t_0}^t ds e^{(t-s)M} \cdot \vec{b}(s).$$

(3.1.5) Es ist besser, noch so umzuparametrisieren, so dass der Anfangswert von \vec{y}_S , nicht aber der von \vec{y}_0 in der Endformel auftritt, also $\vec{a} = e^{t_0 M} \cdot \vec{y}_0(t_0) = \vec{y}_S(t_0)$ einzuführen. Das gibt:

Lösungsformel *Variation der Konstanten*

$$\vec{y}_S(t) = e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{a} + \int_{t_0}^t ds e^{(t-s)M} \cdot \vec{b}(s)$$

Je nach **Rollenzuweisung** an \vec{a} ist das die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung oder Lösung des Anfangswertproblems mit $\vec{y}_S(t_0) = \vec{a}$.

(3.1.6) Die gefundene spezielle Lösung existiert, sofern das Integral existiert. Das ist aber bei stückweise glattem \vec{b} sicher der Fall. Überdies ist \vec{y}_S stetig, selbst an den Stellen, an denen \vec{b} das nicht ist. (Integration glättet!) Die Unstetigkeit tritt erst wieder in der Ableitung auf.

(3.1.7) **Damit ist die inhomogene Gleichung bereits vollständig gelöst.**

(3.1.8) Wenn L über den Reduktionstrick aus einer Differentialgleichung höherer Ordnung entsteht, dann steckt die eventuelle Unstetigkeit nur in der höchsten Ableitung $y^{(k)}(t)$. Denn die übrigen Ableitungen entstehen aus dieser wieder durch Integration, wodurch ja eine Unstetigkeit beseitigt wird. Das ist ein wichtiger Punkt, den wir unten beim Anstückeln von Lösungen benötigen werden.

(3.1.9) Ein Nachteil der schönen hergeleiteten Formel ist, dass das resultierende Integral vielfach eine längliche Rechnung erfordert. Benötigt man die Lösung explizit, so ist die weiter unten angegebene Faustregel - sofern anwendbar - vorzuziehen. Diese Faustregel ist einfach eine verbesserte und systematisierte Form des Ratens einer Lösung. In (3.2.7) und (3.2.13) ist ein und dasselbe Problem einmal auf beide Weisen durchgerechnet.

7.3.2 Das Stückeln von Lösungen

(3.2.1) Angenommen man hat bei t_0 eine Unstetigkeit von \vec{b} der Form $\vec{b}(t) = \vec{g}(t)$ für $t > t_0$ und $\vec{b}(t) = \vec{h}(t)$ für $t < t_0$ und stetigen \vec{g} und \vec{h} . Kurz schreibt man $\vec{b}(t_0 + 0) = \vec{g}(t_0)$ und $\vec{b}(t_0 - 0) = \vec{h}(t_0)$. Und man habe Formeln für die allgemeine Lösung mit \vec{g} einerseits und für \vec{h} andererseits. Wie erhält man daraus die gewünschte Lösung für \vec{b} ?

(3.2.2) Man nutzt die Stetigkeitseigenschaft von \vec{y} . Die exakte durch (3.1.5) gegebene Lösung muß stetig sein - insbesondere auch an der Sprungstelle t_0 . Nun sei $\vec{y}_{\vec{g}\vec{c}}$ die allgemeine Lösung, die zu $\vec{b}=\vec{g}$ gehört und $\vec{y}_{\vec{h}\vec{d}}$ die zu $\vec{b}=\vec{h}$ gehörige. \vec{c} bzw. \vec{d} seien die freien Parameter der beiden allgemeinen Lösungen. Unterscheidende Bezeichnungen für diese Parameter sind wichtig! Stetigkeit von \vec{y}_0 bei t_0 besagt:

$$\boxed{\vec{y}_{\vec{g}\vec{c}}(t_0 + 0) = \vec{y}_{\vec{h}\vec{d}}(t_0 - 0) \quad \text{Die Stückelungsbedingung}}$$

(3.2.3) Das ist als Bedingung für die 2N Parameter \vec{c} und \vec{d} anzusehen! Die Lösung der Bestimmungsgleichung ergibt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (für \vec{b}) mit N verbleibenden freien Parametern.

(3.2.4) Häufig ist die Rollenzuweisung so, dass die Lösung für $t < t_0$ festliegt, d.h. dass $\vec{c} = \vec{c}_0$ eine vorgegebene Konstante ist. Dann wird durch obige Gleichung im Regelfall \vec{d} bestimmt. Und damit hat man die Lösung in den Bereich $t > t_0$ eindeutig fortgesetzt. D.h. man hat die Lösung gefunden, die durch die Methode der Variation der Konstanten für den Gesamtbereich geliefert wird.

(3.2.5) Wir illustrieren das Verfahren am Beispiel eines getriebenen harmonischen Oszillators. Und zwar arbeiten wir ohne Reduktionstrick im Konfigurationsraum.

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \quad \text{mit} \quad F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{für } t > t_0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}}$$

Das ist ein Einschaltvorgang. Zur Zeit $t=t_0$ wird der konstante äußere Einfluss F_0 eingeschaltet.

(3.2.6) Für $t < 0$ liegt einfach die übliche homogene Gleichung vor, deren Lösung wir beherrschen. Als Beispiel nehmen wir an, dass sich das System in Ruhe befinde. D.h. es liege die Nulllösung vor: $x(t)=0$ für $t < 0$. Insbesondere $x(0-0)=0$. Und ebenso $\dot{x}(0-0)=0$. Natürlich müssen wir alle Komponenten angeben, die im Phasenraumvektor $\vec{y}(t_0 - 0)$ enthalten sind.

(3.2.7) Für $t > 0$ können wir sofort eine spezielle Lösung raten. Nämlich $x_S(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2}$. Daher können wir die allgemeine Lösung auch für $t > 0$ hinschreiben. Wir nehmen an, dass der Schwingungsfall des Oszillators vorliegt. Dann folgt

$$x_{\alpha\beta}(t) = e^{-\rho t} \{ \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \} + \frac{F_0}{\omega_0^2} \quad \text{für } t > 0.$$

(3.2.8) Für den zugehörigen Randwert bei $t=0$ finden wir:

$$x_{\alpha\beta}(0+0) = \alpha + \frac{F_0}{\omega_0^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_{\alpha\beta}(0+0) = -\rho\alpha + \omega\beta \stackrel{!}{=} 0.$$

Das ergibt $\alpha = -\frac{F_0}{\omega_0^2}$ und $\beta = -\frac{\rho F_0}{\omega\omega_0^2}$.

(3.2.10) Damit können wir die gestückelte Lösung für den Gesamtbereich angeben. Nämlich:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{\omega_0^2} - \frac{F_0}{\omega_0^2} e^{-\rho t} \{ \cos \omega t + \frac{\rho}{\omega} \sin \omega t \} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}}$$

(3.2.11) Nochmals zur Verdeutlichung: Dieses Resultat wäre auch über die Integralformel (3.1.5) herausgekommen. Das Ergebnis ist ja eindeutig bestimmt. Nur wäre die zugehörige Rechnung aufwendiger gewesen. Die erhaltene Lösung ist einmal stetig differenzierbar, also C^1 . Erst die zweite Ableitung enthält bei $t=0$ den Sprung der Stärke F_0 , der durch den inhomogenen Term gefordert wird.

Bei der Diskussion des Resultates sollte man die beiden Fälle $\rho > 0$ und $\rho = 0$ auseinanderhalten. Im ersten Fall sind die Oszillationen gedämpft, so daß nach einer gewissen durch $\tau = \frac{\ln 2}{\rho}$ festgelegten Zeit der konstante Term den oszillierenden Beitrag dominiert. Nach einer Einschwingzeit geht die Lösung daher gegen den festen Wert $\frac{F_0}{\omega_0^2}$. Im zweiten Fall $\rho = 0$ bleibt die Oszillation für alle Zeit erhalten und wir beobachten das Verhalten eines verschobenen freien Oszillators.

Merke: Bei einer linearen inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten tritt ein eventueller Sprung der Inhomogenität in der Lösung als Sprung der höchsten Ableitung auf! Die vorangegangenen Ableitungen sind infolge der Stückelungsbedingung stetig.

(3.2.12) Zur Illustration rechnen wir jetzt das obige Beispiel erneut mit der allgemeinen Methode der Variation der Konstanten durch.

(3.2.13) Im Phasenraumformalismus wird für unseren Fall $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \end{pmatrix}$. Machen Sie sich klar, dass und wieso F_0 in der unteren Komponente steht! In der Variationsformel (3.1.5) ist weiterhin $\vec{a} = \vec{0}$ für $t_0 = 0$ zu wählen. Aus unserer Formel für e^{tM} im Oszillatorfall benötigen wir die obere Zeile und finden schließlich für $t > 0$:

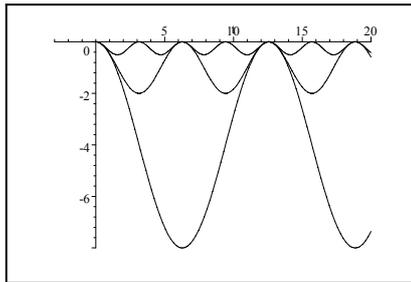
$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t ds e^{-\rho(t-s)} \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} F_0 = -\frac{F_0}{\omega} \int_{-t}^0 du e^{\rho u} \sin(\omega u) \\ &= -\frac{F_0}{\omega} \operatorname{Im} \int_{-t}^0 du e^{(\rho+i\omega)u} = -\frac{F_0}{\omega} \operatorname{Im} \left. \frac{e^{(\rho+i\omega)u}}{\rho+i\omega} \right]_{u=-t}^0 \\ &= \frac{F_0}{\omega} \operatorname{Im} \frac{e^{-(\rho+i\omega)t} - 1}{\rho+i\omega} = \frac{F_0}{\omega} \operatorname{Im} \frac{e^{-\rho t} \cos \omega t - 1 - i e^{-\rho t} \sin \omega t}{\rho^2 + \omega^2} (\rho - i\omega) \\ &= \frac{F_0}{\omega \omega_0^2} \{ \omega - e^{-\rho t} \omega \cos(\omega t) - \rho e^{-\rho t} \sin(\omega t) \} \\ &= \frac{F_0}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\rho t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\rho}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right\} \end{aligned}$$

(3.2.14) Das stimmt mit dem über die Stückelungsmethode gewonnenen Resultat überein. Die Integration ist jedoch aufwendiger als die erste Rechnung. Für $t < 0$ gibt die Formel in unserem Fall wegen $\vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{b} = \vec{0}$ sofort $x(t) = 0$.

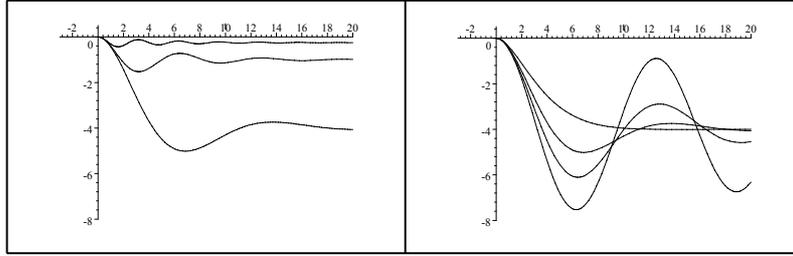
Für kleine t erhält man folgende Entwicklung, die erneut zeigt, daß der Sprung mit der zweiten Ableitung beginnt:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\rho t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\rho}{\omega} \sin(\omega t) \right) &= \left(\frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \right) t^2 + \left(-\frac{1}{3} \rho \omega^2 - \frac{1}{3} \rho^3 \right) t^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 t^2 - \frac{1}{3} \rho \omega_0^2 t^3 + \dots \end{aligned}$$

Wie sehen die Lösungen aus? Zunächst sei $\rho = 0$. Dann hat man den Faktor $(1 - \cos(\omega t))$. Wir wählen $\omega^2 = \omega_0^2 = 4, 1, \frac{1}{4}$ und $F_0 = -1$. Das gibt für die Lösungen folgendes Bild, das zeigt, wie eine Halbierung der Frequenz zu einer Vervierfachung der Amplitude führt, gerade wie vom Faktor $\frac{F_0}{\omega_0^2}$ verlangt. Oder auch: Kleines ω_0^2 bedeutet eine kleine Rückstellkraft, so dass dieselbe Zusatzkraft F_0 eine größere Auslenkung bewirkt.



(3.2.15) Was bewirkt eine Dämpfung? Wir betrachten denselben Ausschnitt, dieselben drei Frequenzen, aber eine zusätzliche Dämpfung $\rho = 0.2$. Im rechten Bild schließlich wählen wir $\omega_0^2 = \frac{1}{4}$ fest und variieren stattdessen ρ mit $\rho = 0.45, 0.2, 0.1$ und 0.02 . Für $\rho = 0.45$ ist man bereits sehr nahe am asymptotischen Grenzfall.



7.3.2a Ein Beispiel aus der Physik: Elektron im Plattenkondensator

(3.2.17) Wir betrachten ein elektrisch geladenes Teilchen, das einen Plattenkondensator durchfliegt. Eine naheliegende Idealisierung dieses Systems besteht darin, die Feldstärke bei Verlassen des Kondensators sprunghaft auf Null fallen zu lassen, wogegen sie im Innern einen konstanten Wert haben soll. Diese Idealisierung läßt sich leicht rechnen und führt auf ein Stückelungsproblem. Zusätzlich nehmen wir eine Konfiguration an, bei der das Elektron nicht gegen eine Kondensatorplatte stößt, sondern wieder austritt.

(3.2.18) Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

\vec{E}_0 : Konstante Feldstärke im Innenbereich.

\vec{v}_E : **E**intrittsgeschwindigkeit zur Zeit t_E am Orte \vec{x}_E .

t_A : Zeitpunkt des **A**ustritts aus dem Kondensatorbereich.

Dann lautet die Bewegungsgleichung (bei Vernachlässigung eventueller Reibung):

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{cases} \vec{F}_0 & \text{für } t_E \leq t \leq t_A \\ \vec{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

(3.2.19) Die Lösung für den Kondensatorbereich können wir sofort hinschreiben. Es liegt ja eine übliche Flugparabel vor:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_0}{m} T^2 + \vec{v}_E T + \vec{r}_E \quad \text{mit der Hilfsgröße } T=t-t_E \quad \text{und } 0 \leq T \leq \Delta = t_A - t_E.$$

(3.2.20) Mit Hilfe der Kondensatorgeometrie könnte man jetzt die Austrittszeit t_A bestimmen. Wir tun das nicht, sondern wechseln einfach die Rolle: t_A sei von jetzt ab Konstante, oder äußerer Parameter, nicht mehr Unbestimmte.

(3.2.21) Im Außenbereich des Kondensators liegt kräftefreie Bewegung vor, für die wir die allgemeine Lösung auch angeben können:

$$\vec{r}_{ws}(t) = \vec{w}T + \vec{s}. \quad (t > t_A)$$

Die beiden freien Parameter \vec{w} und \vec{s} sind über die Stückelungsbedingung festzulegen. Es folgt:

$$\frac{1}{2} \frac{\vec{F}_0}{m} \Delta^2 + \vec{v}_E \Delta + \vec{r}_E = \vec{w} \Delta + \vec{s} \quad \text{und} \quad \frac{\vec{F}_0}{m} \Delta + \vec{v}_E = \vec{w}$$

Also $\vec{w} = \frac{\vec{F}_0}{m} \Delta + \vec{v}_E$ und $\vec{s} = \vec{r}_E - \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_0}{m} \Delta^2$.

(3.2.22) Damit können wir die gestückelte Bahnkurve für alle Zeiten $T=t-t_E > 0$ angeben:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_0}{m} T^2 + \vec{v}_E T + \vec{r}_E & \text{für } 0 \leq T \leq t_A - t_E \quad \text{mit } T=t-t_E \\ \left(\frac{\vec{F}_0}{m} \Delta + \vec{v}_E \right) T + \vec{r}_E - \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_0}{m} \Delta^2 & \text{für } T \geq t_A - t_E. \end{cases}$$

Für $t=t_A$ ist $T=\Delta$. Damit überzeugt man sich sofort, daß die angestückelte Gerade gleich der Tangente in t_E ist. Bei Abschalten der Kraft fliegt das Teilchen tangential weiter.

7.3.4 Die Faustregel

Eine Methode zur Bestimmung einer speziellen Lösung

Wie angekündigt handelt es sich um eine Methode, mit deren Hilfe man die benötigte spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung in vielen wichtigen Fällen sehr effizient über eine Art systematisches Raten erhält. D.h. also: Die Methode wird nicht immer funktionieren. Aber wenn sie funktioniert, was meist sehr rasch zu erkennen ist, liefert sie einem rasch die gesuchte Lösung. Wir beschreiben die Methode in Form eines allgemeinen Schemas. In einfachen Fällen kann man einzelne Punkte ganz oder teilweise überspringen.

- ◆ **Szenenbild:** Sei L linearer Differentialoperator mit $n=1$ (eind. Konfraum.) und mit konstanten reellen Koeffizienten. Gesucht ist eine spezielle Lösung von $L(y)=f$, wobei $F \in C^\infty$ sei.
- ◆ \mathbb{C} Eventuell ist es sinnvoll zu komplexifizieren. D.h. ersetze $L(u)=f$ durch $L(u+iv)=f+ig$ mit geeignetem reellen g . Arbeite mit $L(z)=F$ weiter, wo $F=f+ig$. **Bilde am Ende $u=\text{Re}(F)$.**
- ◆ Ohne Komplexifizierung ist nachfolgend $F=f$.

Jetzt geht man in 4 Schritten vor, die fallspezifisch trivial werden können.

- 1.)** **Bilde** die Ableitungen F, F', F'', \dots .
 Diese erzeugen im Sinne der Vektorrechnung einen Kandidatenraum K_F von Funktionen.
 Bestimme $\dim K_F$ (meist per Inspektion).
 ◆ Ist $\dim K_F = \infty$, ist das Verfahren nicht anwendbar \implies
 ◆ Ist $\dim K_F = k < \infty$ weiter zum 2. Schritt.

Ein beliebtes Beispiel: $\ddot{y}(t) + 2\rho\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = A \cos(\Omega t)$ und A reell. Die Bedingungen des Szenenbildes sind erfüllt. Hier komplexifiziert man mit $F(t) = A(\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)) = Ae^{i\Omega t}$. Dann ist K_F eindimensional, ohne Komplexifizierung dagegen zweidimensional.

Der nächste Schritt:

- 2)** Wähle eine günstige Basis von K_F .
 Etwa F_1, F_2, \dots, F_k . Für $F \in K_F$ hat man eine Darstellung $F = \sum F_i \beta_i$ mit bekannten Koeffizienten β_i .
Lösungsansatz: $z = \sum_{i=1}^k F_i \alpha_i$ mit α_i gesucht (Unbestimmte)

Im Fall unseres Beispiels bildet F_1 mit $F_1(t) = e^{i\Omega t}$ eine naheliegende Basis. (Wie üblich werden bei der Basis überflüssige Faktoren fortgelassen!). **Dann ist $z(t) = \alpha e^{i\Omega t}$ der Lösungsansatz!**

Der nächste Schritt:

- 3)** Den Ansatz in $L(z)=F$ einsetzen und auswerten.
 $L(z) = L(\sum F_i \alpha_i) = \sum L(F_i) \alpha_i = \sum F_i \beta_i$.
 Da L linear aus Ableitungen aufgebaut ist und K_F alle diese Ableitungen enthält, ist $L(F_i) \in K_F$.
 ◆ Sei $L(z) = \sum F_r \gamma_r(\vec{\alpha})$. **Diese Gleichung wird benötigt!**
 Koeffizientenvergleich gibt $\gamma_r(\vec{\alpha}) = \beta_r$ für $r=1, \dots, k$.
Das ist ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die α_i .

Im Beispiel lautet die Bedingungsgleichung $(i^2 \Omega^2 + 2\rho i \Omega + \omega_0^2) \alpha e^{i\Omega t} = A e^{i\Omega t}$. Koeffizientenvergleich ist hier einfach das Herauskürzen des Faktors $e^{i\Omega t} \neq 0$. Nur α ist gesucht. Hätte man nicht komplexifiziert, hätte man als Basis $F_1(t) = \cos \Omega t$ und $F_2(t) = \sin \Omega t$ nehmen können. Der Ansatz wäre $y(t) = \alpha_1 \cos \Omega t + \alpha_2 \sin \Omega t$ gewesen und man hätte für α_1, α_2 ein lineares 2×2 -System erhalten.

□ Bestimmen Sie dieses System.

4) Eine günstige Lösung $\vec{\alpha}_S$ des Systems ist zu bestimmen.
 Es kann vorkommen, dass das System unlösbar ist.
 Dann scheitert das Verfahren. \implies
 Hat man eine Lösung des Systems, dann ist
 $y_s(t) = \sum F_i(t) \alpha_{Si}(t)$ **die gesuchte spezielle Lösung der Differentialgleichung.** Hat man komplexifiziert, ist noch der Realteil zu bilden.

Im Beispiel ist $\alpha = \frac{A}{-\Omega^2 + 2\rho\Omega i + \omega_0^2}$. Also

$$\begin{aligned} z_s(t) &= \frac{Ae^{i\Omega t}}{-\Omega^2 + 2\rho\Omega i + \omega_0^2} = \frac{A(\cos \Omega t + i \sin \Omega t) ((\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\rho\Omega i)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\rho\Omega)^2} \\ &= A \frac{[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\rho\Omega \sin \Omega t] + i [-2\rho\Omega \cos \Omega t + (\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \Omega t]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\rho\Omega)^2}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u_S(t) = A \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\rho\Omega \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\rho\Omega)^2}.$$

Im Schema sind zwei Stellen angegeben, an denen das Verfahren scheitern kann. Zunächst muß K_F endlichdimensional sein. In den folgenden typischen Fällen ist das sicher der Fall

$F_1(t) = \text{Polynom}(t)$	$F_2(t) = \sin \Omega t$	$F_3(t) = \cos \Omega t$	$F_4(t) = e^{at}$
$F_5(t) = te^{at^2}$	$F_6(t) = (at + b) \sin \Omega t$	$F_7(t) = e^{at} \sin \Omega t$	Usw.

Zusätzlich kann die entstehende lineare Gleichung unlösbar sein. Die nächste Frage zeigt hierzu ein Beispiel.

- Was geschieht im oben gerechneten Beispiel für $\rho = 0$ und $\omega_0 = \Omega$? Die Endformel ist offensichtlich unzulässig. Wo geht die Rechnung schief? Ist das im Schema berücksichtigt?
- Wie steht es mit $F(t) = \frac{1}{t}$ oder $F(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$?
- Lösen Sie mit der Faustregel $y'(x) - ay(x) = 1 + 2x + 3x^2$.

7.4 Numerische Lösung einfacher Differentialgleichungen

Wie kann man eine gegebene Differentialgleichung numerisch lösen? Genauer, eine Näherungslösung für ein beschränktes Intervall der unabhängigen Variablen finden?

Wir verwenden die folgende **Idee**: Ist $t \mapsto \vec{Y}(t)$ die gesuchte Lösung, dann soll eine Folge $n \mapsto \vec{Y}_n$ bestimmt werden, derart, dass $\vec{Y}_n \approx \vec{Y}(t_0 + n\Delta t)$ ist. D.h. man sucht Näherungswerte für gleich große diskrete "Zeitschritte" Δt .

Wir illustrieren das Vorgehen am Beispiel eine Differentialgleichung vom Newtonschen Typ:

$$\ddot{x}(t) = F(t, x(t), v(t))$$

oder reduziert
$$\dot{\vec{Y}}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ F(t, x(t), v(t)) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie einer einfachen Substitution folgt:

$$\vec{Y}(t_1 + \Delta t) - \vec{Y}(t_1) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} dt \dot{\vec{Y}}(t) = \int_0^{\Delta t} du \dot{\vec{Y}}(t_1 + u)$$

Diese Gleichung beschreibt, wie sich eine Lösung von t_1 bis zur Stelle $t_1 + \Delta t$ fortsetzt, sofern man ihren Wert für t_1 kennt.

Der Integrand wird jetzt bis zur 1. Ordnung nach Taylor entwickelt und durch die Tangentenapproximation ersetzt! Den Restterm berücksichtigen wir nicht. Das gibt die folgende Näherung:

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t_1 + \Delta t) - \vec{Y}(\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} du \begin{pmatrix} v(t_1 + u) \\ F(t_1 + u, x(t_1 + u), v(t_1 + u)) \end{pmatrix} \\ &\approx \int_0^{\Delta t} du \begin{pmatrix} v(t_1) + \dot{v}(t_1)u \\ F_1 + F_{t_1}u + F_{x_1}\dot{x}(t_1)u + F_{v_1}\dot{v}(t_1)u \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{\Delta t} du \begin{pmatrix} v(t_1) + \dot{v}(t_1)u \\ F_1 + F_{t_1}u + F_{x_1}x_1u + F_{v_1}F_1u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir eine Reihe von Abkürzungen eingeführt und die Forderung $\dot{v}=F$ der Differentialgleichung für den Startwert $t=t_1$ benutzt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x(t_1) & v_1 &= v(t_1) & \dot{v}(t_1) &= F_1 = F(t_1, x_1, v_1) \\ F_{t_1} &= \frac{\partial F}{\partial t}(t_1, x_1, v_1) & F_{x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x}(t_1, x_1, v_1) & F_{v_1} &= \frac{\partial F}{\partial v}(t_1, x_1, v_1) \end{aligned}$$

Die Integration über u läßt sich jetzt ausführen und führt zu

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t_1 + \Delta t) - \vec{Y}(\Delta t) &\approx \int_0^{\Delta t} du \begin{pmatrix} v_1 \\ F_1 \end{pmatrix} + \int_0^{\Delta t} du u \begin{pmatrix} F_1 \\ F_{t_1} + F_{x_1}v_1 + F_{v_1}F_1 \end{pmatrix} \\ &= \Delta t \begin{pmatrix} v_1 \\ F_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ \text{wobei } a_1 &= F_1 \quad \text{und} \quad b_1 = F_{t_1} + F_{x_1}v_1 + F_{v_1}F_1 \quad \text{gesetzt ist.} \end{aligned}$$

Das liefert uns die gewünschte rekursive Beziehung für die Näherungsfolge. Dabei starten wir mit gegebenem $\vec{Y}_0 = \vec{Y}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ und gehen rekursiv wie folgt weiter:

$$\begin{aligned} x(t_0 + n\Delta t) &\approx x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 a_n \\ v(t_0 + n\Delta t) &\approx v_{n+1} = v_n + \Delta t F_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 b_n \\ t_n &= t_0 + n\Delta t & F_n &= F(t_n, x_n, v_n) \\ a_n &= F_n & b_n &= F_{t_n} + F_{x_n}v_n + F_{v_n}F_n \end{aligned}$$

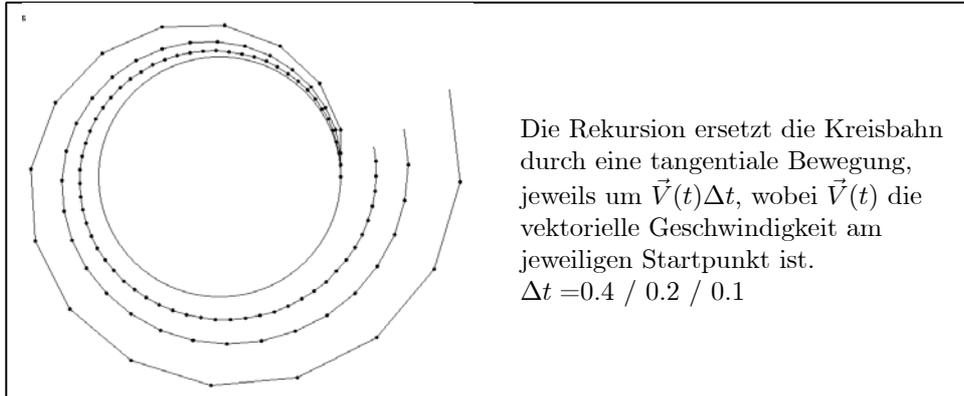
Wir erhalten die vielfach bereits ausreichende Eulerapproximation, wenn wir nur die in Δt linearen Terme mitnehmen. Also:

$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n$
$v_{n+1} = v_n + \Delta t F_n$
$F_n = F(t_n, x_n, v_n)$
$t_{n+1} = t_n + \Delta t$

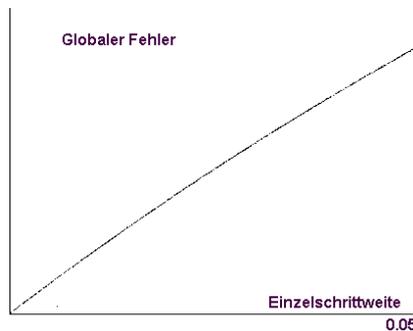
Das ist das einfachste rekursive Schema zu Lösung von Differentialgleichungen.

Geometrisch haben wir folgende Interpretation: Man startet in \vec{Y}_0 , geht dann tangential an die Lösungskurve um Δt von t_0 nach $t_1 = t_0 + \Delta t$ weiter. Dort berechnet man die zugehörige Tangente und geht erneut tangential um Δt weiter usw. Bei der Kreisbewegung zeigt die Tangente immer nach außen, man hat immer einen Fehler in ein und dieselbe Richtung.

Wir testen das an dem Beispiel $F(t,x,v)=-x$. Dann beschreibt die Differentialgleichung eine Kreisbewegung und wir können sehen, welcher Fehler sich abhängig von Δt für einen oder 10 Umläufe ergibt. Nachfolgende Bilder zeigen einen Umlauf für die Schrittweiten $\Delta t = 0.4$, für $\Delta t = 0.2$ und für $\Delta t = 0.1$. Man sieht deutlich, wie der Gesamtfehler mit Verkleinerung der Schrittweite abnimmt, obwohl sich die Zahl der Schritte vergrößert.



Zu erwarten ist, dass für endliches, aber festes T und $t_2 = t_0 + T$ der Näherungswert für $\vec{Y}(t_2)$ gegen den wahren Wert konvergiert, wenn Δt nach Null geht. Das nächste Bild zeigt das für unser Beispiel. Das ist natürlich kein allgemeiner Beweis, liefert aber einen starken Hinweis, was üblicherweise zu erwarten ist. Insbesondere heißt das, dass man auf dem Bildschirm bei ausreichend kleinem Δt keinen Unterschied zwischen der exakten Lösung und der Näherung mehr sieht.



Wie sieht das Resultat aus, wenn wir die Terme mit Δt^2 noch mitnehmen? Wir haben

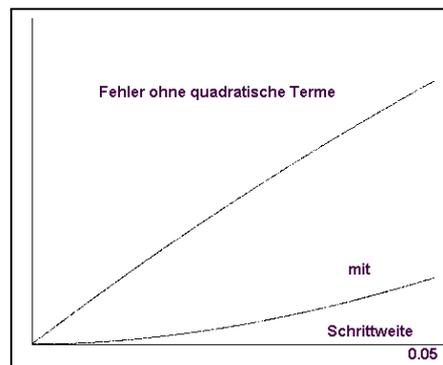
$$F(t, x, v) = -x. \quad \text{Also } F_t = F_v = 0 \text{ und } F_x = -1.$$

Dann geben obige Resultate $a_n = x_n$ und $b_n = -v_n$. Also

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (-x_n)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t (-x_n) + \frac{1}{2} \Delta t^2 (-v_n).$$

Das verbessert den globalen Fehler beträchtlich, wie das nächste Bild zeigt. Es enthält erneut den globalen Fehler (für 5 Umläufe) in geeignetem Maßstab abgetragen gegen den Einzelschrittfehler unterhalb von 0.05.



Grob zeigt sich: Mit der Eulerapproximation geht der globale Fehler linear mit der Einzelschrittlänge nach Null, die nächste Ordnung liefert eine quadratische Nullstelle.

- Formulieren Sie die Rekursion für den gedämpften harmonischen Oszillator.