Kap. 4: **Numerisches Lösen von Differentialgleichungen**

(4.1)Wir behandeln zunächst Differentialgleichungen der folgenden Form:

$$\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t)}$$

etwa die die Absorbtion beschreibende Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{dn}{dt}(t) = \underbrace{-\alpha n(t)}_{F(n(t),t)}}$$

Auf diese Form führt man später alles - insbesondere Newton - zurück.

Eine derartige Differentialgleichung kann entweder exakt "analytisch" oder genähert numerisch gelöst werden. Exakte Lösungen findet man nur in wenigen Fällen. Einige davon sind allerdings besonders wichtig. Wir behandeln hier unter ....zwei derartige Fälle.

(4.2) Nun führen wir eine einfache Methode zur numerischen Lösung ein.

■ Gesucht ist die **Funktion** $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Speziell der zugehörige Funktionswert $\vec{x}(t_1)$

★ Was benötigt man an Vorkenntnissen? Was ist vorzugeben? Zweierlei:

♦ $\vec{x}(t)$ soll die Differentialgleichung $\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t)}$ erfüllen.

♦ Ein Anfangs- oder Informationswert $\boxed{\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0}$.

■ Vorgehen:

★ Wähle eine ausreichend kleine "Schrittweite" Δt.

♦ Berechne die Änderung$\boxed{\Delta\vec{x}}$ von t_0 nach $t_0 + \Delta t$

♦ Addition liefert$\boxed{\vec{x}(t_0 + \Delta t)}$=$\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}$.

★ Jetzt berechne die Änderung $\Delta\vec{x}$ von $(t_0 + \Delta t)$ nach $(t_0 + 2\Delta t)$

♦ Addition liefert$\boxed{\vec{x}(t_0 + 2\Delta t)}$ usw.

(4.3) Aber wie **berechnet** man die jeweilige Änderung $\Delta\vec{x}$?" Mit Hilfe *der Differentialgleichung und der Formel*

$\Delta\vec{x} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\Delta t$	Merkform!

Diese Formel läßt sich auf zwei Weisen zu interpretieren.

Exakt	Genähert
$\Delta\vec{x} = \underbrace{\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right)_{Mittel}}_{\text{Mittlere ÄRate}} \cdot\Delta t$	$\Delta\vec{x} = \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\text{Mom. ÄRate}}(t_0)\cdot\ \Delta t$
Die mittlere Rate benötigt $\vec{x}(t_0)$ und $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$	Die mom. ÄRate benötigt nur $\vec{x}(t_0)$

(4.4) Die exakte mittlere Rate können wir nicht verwenden! Denn um sie zu berechnen, benötigt man $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$, also den gesuchten neuen Wert. Aber die genäherte momentane Rate erhalten wir mit der Differentialgleichung:

$\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right)_{Mittel} = \frac{\vec{x}(t_0+\Delta t)-\vec{x}(t_0)}{\Delta t}$	$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \vec{F}(\vec{x}_0(t_0), t_0)$

Die rechte Seite der zweiten Gleichung können wir mit den bereits bekannten Größen berechnen, den neuen Wert $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$ benötigen wir nicht! D.h., wir haben die momentane Rate und damit $\Delta\vec{x}$ genähert.

Jetzt kann man das beschriebene rekursive Schema vom Computer ausführen lassen und gelangt nach ausreichend vielen Wiederholungen zum gesuchten Punkt t_1 und $\vec{x}(t_1)$.

(4.5) **Einwand:** Aber der erhaltene Wert für die Änderung ist doch nur angenähert richtig, ist nicht exakt. **Darf ich solche Fehler machen**?

Das ist ein Problem. Aber es zeigt sich:

- Gebe eine Schrittweite Δt vor. Man möchte von t_0 nach festem t_1. Welchen **Gesamtfehler** macht man dann durch die Näherung ?
- Man benötigt etwa $N=\frac{t_1-t_0}{\Delta t}$ Schritte der beschriebenen Art.
- Bei jedem Einzelschritt macht man einen Fehler der typischerweise proportional zu Δt^2 ist.
- Dann erhält man nach N Schritten einen - den gesuchten! - Gesamtfehler proportional zu

$$N \cdot \Delta t^2 = \frac{t_1 - t_0}{\Delta t}\Delta t^2 = (t_1 - t_0)\Delta t$$

- Hält man also $t_1 - t_0$ fest und wählt die Schrittweite Δt ausreichend klein, dann sollte man auch den Gesamtfehler beliebig klein machen können.

Das genauer zu beweisen ist Aufgabe der Mathematik. Unten werden wir dieses Verhalten an einer Reihe von Beispielen (Computersimulationen) verdeutlichen und aufzeigen!

(4.6) Nochmals die Herleitung unserer zu nutzenden Hauptformel

$\vec{x}(t+\Delta t)=\vec{x}(t)+(\vec{x}(t+\Delta t)-\vec{x}(t))$	Gültige Ausgangsgleichung
$=\vec{x}(t)+\frac{(\vec{x}(t+\Delta t)-\vec{x}(t))}{\Delta t}\Delta t$	Gültige Umformung dür $\Delta t \neq 0$
$=\vec{x}(t)+\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}\Delta t$	Bezeichnung
$\approx \vec{x}(t)+\frac{d\vec{x}}{dt}(t)\Delta t$	Die Näherung!

Jetzt möchten wir vom Anfangswert $(t_0, \vec{x}_0)$ näherungsweise zum gesuchten $\vec{x}(t_1)$ gelangen!

Das ist der Weg von der Differentialgleichung zur Lösung:

1. Man startet mit einem *Anfangswert* (Informationswert) $\boxed{\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0}$ und der Differentialgleichung $\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t)}$ und einer Schrittweite Δt.

   Also:

   ★Gegeben $\vec{x}(t_0)$ und t_0

   ▼Über die Differentialgleichung bestimmt man die momentane Änderungsrate $\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, t_0)$.

   ▼Über unsere Formel kann man jetzt näherungsweise $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$ ausrechnen!

   Die neue jetzt vorliegende Situation sieht wie folgt aus:

★Gegeben $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$ und $t_0 + \Delta t$

▼Über die Differentialgleichung bestimmt man die momentane Änderungsrate $\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0 + \Delta t)$ also zum neuen t-Wert!

▼Über die Formel kann man näherungsweise $\boxed{\vec{x}(t_0 + 2\Delta t)}$ ausrechnen!

Usw. $\boxed{\text{Bis hin nach } \vec{x}(t_0 + N\Delta t) = \vec{x}(t_1)}$

(4.7) Schematisch wird man das über ein Rechenschema der folgenden Art realisieren

Zeit	t_0	$t_0 + \Delta t$	$t_0 + 2\Delta t$	$t_0 + 3\Delta t$
Größe	$\vec{x}_0$			
Dgl gibt Rate	$\vec{F}(\vec{x}_0, t_0)$..			
$\Delta\vec{x} \approx$ ..	$\vec{F}(\vec{x}_0, t_0)\Delta t$			
$\vec{x}(t+\Delta t) \approx$ ...	$\approx \vec{x}_0 + \Delta\vec{x}$			

Man startet bei t_0, füllt die erste Spalte aus, mit dem Ergebnis der untersten Zeile geht man in die nächste Spalte, kann diese wieder von oben nach unten auffüllen usw.

□ Beispiel: Für die Größe n=n(t) gelte die Differentialgleichung $\boxed{\frac{dn}{dt}(t) = \frac{1}{2}n(t)}$. Überdies wisse man den Startwert n(0)=2. Berechne n(2) näherungsweise einmal mit 2 und einmal mit 4 Zwischenschritten. D.h. für $\Delta t = 1$ und $\Delta t = \frac{1}{2}$. Das ist sicher eine schlechte Näherung, da Δt "klein" sein sollte, vielleicht $\Delta t = 0.001$. Hier soll nur zuerst das Schema verstanden werden.

▼

Zeit $\boxed{\Delta t = 1}$	$t_0 = 0,$	$t_0 + \Delta t$	$t_0 + 2\Delta t$	$t_0 + 3\Delta t$
Größe	$n(0) = 2$	$n_{Näh}(1) \approx 3$	$\boxed{n_{Näh}(2) \approx \frac{9}{2}}$	$n_{Näh}(3) = \frac{27}{4} = 6.75$
Dgl gibt Rate F(n(t),t)=$\frac{1}{2}n(t)$	F(2,0)=1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	
$\Delta\vec{x} \approx$ ..	$1 \cdot 1$	$\frac{3}{2} \cdot 1$	$\frac{9}{4}$	
$\vec{x}(t+\Delta t) \approx$ ...	$\approx 2 + 1 = 3$	$3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$	$\frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$	

Zeit $\boxed{\Delta t = \frac{1}{2}}$	$t_0 = 0,$	$t_0 + \Delta t$	$t_0 + 2\Delta t$	$t_0 + 3\Delta t$	$t_0 + 4\Delta t = 2$
Größe	$n(0) = 2$	$n(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{125}{32}$	$\boxed{n_{Näh}(2) \approx \frac{625}{128} \approx 4.9}$
Dgl gibt Rate F(n(t),t)=$\frac{1}{2}n(t)$	F(2,0)=1	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{125}{64}$	
$\Delta\vec{x} \approx$ ..	$1 \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{125}{128}$	
$\vec{x}(t+\Delta t) \approx$ ...	$\approx 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} + \frac{5}{8} = \frac{25}{8}$	$\frac{25}{8} + \frac{25}{32} =$	$\frac{125}{32} + \frac{125}{128} =$	

(4.8) Wie steht es mit dem Fehler, den man im Beispiel macht? Wie oben angedeutet müssen wir zwei Fehler unterscheiden: Den **Einzelschrittfehler**, der wie folgt definiert ist:

$$\vec{F}_{\text{Einzel}}(t, \Delta t) = \vec{x}_{exakt}(t + \Delta t) - \vec{x}_{App}(t + \Delta t)$$

$\vec{x}_{exakt}$ sei die exakte in bei(t,$\vec{x}(t)$) startende Lösung und $\vec{x}_{App}(t) = \vec{x}(t) + \vec{F}(\vec{x}_0, t)\Delta t$ die zugehörige Näherungslösung.

Und den **Gesamtfehler**, der sich nach N Schritten zwischen t_0 und t_1 ergibt:

$$\vec{F}_{Gesamt}(t_0 \text{ nach } t_1, \Delta t) = \vec{x}_{exakt}(t_0 + N\Delta t) - \vec{x}_{Näherung}(t_0 + \Delta t)$$

Nun gilt folgendes:

> Der Einzelfehler erweist sich typischerweise als proportional zu Δt^2. Oder $\vec{F}_{\text{Einzel}} \approx C\Delta t^2$. Da es N Zwischenschritte der Größe Δt gibt mit N$\Delta t = t_1 - t_0$, also N=$\frac{t_1 - t_0}{\Delta t}$ ist der Gesamtfehler etwa $\boxed{\vec{F}_{Gesamt} \approx N \cdot \vec{F}_{\text{Einzel}} \approx \frac{t_1 - t_0}{\Delta t} \cdot C\Delta t^2 = C(t_1 - t_0)\Delta t}$. D.h. der Gesamtfehler sollte noch mit Δt nach Null gehen.

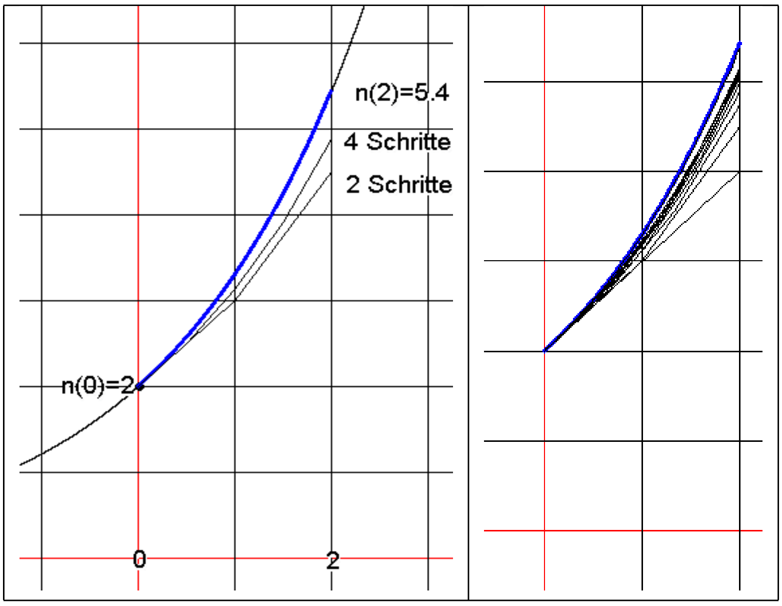
(4.9) Rechnungen auf dem Computer und genauere mathematische Abschätzungen bestätigen ds und rechtfertigen das beschriebene Vorgehen, **sofern man Δt nur ausreichend klein macht**!

(4.10) Die Lösung der oben gegebenen Differentialgleichung $\frac{dn}{dt}(t) = \frac{1}{2}n(t)$ mit n(0)=2 kann man leicht raten. Es ist $\boxed{n(t) = 2e^{\frac{1}{2}t}\ .}$ Das gibt $n(2) = 2e \approx 5.4$.Bei der ersten Näherung fanden wir $n_{Näherung}(2) = 4.5$. Also $\vec{F}_{Gesamt}(0 \text{ nach } 2, \frac{1}{2}) = 5.4 - 4.5 = 0.9$. Das ist ein noch recht großer Fehler. Für $\Delta t = 0.5$ erwarten wir einen halb so großen Gesamtfehler. Obige Rechnung gibt $\vec{F}_{Gesamt}(0 \text{ nach } 2, \frac{1}{2}) \approx 5.4 - 4.9 = 0.5$. Das ist tatsächlich etwa die Hälfte!

(4.11) **Eine geometrische Interpretation unserer Näherung:**

Anstatt auf der wahren Lösungskurve von t nach t+Δt weiterzugehen legt man an t die Tangente an die Kurve und geht auf dieser um Δt weiter!

Liegt eindimensionales x(t) vor, also eine gewwöhnliche Funktion, dann tragen wir hotizontal t und vertikal x auf. Die ersten beiden Bilder zeigen unser oben gerechnetes Beispiel. Blau die exakte Lösung im Bereich 0$\leq t \leq 2$. Im ersten Bild sind die beiden oben gerechneten näherungslösungen gezeichnet wobei die Zwischenwerte zwischen t und t+Δt jeweils geradlinig verbunden sind. Die oben gerechneten Zahlwerte stimmen mit der Figur überein.



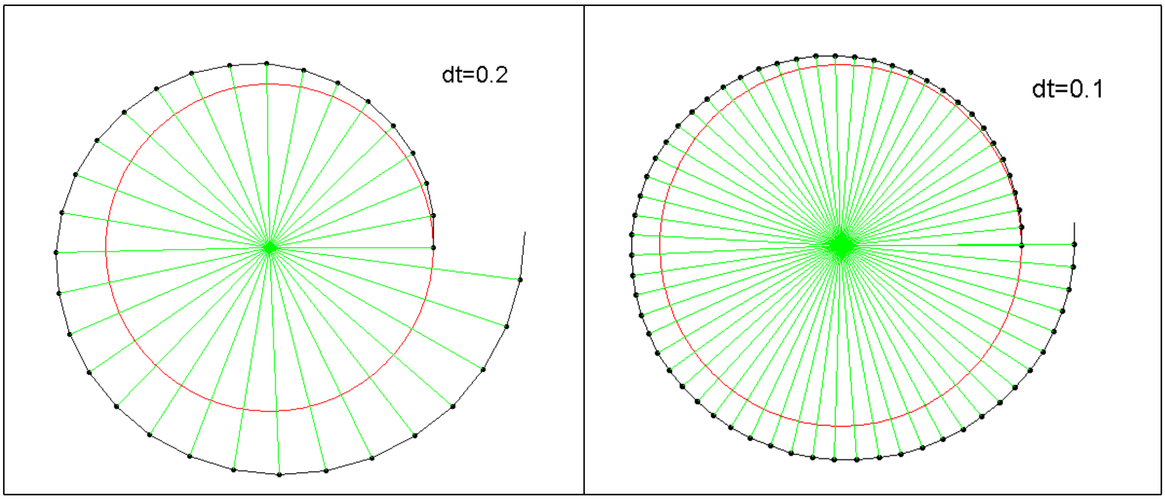
Im rechten Bild sind die Näüherungen für N=1,2,....,9 Schritte eingezeicnet. Und für N=50 Schritte. Für N=60 stimmen exakte Lösung und Näherung im Rahmen der Zeichzengenauigkeit bereits überein.

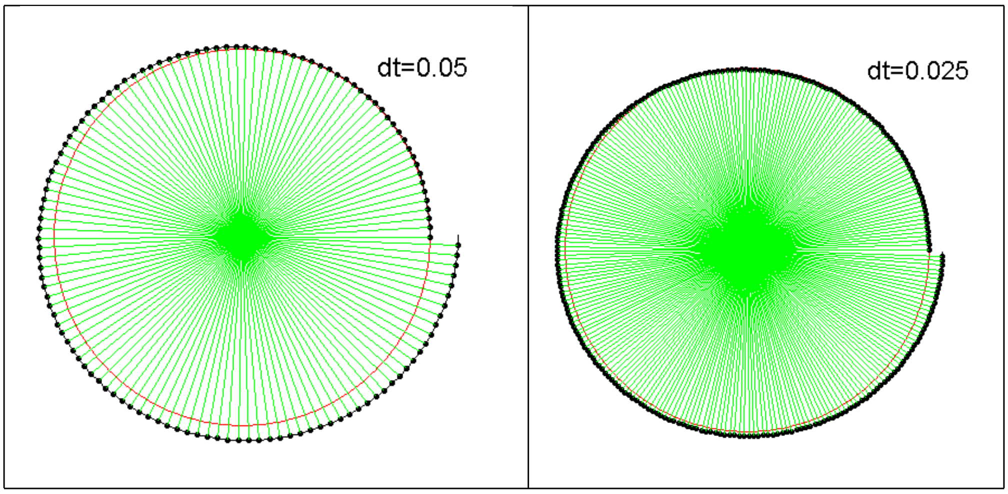
(4.12) Es folgen 4 Bilder zu einer Differentialgleichung, deren Lösungen Ursprungskreise in der Ebene sind Man geht jeweils ein Stück tangential weiter.

Die Tangente zeigt hier immer nach außen. D.h. die Fehler addieren sich, der Gesamtfehler wird besonders groß. Gesucht ist die Lösung für einen Umlauf.

Von Bild zu Bild wird Δt halbiert. Man sieht, dass sich der Gesamtfehler für eine Kreisumrundung auch in etwa halbiert! Rot die exakte Lösung, der Kreis. Grün die Näherungslösungen $\vec{x}(t + n\Delta t)$ und als schwarzer Punkt der ja gesuchte Endpunkt dieser Ortsvektoren. Man sieht deutlich die zunehmende Verkleinerung des Gesamtfehlers mit Δt.

Hier ist $\vec{x}$ zweidimensional. In den Bildern ist daher keine t-Achse mevorhanden. Der Abstandsvektor zweier benachbarter (schwarzer) Endpunkte ist $\Delta\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)\Delta t$.





(4.13) Ein Computerprogramm, das die Differentialgleichung nach dem beschriebenen Schema berechnet und den Graphen der Lösung zeichnet, sieht wie folgt

```
x=x0
t=t0
dt=dt0
Do
 dx=F(x0,t0)·dt
 drawp(t,x)
 x=x+dt
 t=t+dt
 exit if t>t1
loop
```

Die einzelnen Schritte des Programms sollten selbsterklärend sein! Gezeichnet wird der Graph der Lösungskurve zum Anfangswert $\mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = x_0$ von t_0 bis t_1.

(4.14) **Differentialgleichungen zweiter Ordnung**

Die Newtonsche Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Entsteht die wirkende Kraft über ein Feld, dann lautet sie beispielsweise

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), t)$$

D.h. wir können offenbar nicht die erste, sondern nur die zweite Änderungsrate (die Beschleunigung) bestimmen!

Es zeigt sich, dass das nicht weiter problematisch ist. Mit einem einfachen Trick führt man die neue auf die alte Situation zurück:

> Die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)$ ist die **erste** Änderungsrate der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit ist die **erste** Änderungsrate der gesuchten Bahnkurve! In Formeln kann man das so ausdrücken
>
> | | |
> |---|---|
> | $m\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = F(\vec{r}(t), t)$ | Newton |
> | $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{v}$ | Definition mom. Geschw. |
>
> Auf die so geschriebenen beiden Gleichungen können wir problemlos unser altes Schema anwenden. Nur ein Punkt ist zu beachten: **Was benötigen wir als Startinformation für den Prozess?** t_0 mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ reicht nicht mehr. Jetzt brauchen wir auch noch $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$! Das sind die üblichen auch physikalisch erwarteten Anfangswerte! Nur die Vektordimension der Lösungskurve verdoppelt sich dabei.

(4.15) □ Testaufgabe:

Das folgende Bild gehört zu der Differentialgleichung

$$\frac{d\vec{x}^K}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \vec{F}^K(x(t), y(t))$$

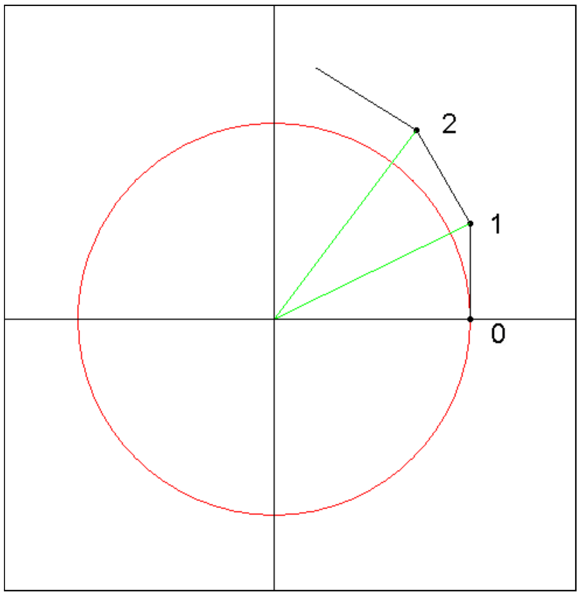
Dabei ist $\vec{x}(t)$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene und t ist als Winkel zwischen der 1-Achse und diesem Ortsvektor zu interpretieren.

Die Lösungen dieser Differtialgleichung sind parametrisierte Ursprungskreise. D.h. wir haben es mit dem Besipielproblem zur Fehlerdiskussion zu tun.

In der folgenden Figur ist der Anfangswert $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gewählt. Die zugehörige exakte Lösung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1\cos t \\ 1\sin t \end{pmatrix}$$

Dazu das folgende Bild



Zeichnen Sie $\vec{x}(0)$ ein. Es wurde $\Delta t = 0.5$ gewählt. Die zugehörige (noch schlechte) Näherung an $\vec{x}$ soll mit $\vec{r}$ bezeichnet werden. In der Figur finden sind $\vec{r}(0+\Delta t), \vec{r}(0+2\Delta t)$ und $\vec{r}(0+3\Delta t)$ zu finden. Bezeichnen Sie dies Vektoren. Zeichnen Sie auch Δt ein.

Und jetzt berechnen Sie $\vec{r}(0+k\Delta t)$ für k=1,2,3 nach dem Schema. Überzeugen Sie sich, dass die eingezeichneten Vektoren heruakommen.

(4.16) □ **Rechenbeispiel für eine Bewegungsgleichung**, also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\boxed{\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}(t) = -k\vec{x}(t)}$$

♦Wir arbeiten in der Ebene, also $\vec{x}^K(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Um Indizes zu sparen, setzen wir $\vec{v}^K(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$. Dann lautet die Differntialgleichung in der neuen Form (mit nur ersten Änderungen):

$$\frac{d\vec{v}^K}{dt}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{dv}{dt}(t) \\ \frac{dw}{dt}(t) \end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}} = -k\vec{x}^K(t) \qquad \text{Änderung der Geschwindigkeit}$$

$$\frac{d\vec{x}^K}{dt}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}} = \vec{v}^k(t) \qquad \text{Änderung des Ortsvektors}$$

Eingerahmt die zum Rechnen relevante Form der Differentialgleichung.

♦ Die Anfangswerte seien: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Schrittweite $\Delta t = 0.1$

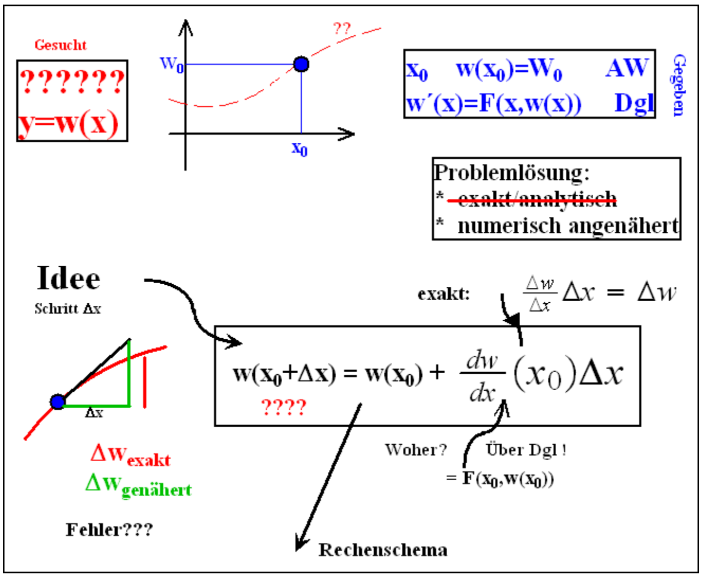
♦ Erster Schritt:

$$\begin{aligned} \vec{x}(0.1) &= \vec{x}(0) + \Delta\vec{x} = \vec{x}_0 + \underbrace{\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}}_{\vec{v}}\Delta t \\ &\approx \vec{x}_0 + \vec{v}(0)\Delta t \\ \vec{x}^K(0.1) &= \begin{pmatrix} x_0 + v_0\Delta t \\ y_0 + w_0\Delta t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(0.1) &= \vec{v}(0) + \Delta\vec{v} = \vec{v}(0) + \underbrace{\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}_{\vec{F}}\Delta t \\
&\approx \vec{v}(0) - k\vec{x}(0) \\
\vec{v}^K(0.1) &= \begin{pmatrix} v_0 - kx_0\Delta t \\ w_0 + ky_0\Delta t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

usw. Berechnen sie den nächsten Schritt.

(4.17) ☐ Haben Sie die Methode, die dahinter stehende Idee verstanden? Stellen Sie sich vor, Sie sollten in einem 5-10-minütigem Vortrag erklären, wie man eine Differentialgleichung numerisch näherungsweise lösen kann. Sie dürfen dazu einige Stichworte und Formeln an einer Tafel notieren, die Sie dann im Rahmen des Vortrages erläutern. Sagen wir, das Tafelbild sehe wie folgt aus:



Es folgen **zwei Beispiele wichtiger Differentialgleichungen**, für die man die allgemeine Lösung angeben kann! Für beide Systeme sollte man die nachfolgenden Gleichungen verstehhen und auswendig wissen!

(4.18) Die **Differentialgleichung** für den radioaktiven Zerfall (bzw. Absorbtion bzw. einfaches Bevölkerungswachstum) lautet:

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\alpha x(t) \qquad \text{Gesucht ist die Größe x=x(t)}$$

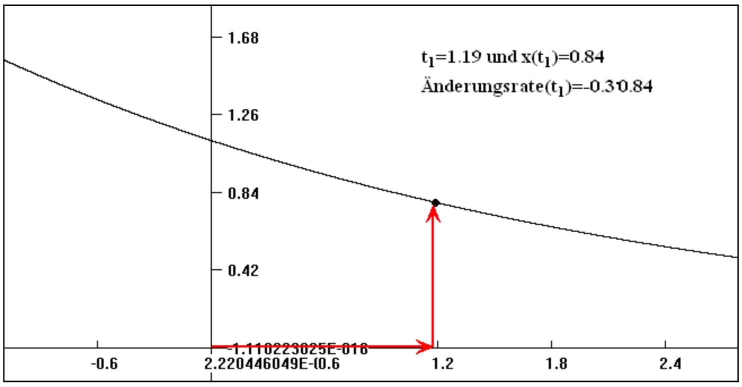
"**Anfangswerte**": Der Informationspunkt sei t=t_1 und man wisse $n(t_1) = N_1$. Gesucht ist meist die Lösung der Gleichung, die diese Bedingung $x(t_1) = N_1$ erfüllt.

Die Formel für diese Lösung lautet:

$$\boxed{x(t)=N_1 e^{-\alpha(t-t_1)}}$$

(α entstammt der Differentialgleichung; t_1 und N_1 sind der Aufgabensituation zu entnehmen. Die Anfangsbedingung ist offensichtlich erfüllt. t-t_1 ist die zeitliche Abweichung vom Informationszeitpunkt!)

Ein Bild zur Differentialgleichung $\vec{x}(t) = -0.3 \cdot x(t)$,also für $\alpha = 0.3$:



Die zugehörige eingezeichnete Lösungskurve ist (ohne Rechnung, nur einsetzen):

$$\boxed{x_s(t)=0.84e^{-0.3(t-1.19)}}$$

Beispielsweise gilt $\boxed{x_s(0) = 0.84e^{0.3 \cdot 1.19} = 1.2}$ wie das Bild bestätigt.

Mit Hilfe der Ableitungsregeln bestätigt man sofort, dass die angegebene Funktion unser Problem tatsächlich löst.

(4.19) Die **Gleichung für den allgemeinen (gedämpften) Oszillator**.

$$\boxed{\ddot{x}(t)+2\rho\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0}$$

Die "Anfangswerte" sind jetzt der Informationszeitpunkt t_1 und die zugehörigen Werte $x(t_1) = x_1$ (Wert) und $v(t_1) = \dot{x}(t_1) = v_1$ (2. momenntane Änderungsrate von x).

die Newtonsche Form: (Koordinaten, also auf Vorzeichen achten)

$$\ddot{x}(t) = \underbrace{-\omega_0^2 x(t)}_{\frac{1}{m}\cdot Rückstellkraft} \underbrace{-2\rho\dot{x}(t)}_{\frac{1}{m}\cdot\text{Reibungskraft}}$$

Das zugehörige System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= v(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) &= -\omega_0^2 x(t) - 2\rho v(t) \end{aligned}$$

Bei der Lösung hat man drei Fälle zu unterscheiden. Wir betrachten nur den "Schwingungsfall", der auftritt, wenn $\omega_0 > \rho$ gilt.

Dann lautet die Lösungsformel

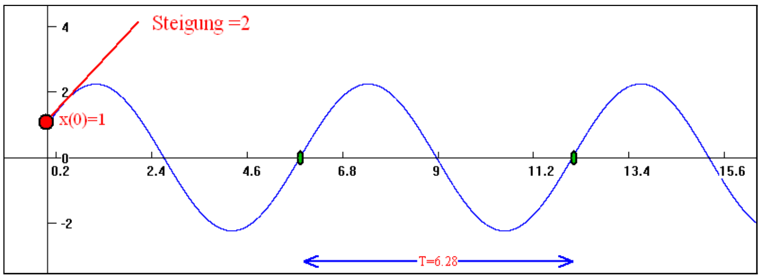
$$\boxed{x_{AB}(t)=e^{-\rho(t-t_1)}\left[A\cos(\omega(t-t_1)) + B\sin(\omega(t-t_1))\right]}$$

$$Mit \quad \boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}}$$

A und B und t_1 sind freie Parameter (jede Wahl davon liefert ein Lösung). Mit dieser form kann man die Anfangswertaufgaben leicht lösen!

Ein Bild dazu: $\rho = 0$ (ungedämpft) und $\omega = \omega_0 = 1$. Als Anfangswerte hat man x(0)=1 und v(0)=2. Also $t_1 = 0$.

Wegen $2\pi = \omega T$ folgt $T=\frac{2\pi}{\omega} \approx 6.28$.



Die beiden grün markierten Nullstellen liegen etwa bei 5.7 und bei 12, haben also den berechneten Abstan $T=2\pi \approx 6.3$.

Beispiele für die numerische Lösungsmethode:
(4.20) Was wird man den Computer auftragen lassen?

Im eindimensionalen Fall ($\vec{x} = x$ eindimensional) wird man in der Regel den Funktionsgraphen x=x(t) auftragen. In unseren beiden Beispielen mit analytischer Lösung kann man das tun und erhält bei ausreichend kleinem Δt Bilder, bei denen exakte und analytische Lösung im gewählten Bildschirmbereich völlig übereinstimmen. Auf Beispielbilder verzichten wir. hier.

Im zweidimensinalen Fall kann man (wie in obigem Kreisbeispiel) die Bahn des Punktes, die sog. Trajektorie zeichnen. Mathematisch ist das das Bild der Bahnkurve. Die Figur zeigt dann die Punkte, die von der Lösung durchlaufen werden, sie zeigt abrt nicht die zugehörigen t-Werte an.

Bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung für eindimensionales x kann man die beiden Funktionen x=x(t) und v=v(t) zeichnen. Dabei ist der jeweilige v-Wert gleich der Steigung der x-Kurve zu demselben t-Wert. Oder man trägt die Bahn im v-x-Raum auf. Das nennt man Phasenraumkurve! (Unsere Wahl ist: v horizontal, x vertikal!)

Allgemein kann man natürlich immer alle Komponentenfunktionen einzeln aufzeichnen. Das ist aber keineswegs immer sinnvoll. Etwa wenn mehrere Massenpunkte sich wechselseitig anziehen und bewegen.

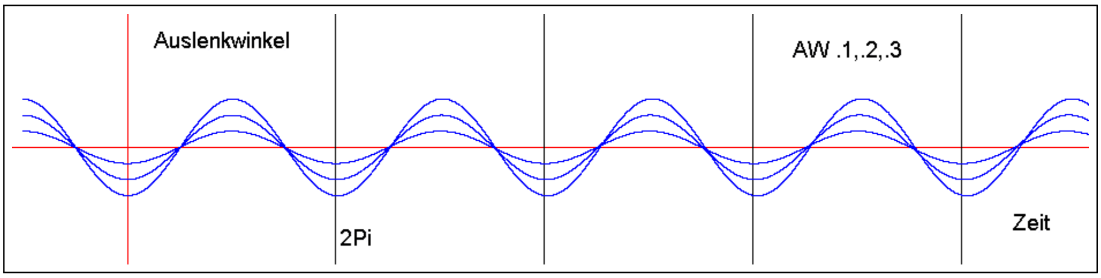
In den Beispielsystemen zu diesem Kurs sind eine Reihe von Differentialgleichungen hergeleitet, bei denen nur numerische Lösungen in Frage kommen.

(4.21) Das ebene Pendel für große Ausschläge.

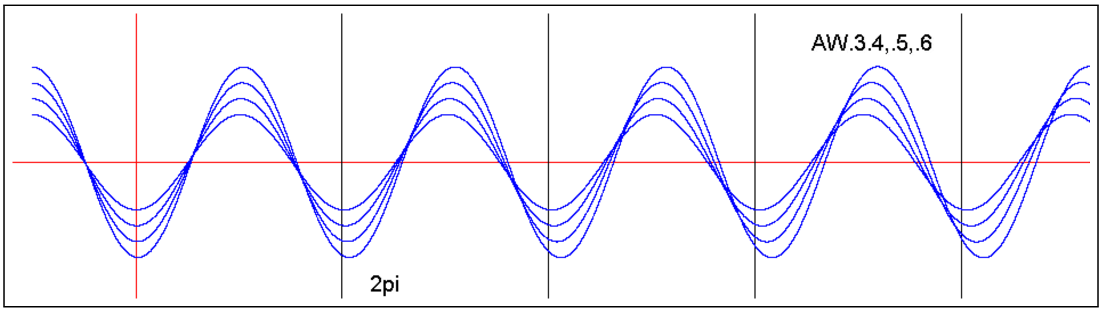
Die im Anhang über das Pendel besprochnene exakte Differentialgleichung für den Auschlagswinkel des ebenen Pendels $\boxed{: \ddot{x}(t) = -\sin(x(t)).}$ kann man nicht analytisch lösen. Für kleine Amplituden ergeben sich harmonische Schwingungen des Typs sin(t) mit der **Schwingungsdauer** $T=2\pi$. In nachfolgenden Bildern ist daher immer 2π als Einheit der t-Achse gewählt. Als Anfangswert wählen wir den maximalen Ausschlagswinkel x_0 mit zugehöriger Winkelgeschwindigkeit $v_0 = 0$. D.h. das Pendel wird mit dem Startausschlag x_0 einfach losgelassen.

In den nachfolgenden Bildern wird x_0 immer zunehmend vergrößert bis zum Wert $+\pi$, d.h. dem senkrecht nach oben zeigendem Pendel. Der Startzeitpunkt (der Figuren) ist $t_0 = -\pi$.

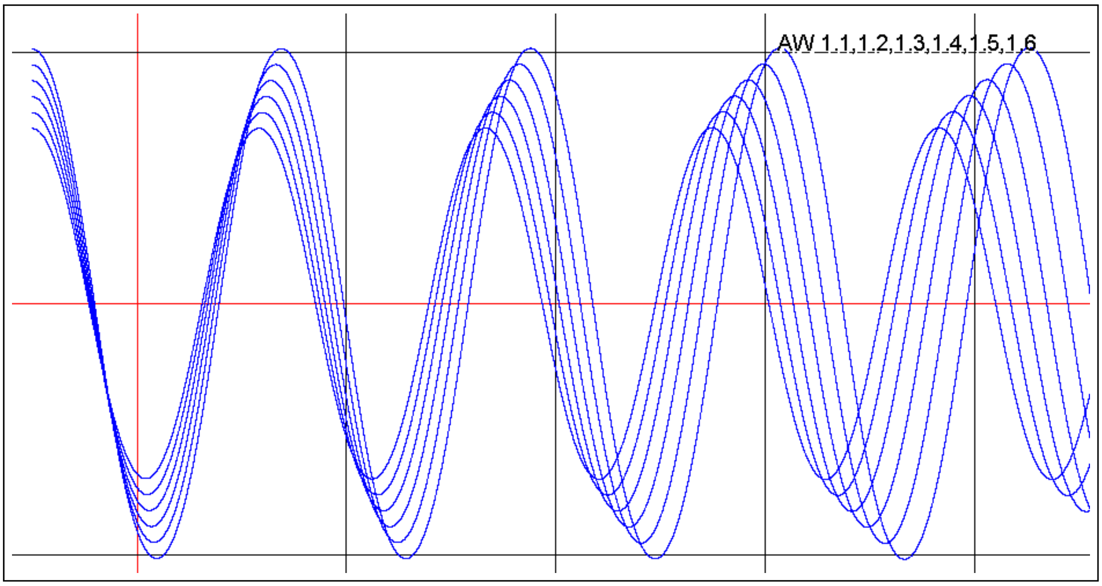
Zunächst drei kleine Startwerte x_0 =0.1, 0.2 und 0.3. Hier ist auch nach drei Schwingungen kaum eine Abweichung von der harmonischen Näherung zu erkennen.



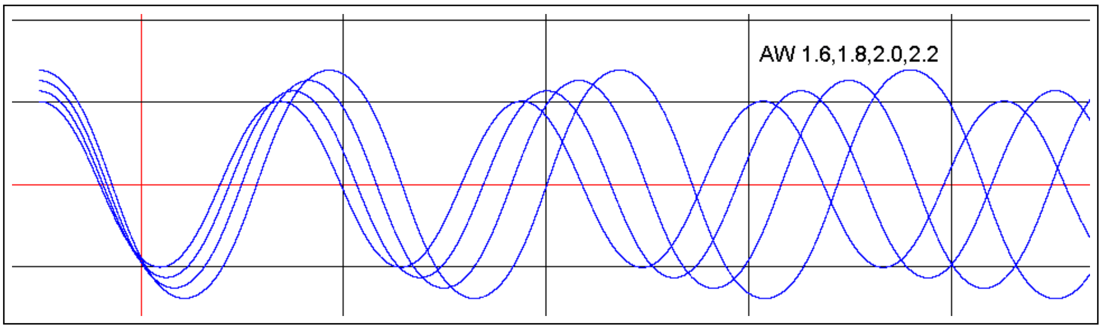
Jetzt etwas größere Auslenkungen zwischen 0.3 und 0.6. Die Schwingungsdauer vergrößert sich. Die Kurven sind nicht mehr sinusförmig.



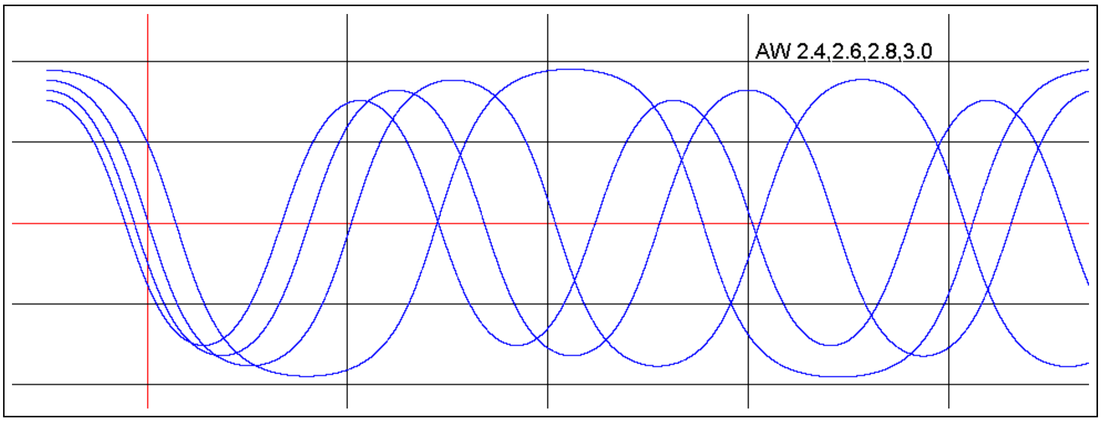
Noch größere Auslenkungen im Bereich von $x_0 = 1$ bis $x_0 = 1.6$. Also von 45^0 bis 90^0.



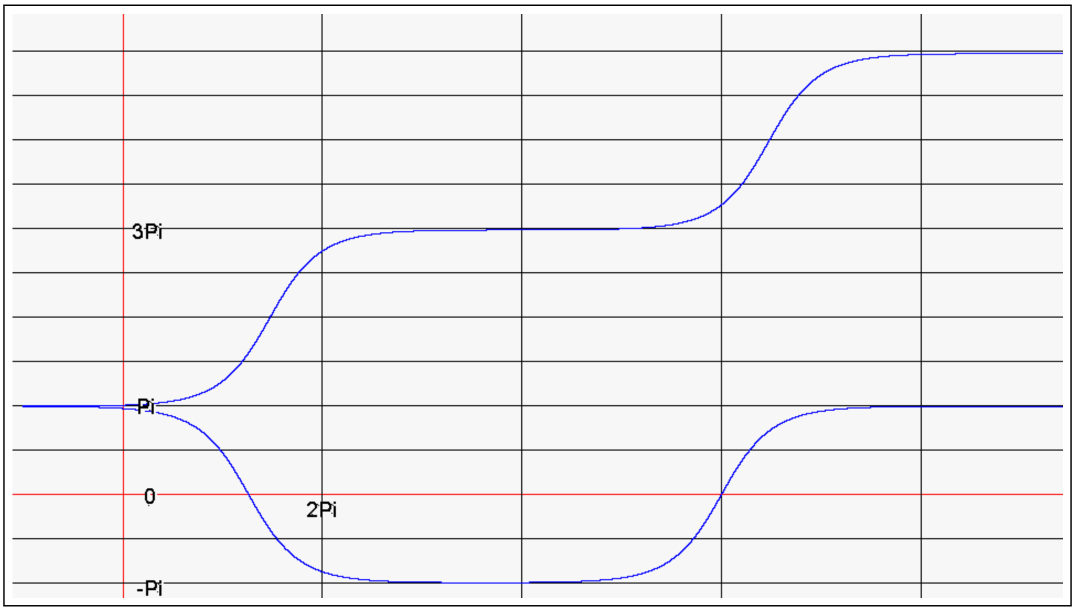
In den nächsten Bildern ist der Maßstab der vertikalen Achse gestaucht. Die erste schwarze Linie gehört zum Wert $\frac{\pi}{2}$.



Für $x_0 = 3$, also einer Auslenkung nahe π beginnt sich die Schwingungsdauer zunehmend zu vergrößern. Un zwar wird die Aufenthaltsdauer in der Nähe von $\pm\pi$ groß.



Abschließend noch einige Bilder zum Startwert $x_0 = \pi$. Einmal leicht unterhalb diese Wertes und einmal mit einer sehr kleinen Anfangsgeschwindigkeit, die bewirkt, dass der Wert π überwunden wird.

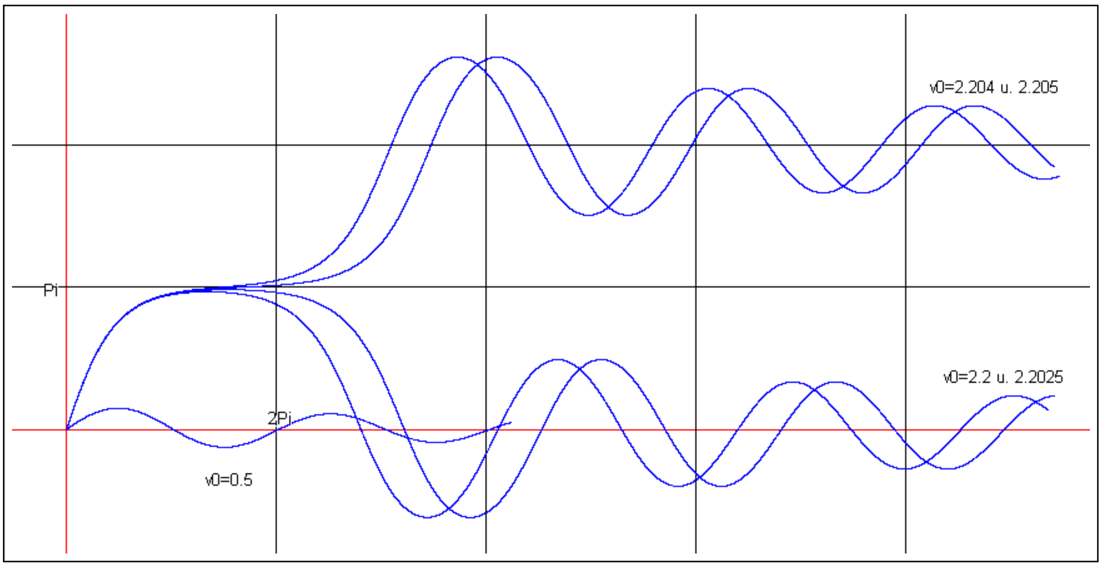


Das eben Pendel mit Reibung

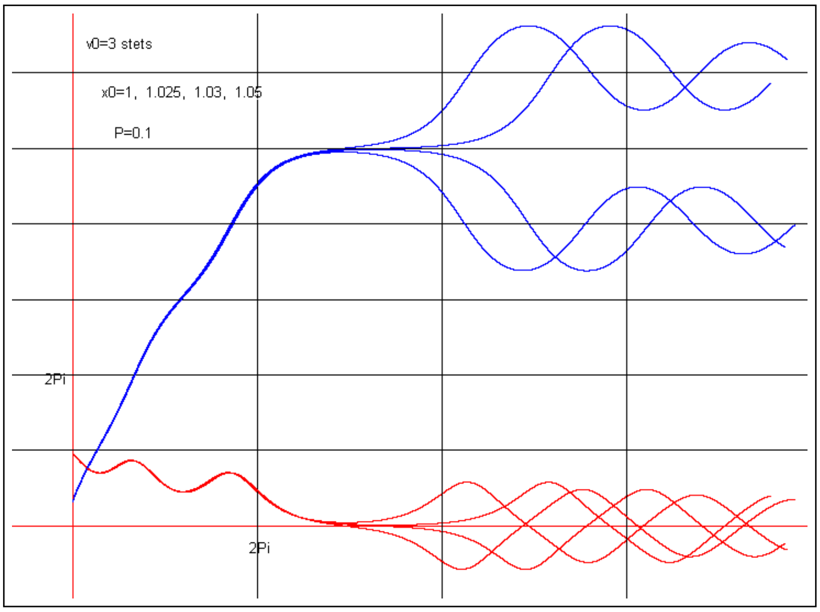
Wir verallgemeinern die Differentialgleichung wie folgt: $\boxed{\ddot{\alpha}(t) + \sin\alpha(t) + P\dot{\alpha}(t) = 0}$. Die Reibungskraft übernehmen wir vom harmonischen Oszillator.

Im folgenden Bild ist P=0.1 gewählt. Anfangswert ist $\alpha(0) = 0$ und $\dot{\alpha}(0) = v_0$ mit verschiedenen Werten von v_0.

Horizontal ist die Zeit t aufgetragen mit Gitterbreite 2π. Das ist die Periode ungedämpfter kleiner Ausschläge. Verikal aufgetragen ist der Auschlagswinkel α mit Gitterbreite π. Denn $\alpha = \pi$ bedeutet, dass der Massenpunkt sich genau oberhalb des Ruhepunktes befindet!

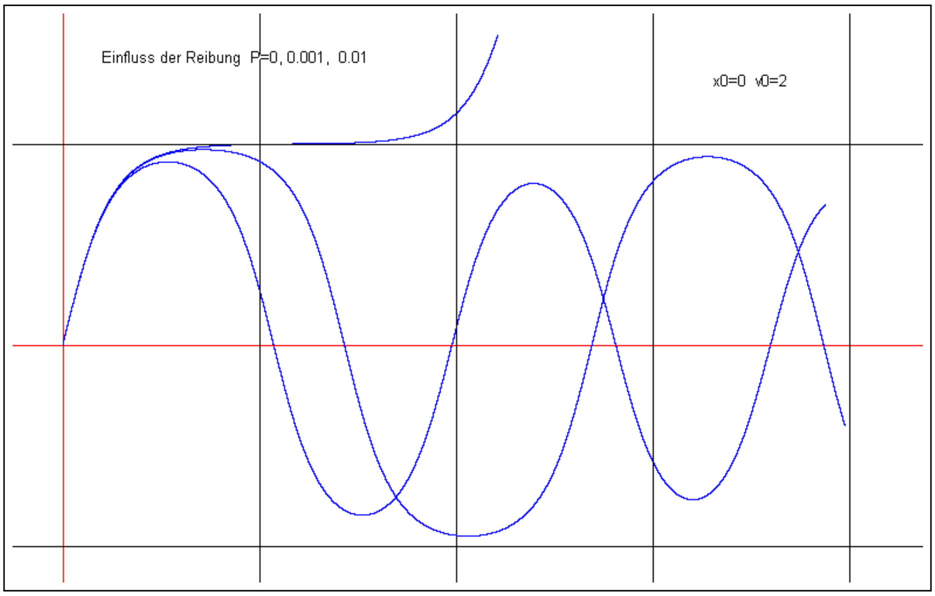


Ein ähnliches Bild, nur mit einer größeren Startgeschwindigkeit und nahe benachbarten Startwinkeln. Man sieht, wie die Bahnen über längere Zeit eng benachbart verlaufen und sich dann plötzlich trennen. Rot die zugehörigen Geschwindigkeitskurven.



Im nächsten Bild wird die Differentialgleichung abgändert, indem mehrere P-Werte gewählt werden.

(P=0, 0.001 und 0.01). Für die gewählten Anfangswerte hat das schon Einfluss.



(4.22) **Bewegung im Gravitationsfeld**

Wir betrachten jetzt die Bewegung eines Massenpunktes in einem festen Gravitationsfeld, also einem Kraftfeld vom Coulombtyp aus (3.7.7). Die Feldquelle sei der Ursprung. In geeigneten Einheiten führt das auf die Differentialgleichung

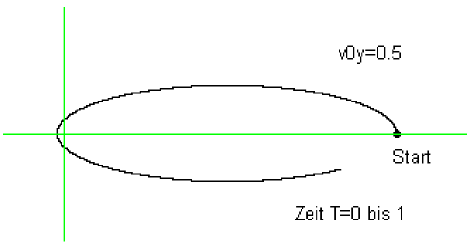
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{-1}{|\vec{r}(t)|^3}\vec{r}(t).$$

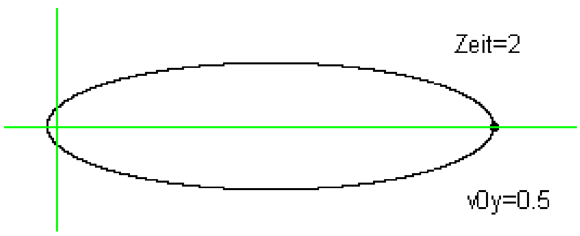
Neben der Differentialgleichung benötigen wir noch Anfangswerte. Wir wählen

$$\vec{r}^K(0) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}^K(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

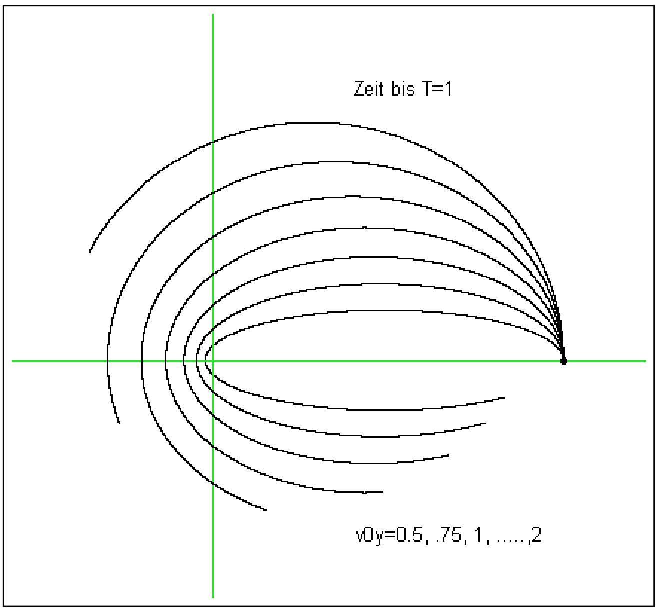
Unter diesen Umständen erfolgt die Bewegung ganz in der x-y-Ebene. v_{0y} ist ein freier Parameter.

Zuerst wählen wir $v_{0y} = 0.5$ und betrachten die Bewegung zwischen t=0 und t=1. Die linke Figur zeigt die durchlaufene Bahn. Das Kraftzentrum liegt im Ursprung. Das rechte Bild zeigt die Bahn für einen späteren Zeitpunkt. Die Bahnform ist eine Ellipse, die periodisch durchlaufen wird. D.h. nach nach einer Periode befindet sich der Punkt an derselben Stelle. Beachten Sie, wie nahe der





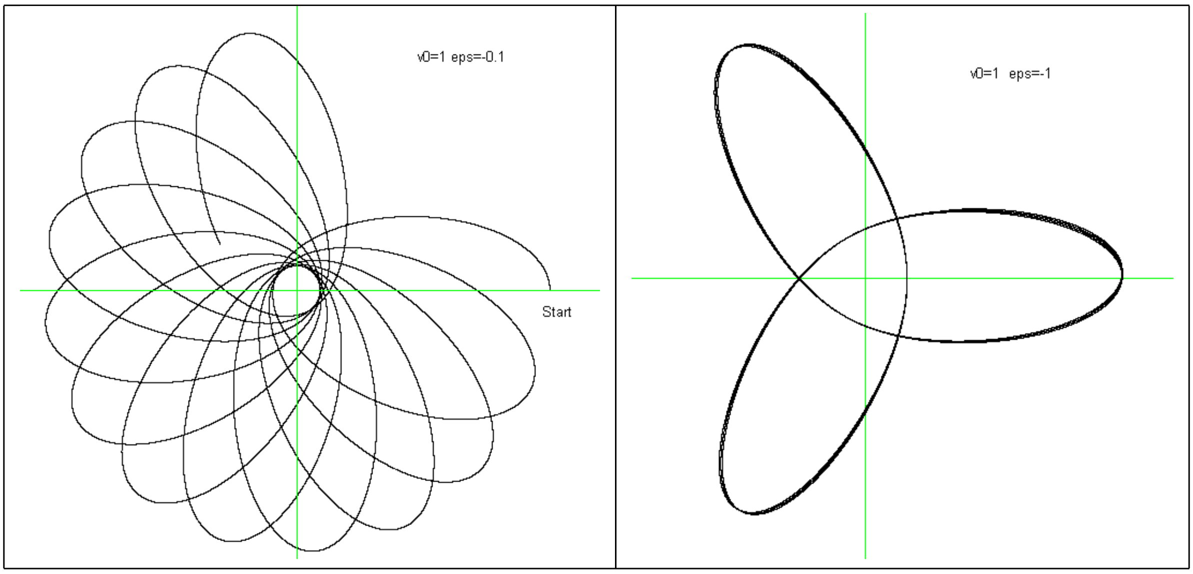
Jetzt ändern wir v_{0y}. Von 0.5 bis 2. Wieder zeigen wir die Bahn bis T=1. Der linke Brennpunkt der Ellipse liegt im Ursprung. Mi zunehmendem v_{0y} nähert sich die Form der Kreisform. Und die Periodendauer wächst an.



Jetzt ändern wir das Kraftgesetz etwa ab. Statt $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{-1}{|\vec{x}|}\vec{x}$ nehmen wir

$$\boxed{\vec{F}_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{-1}{|\vec{x}|^{3+\varepsilon}}\vec{x}}$$

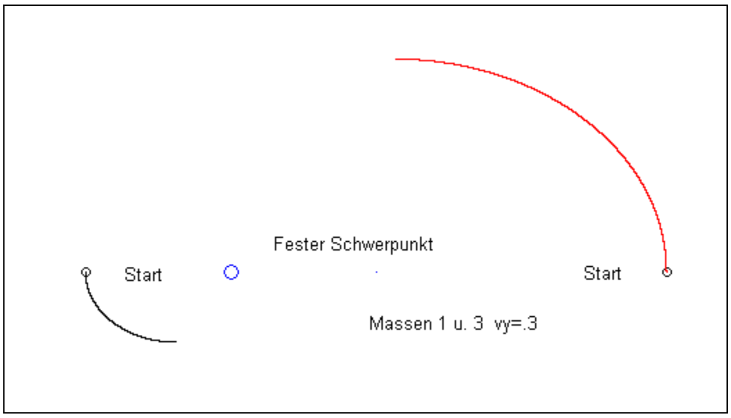
D.h. der Betrag der Kraft geht nicht mehr wie $1/\mathrm{r}^2$, sondern wie $1/\mathrm{r}^{2+\varepsilon}$. Im nächsten Bild ist links $\varepsilon = -0.1$ gewählt. Die Bahn ist jetzt nicht mehr periodisch. Die Ellipse rotiert vielmehr um das Zentrum. Rechts ist $\varepsilon = -1$. Jetzt hat man (nur für ein ganz bestimmtes v_{0y} wieder eine periodische Bahn In beiden Fällen ist $\mathrm{v}_{0y} \approx 1$.



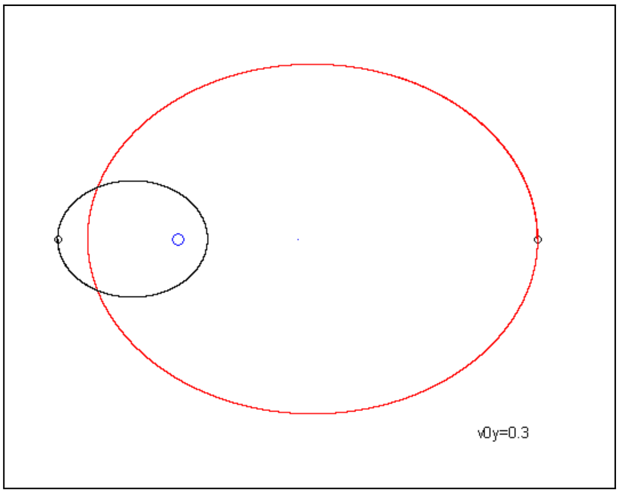
(4.23) Jetzt betrachten wir zwei Massenpunkte, die sich wechselseitig mit dem Gravitationsgesetz anziehen. Die Newtonsche Theorie läßt sich problemlos auf diesen Fall ausdehnen und dasselbe gilt für die numerische Lösung.

In den Bildern ist jeweils der Schwerpunkt der beiden Massen festgehalten. Die beiden Massen umrunden dann diesen Punkt. Die beiden Punkte haben verschieden Massen ($\mathrm{m}_1 = 3$ und $\mathrm{m}_2 = 1$). Die Startorte sind eingezeichnet. Beide Punkte haben eine kleine transversale Anfangsgeschwindigkeit. Gezeichnet sind ihre

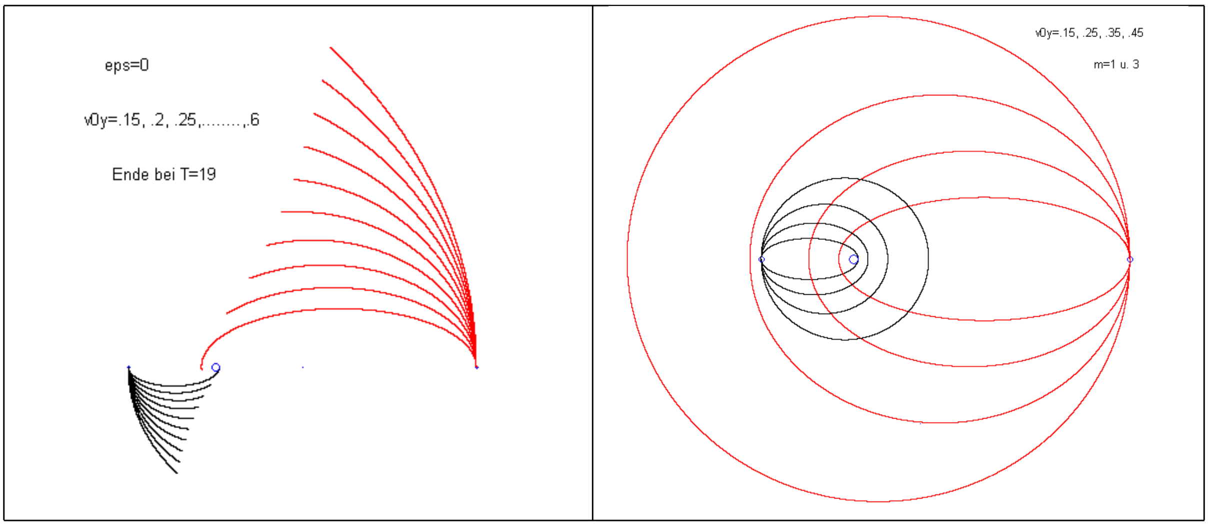
Bahnen für eine kleine Zeit nach dem Start. Zu jedem Zeitpunkt geht die Verbindungslinie der beiden Punkte durch den Schwewrpunkt. Und die Abstände zu diesem Punkt verhalten sich wie 3:1.



Jetzt das Bild für einen späteren Zeitpunkt. Man sieht, dass sich beide Punkte auf Ellipsen bewegen, deren einer Brennpunkt im Schwerpunkt liegt. Beide Bewegungen sind periodisch.

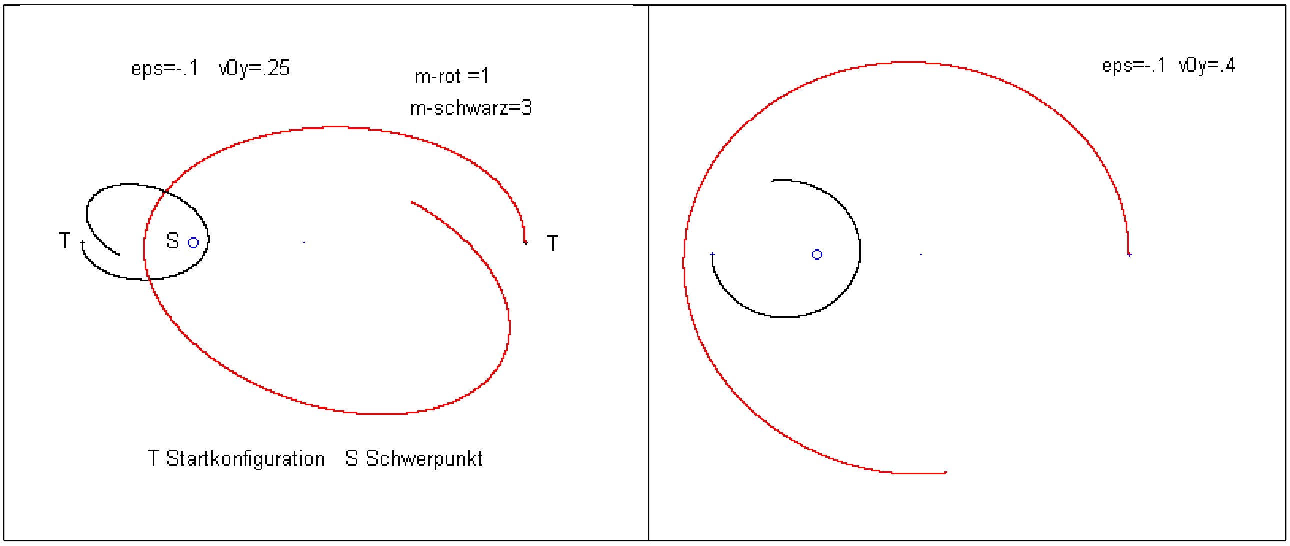


Und jetzt ändern wir die Anfangsgeschwindigkeit etwas ab. Das ergibt folgenden Paare von Bahnen:

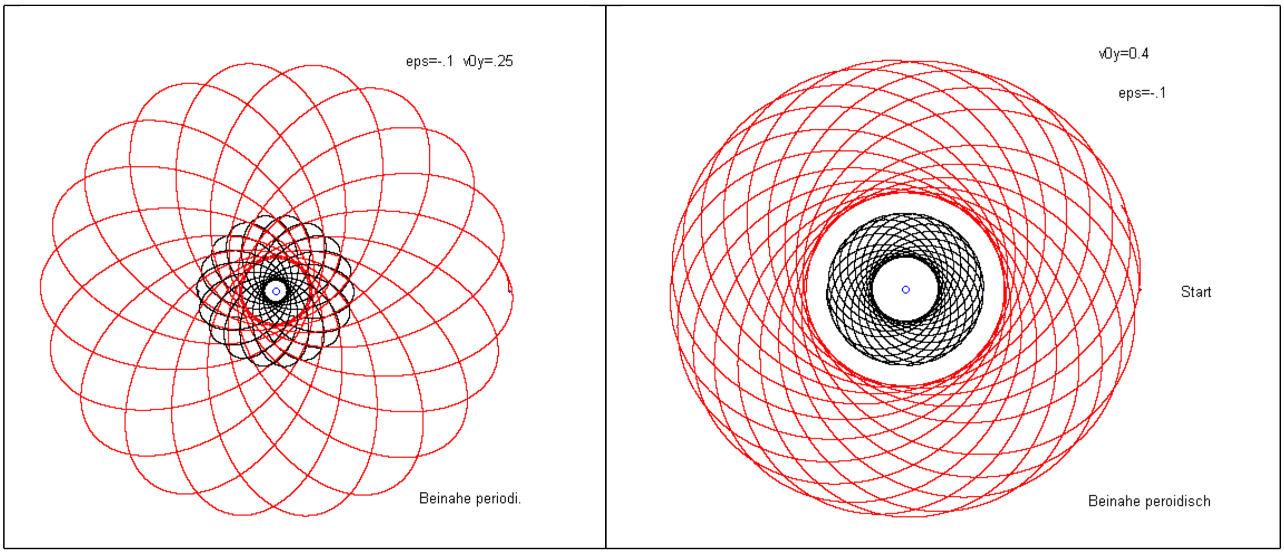


Links Ist die Bewegung bis T=19 für unterschiedliche transversale Anfanggeschwindigkeiten dargestellt. Rechts für mehr als einen vollen Umlauf. Damit der Schwerpunkt fest bleibt, müssen die Anfangsgeschwindigkeiten $\mathrm{m}_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ erfüllen. Zu den Bildern gehört $\mathrm{m}_{rot} = 1$ und $\mathrm{m}_{schwarz} = 3$

Und jetzt wieder einige Beipiele mit abgeändertem Kraftgesetz! Erneut gehe der Betrag nicht mit $1/\mathrm{r}^2$ sondern mit $1/\mathrm{r}^{2+\varepsilon}$. Wir wählen $\varepsilon = -0.1$.



Die ersten beiden Bilder zeigen den Beginn der Bewegung - etwa ein Umlauf um den Schwerpunkt - für zwei unterschiedliche transversale Startgeschwindigkeiten. Der Schwerpunkt ruht wieder. Und wie sieht das für viele Umläufe aus?



Änderung der Anfangswerte führt zu einer Vielzahl weiterer Formen.